УДК 517.942

Л. А. Власенко (Киев. нац. ун-т, Харьк. нац. ун-т)

О ПОСТРОЕНИИ И РОСТЕ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

We consider degenerate linear functional differential equations in Banach spaces. We construct solutions with exponential and overexponential growth. We obtain the conditions of one-valued solvability of an initial-value problem and describe a set of initial functions. The results are applied to partial differential equations with time delay.

У банахових просторах розглянуто вироджені лінійні функціонально-диференціальні рівняння. Побудовано розв'язки з експоненціальним і надекспоненціальним зростанням. Отримано умови однозначної розв'язності початкової задачі, описано деяку множину початкових функцій. Результати застосовано до рівнянь з частинними похідними із загаюванням у часі.

1. Введение и постановка задачи. Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\sum_{j=0}^{n}\left[A_j u'(t-\omega_j)+B_j u(t-\omega_j)\right]+\int_0^{\omega} B(s)u(t-s)\,ds = f(t), \qquad \text{п. в.} \quad t\geq 0. \qquad (1)$$

Здесь A_j, B_j — замкнутые линейные операторы, действующие из комплексного банахова пространства X в комплексное банахово пространство Y, с областями определения D_{A_j}, D_{B_j} соответственно. Мы не предполагаем обратимость оператора A_0 (и остальных операторов также) и поэтому уравнение (1) называем *вырожденным*. На самом деле все результаты статьи представляют интерес и являются новыми для *явного или невырожденного уравнения* $(A_0=E)$. В уравнении (1) запаздывания упорядочены $0=\omega_0<\omega_1<\ldots<\omega_n=\omega$, оператор-функция $B(s)$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$ линейных ограниченных операторов интегрируема по Бохнеру на $[0,\omega]$, Y-значная функция $f(t)$ локально интегрируема по Бохнеру на $[0,\infty)$, т. е. принадлежит пространству $L_{1,\mathrm{loc}}(0,\infty;Y)$. Будем использовать определения и обозначения функциональных пространств из [1] (введение) с тем отличием, что вместо скалярных функций рассматриваются вектор-функции со значениями в банаховом пространстве. Через $W_1^1(a,b;X)$ обозначается пространство Соболева функций из $[a,b]$ в X, через $W_{1,\mathrm{loc}}^1(a,\infty;X)$ — класс функций, принадлежащих $W_1^1(a,T;X)$ при всех $T>a$, через $C^p(I,X)$, $p=0,1,\ldots,\infty$, — класс X-значных функций, p раз непрерывно дифференцируемых на $I\subset \boldsymbol{R}$. Индекс $p=0$ будем опускать.

Вектор-функцию $u(t)\colon[-\omega,\infty)\to X$ назовем *сильным решением уравнения* (1), если:

1) $u(t)\in D_{A_j}\cap D_{B_j}$, $t\geq -\omega_j$, $j=0,1,\ldots,n$;

2) $u(t)\in C([-\omega,\infty),X)\cap W_{1,\mathrm{loc}}^1(-\omega,\infty;X)$;

3) $A_j u(t)\in C([-\omega_j,\infty),Y)\cap W_{1,\mathrm{loc}}^1(-\omega_j,\infty;Y)$, $j=0,1,\ldots,n$;

4) $B_j u(t)\in L_{1,\mathrm{loc}}(-\omega_j,\infty;Y)$, $j=0,1,\ldots,n$;

5) $u'(t) \in D_{A_j}$, п. в. $t \geq -\omega_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$;

6) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при почти всех $t \geq 0$.

Любое сильное решение уравнения (1) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{j=0}^{n} A_j u(t-\omega_j)\right] + \sum_{j=0}^{n} B_j u(t-\omega_j) + \int_0^{\omega} B(s)u(t-s)ds = f(t), \quad \text{п. в.} \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Для определения *сильного решения уравнения* (2) требования 2, 3, 5, 6 заменяются следующими:

2′) $u(t) \in C([-\omega, \infty), X)$;

3′) $A_j u(t) \in C([-\omega_j, \infty), Y)$, $j = 0, 1, \ldots, n$;

5′) $\sum_{j=0}^{n} A_j u(t-\omega_j) \in C([0, \infty), Y) \cap W^1_{1,\mathrm{loc}}(0, \infty; Y)$;

6′) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2) при почти всех $t \geq 0$.

Сильное решение уравнения (2) будем называть *слабым решением уравнения* (1). Условия 5′, 6′ можно заменить одним эквивалентным условием: $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$L(u(t)) = \sum_{j=0}^{n}\left\{A_j\left[u(t-\omega_j) - u(-\omega_j)\right] + \int_0^t B_j u(\tau-\omega_j)d\tau\right\} + \\ + \int_0^t\left[\int_0^{\omega} B(s)u(\tau-s)ds\right]d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Сильное решение является слабым. Понятия сильного и слабого решений явного уравнения запаздывающего типа $(A_0 = E,\ A_j = 0,\ j = 1, \ldots, n)$ совпадают. Для явного уравнения нейтрального типа слабое решение, вообще говоря, не является сильным. Слабое решение вырожденного уравнения может не быть сильным уже в случае уравнения запаздывающего типа $(A_j = 0,\ j = 1, \ldots, n)$. Слабые решения явного уравнения нейтрального типа рассматривались в [2, 3], слабые решения вырожденного уравнения запаздывающего типа — в [4].

Для решений уравнения (1) будем рассматривать начальное условие

$$u(t) = g(t), \quad -\omega \leq t \leq 0, \tag{4}$$

где $g(t) \in C([-\omega, 0], X) \cap W^1_1(-\omega, 0; X)$. Для слабого решения достаточно требовать, чтобы $g(t) \in C([-\omega, 0], X)$.

Начальную задачу (1), (4) назовем *сильно* (*слабо*) *детерминированной*, если среди всех сильных (слабых) решений однородного уравнения

$$\sum_{j=0}^{n}\left[A_j u'(t-\omega_j) + B_j u(t-\omega_j)\right] + \int_0^{\omega} B(s)u(t-s)ds = 0, \quad \text{п. в.} \quad t \geq 0, \tag{5}$$

только тривиальное решение $(u(t) \equiv 0)$ удовлетворяет начальному условию

$$u(t) = 0, \quad -\omega \leq t \leq 0. \tag{6}$$

Утверждение 1. *Сильная и слабая детерминированность начальной задачи* (1), (4) *эквивалентны.*

Доказательство. Поскольку любое сильное решение задачи (1), (4) является слабым, то из слабой детерминированности следует сильная.

Пусть теперь задача (1), (4) сильно детерминирована и $u(t)$ — слабое решение задачи (5), (6). Тогда функция $v(t) = \int_0^t u(s)ds$, $t \geq -\omega$, является сильным решением и вследствие предположения $v(t) \equiv 0$. Отсюда следует $u(t) \equiv 0$. Утверждение доказано.

Таким образом, можно не различать слабую и сильную детерминированность и употреблять термин *детерминированная начальная задача*.

Для каждого комплексного λ рассмотрим линейный оператор $\Delta(\lambda) = \sum_{j=0}^{n}(\lambda A_j + B_j)e^{-\lambda\omega_j} + \int_0^{\omega} e^{-\lambda s}B(s)ds$, определенный на $D = \bigcap_{j=0}^{n}(D_{A_j}\cap D_{B_j})$. Назовем $\Delta(\lambda)$ *характеристической оператор-функцией уравнения* (1) (или уравнения (2)). Ее значения принадлежат множеству линейных операторов, определенных на D. Множество $\rho(\Delta)$ комплексных чисел λ, для которых оператор $\Delta(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\Delta^{-1}(\lambda)\in \mathcal{L}(Y, X)$, назовем *регулярным множеством оператор-функции* $\Delta(\lambda)$, а сам обратный $\Delta^{-1}(\lambda)$ — *резольвентой*. Дополнение множества $\rho(\Delta)$ назовем *спектром* $\sigma(\Delta) = C\setminus\rho(\Delta)$. *Точечный спектр* или *собственные числа* — это множество $\sigma_p(\Delta)$ тех значений $\lambda \in \sigma(\Delta)$, для которых $\Delta(\lambda)$ не имеет обратного. Если $\lambda_0 \in \sigma_p(\Delta)$, то вектор $u_0 \neq 0$, для которого $\Delta(\lambda_0)u_0 = 0$, есть *собственный вектор*. Регулярное множество $\rho(\Delta)$ открыто в C и на множестве $\rho(\Delta)$ резольвента является голоморфной оператор-функцией со значениями в $\mathcal{L}(Y, X)$. Оператор-функции $A_j\Delta^{-1}(\lambda)$, $B_j\Delta^{-1}(\lambda)$, $j = 0, 1, \dots, n$, со значениями в $\mathcal{L}(Y, X)$ также являются голоморфными на $\rho(\Delta)$. Эти факты следуют из равенства $\Delta(\lambda) = [E + A(\lambda)]\Delta(\lambda_0)$ $(\lambda_0 \in \rho(\Delta))$, в котором

$$A(\lambda) = \left[(\lambda-\lambda_0)\sum_{j=0}^{n} e^{-\lambda\omega_j}A_j + \sum_{j=1}^{n}\left(e^{-\lambda\omega_j} - e^{-\lambda_0\omega_j}\right)(\lambda_0 A_j + B_j) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\omega}\left(e^{-\lambda s} - e^{-\lambda_0 s}\right)B(s)ds\right]\Delta^{-1}(\lambda_0)$$

и

$$\|A(\lambda)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \lambda_0.$$

В данной работе исследуются непрерывные решения уравнения (1). Кусочно-непрерывные решения были рассмотрены в [5]. При выполнении специальных условий согласования [5, 6] кусочно-непрерывное решение будет непрерывным.

Мы будем использовать метод преобразования Лапласа вектор-функций со значениями в банаховом пространстве [7, 8]. Для построения экспоненциально ограниченных решений применим технику контурного интегрирования с множителями сходимости [8] и ее модификацию для вырожденных уравнений без запаздывания [9, 10].

2. Основные результаты. Умножим (2) на $e^{-\lambda t}$ и проинтегрируем от 0 до t:

$$\Delta(\lambda)\int_0^t e^{-\lambda\tau}u(\tau)d\tau = F(t,\lambda) - F(0,\lambda) + \int_0^t e^{-\lambda\tau}f(\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \tag{7}$$

где

$$F(t,\lambda) = -\sum_{j=0}^{n} A_j u(t-\omega_j)e^{-\lambda t} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}(\lambda A_j + B_j)\int_t^{t+\omega_j} e^{-\lambda\tau}u(\tau-\omega_j)d\tau + \int_0^{\omega} B(s)\left[\int_t^{t+s} e^{-\lambda\tau}u(\tau - s)d\tau\right]ds.$$

Будем предполагать, что правая часть $f(t)$ уравнения (1) допускает преобразование Лапласа $\hat{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau}f(\tau)d\tau$ с абсциссой сходимости σ_f. Наличие вырождения $(\operatorname{Ker} A_0 \neq \{0\})$ уже в конечномерном случае может привести к существованию сверхэкспоненциально растущих решений. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть уравнение, в котором характеристический квазиполином $h(\lambda) = \det \Delta(\lambda)$ имеет опережающую цепь корней $(\operatorname{Re} \lambda_m \to +\infty)$, и воспользоваться доказанным ниже утверждением 2. Поэтому в общем случае в соотношении (7) нельзя перейти к пределу при $t \to \infty$, как это делается при применении метода преобразования Лапласа к явным уравнениям, например, в [2, 3, 11]. Характеристические квазиполиномы явных уравнений с опережающим аргументом также могут иметь опережающую цепь корней, что приводит к нарушению непрерывной зависимости решений от начальных условий. Для изучения подобных некорректных задач в [12] предлагается выделять „подпространство экспоненциально оцененных решений". Для абстрактного уравнения $u'(t) = Au(t)$ в работе [8] такие решения назывались нормальными. Отметим, что некоторые свойства решений одного класса явных уравнений с опережающим аргументом были получены в [13]; сдвиг аргумента переводит этот класс в класс вырожденных уравнений с запаздывающим аргументом.

Напомним, что вектор-функция $u(t)$ является функцией экспоненциального типа, если ее показатель экспоненциального роста

$$\chi_u = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln \|u(t)\|}{t}$$

меньше ∞. *Полным показателем экспоненциального роста решения* $u(t)$ *уравнения* (1) назовем величину

$$h_u = \max\{\chi_u, \chi_{A_0 u}, \ldots, \chi_{A_n u}, \chi_{B_1 u}, \ldots, \chi_{B_n u}\}.$$

Если $h_u < \infty$, то решение $u(t)$ назовем *нормальным*. При некоторых условиях [14] любое решение можно аппроксимировать нормальными. Класс слабых нормальных решений уравнения (1), для которых $h_u \leq \alpha$, обозначим через E_α. Для однородного уравнения (5) при любом α класс E_α содержит хотя бы тривиальное решение, для неоднородного уравнения этот класс может быть пустым. Решение $u(t)$ уравнения (1) назовем *сверхэкспоненциально растущим или быстро растущим*, если его показатель экспоненциального роста h_u равен $+\infty$. Укажем условия, при которых уравнение (5) имеет быстро растущие решения.

Утверждение 2. *Пусть спектр оператор-функции* $\Delta(\lambda)$ *содержит последовательность* $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ *собственных чисел, вещественные части которых стремятся к* $+\infty$. *Тогда существует сильное сверхэкспоненциально растущее решение уравнения* (5).

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $\operatorname{Re} \lambda_m \geq 0$. Пусть h_m $(\|h_m\| = 1)$ — собственные векторы, соответствующие собственным числам λ_m. Тогда функции $e^{\lambda_m t} h_m$ являются сильными решениями уравнения (5). Будем искать быстро растущее решение в виде ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \xi_m e^{\lambda_m t} h_m \tag{8}$$

с числовыми коэффициентами ξ_m, выбранными надлежащим образом. Обозначим

$$\alpha_m^{-1} = m^2 \left[\sum_{j=0}^{n} \left(\|A_j h_m\| + \|B_j h_m\| \right) + 1 \right] (1 + |\lambda_m|) e^{\operatorname{Re} \lambda_m m}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Рассмотрим банахово пространство l_α числовых последовательностей $\xi = \{\xi_m\}_{m=1}^{\infty}$, для которых $\|\xi\|_\alpha = \sup_m \alpha_m^{-1} |\xi_m| < \infty$. Если $\xi \in l_\alpha$, то ряд (8) равномерно сходится на любом компакте из $[-\omega, \infty)$ и его сумма $u(t,\xi)$ представляет сильное решение уравнения (5). Определим семейство $U_{m,t}$, $t \geq 0$, $m = 1, 2, \ldots$, линейных ограниченных операторов из l_α в X : $U_{m,t}\xi = e^{-\lambda_m t} u(t,\xi)$. Заметим, что для элементов $\zeta_k = \{\zeta_{km}\}_{m=1}^{\infty} \in l_\alpha$, $\zeta_{km} = 0$, $k \neq m$, $\zeta_{kk} = 1$, имеем $\|\zeta_k\|_\alpha = \alpha_k^{-1}$ и $U_{m,t}\zeta_k = e^{(\lambda_k - \lambda_m)t} h_k$. Поэтому $\|U_{m,t}\| \geq e^{\mathrm{Re}(\lambda_k - \lambda_m)t} \alpha_k$ для всех k, $m = 1, 2, \ldots$ и $t \geq 0$. Отсюда следует $\lim\limits_{t\to\infty} \|U_{m,t}\| = \infty$, $m = 1, 2, \ldots$. В силу теоремы о сгущении особенностей [15, с. 95] существует элемент $\xi \in l_\alpha$, для которого $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \|u(t,\xi)\| e^{-\mathrm{Re}\lambda_m t} = \infty$ при всех $m = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $u(t,\xi)$ является сверхэкспоненциально растущим решением.

Пусть $u(t)$ — слабое нормальное решение начальной задачи (1), (4) и $\hat{u}(\lambda)$ — его преобразование Лапласа. При каждом λ из полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > \max\{h_u, \sigma_f\}$ в соотношении (7) перейдем к пределу при $t \to \infty$:

$$\Delta(\lambda)\hat{u}(\lambda) = G(\lambda) + \hat{f}(\lambda), \qquad \mathrm{Re}\,\lambda > \max\{h_u, \sigma_f\}, \tag{9}$$

где

$$G(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} A_j g(-\omega_j) -$$
$$- \sum_{j=1}^{n} (\lambda A_j + B_j) \int_0^{\omega_j} e^{-\lambda\tau} g(\tau - \omega_j)\, d\tau - \int_0^{\omega} B(s) \left[\int_0^{s} e^{-\lambda\tau} g(\tau - s)\, d\tau \right] ds.$$

Если $\lambda \notin \sigma_p(\Delta)$, то $\hat{u}(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda)[G(\lambda) + \hat{f}(\lambda)]$. Предположим, что найдется прямая $\mathrm{Re}\,\lambda = \gamma > \max\{0, h_u, \sigma_f\}$, не содержащая собственных чисел оператор-функции $\Delta(\lambda)$. Применяя теорему обращения преобразования Лапласа, получаем явные выражения для нормальных решений начальной задачи (1), (4) через начальные функции $g(t)$. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f(t)$ допускает преобразование Лапласа с абсциссой сходимости σ_f и существует прямая $\mathrm{Re}\,\lambda = \gamma > \max\{\sigma_f, 0\}$, свободная от собственных чисел оператор-функции $\Delta(\lambda)$. Тогда любое слабое решение начальной задачи (1), (4) из класса E_α, где $\alpha < \gamma$, выражается через начальную функцию $g(t)$ по формуле*

$$u(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \Delta^{-1}(\lambda) \left[G(\lambda) + \hat{f}(\lambda) \right] d\lambda \right\}, \quad t > 0.$$

Если $u(t)$ — сильное решение, то

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} \Delta^{-1}(\lambda) \left[G(\lambda) + \hat{f}(\lambda) \right] d\lambda, \quad t > 0.$$

Здесь и в дальнейшем интегралы $\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} (\cdot)\, d\lambda$ понимаются в смысле главного значения.

Приведем условия детерминированности начальной задачи (1), (4) в классе нормальных решений. Условия детерминированности в классе всех решений, который может содержать и быстро растущие, установлены в [16].

Теорема 2. *Пусть $\sigma_p(\Delta) \neq \boldsymbol{C}$ и $\delta_\Delta = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \notin \sigma_p(\Delta)\}$. Тогда для любого $\alpha < \delta_\Delta$ начальная задача (1), (4) детерминирована в классе E_α. Если $\delta_\Delta = +\infty$, то начальная задача (1), (4) детерминирована в классе всех нормальных решений.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует нормальное решение $u(t) \neq 0$ начальной задачи (5), (6) из класса E_α, $\alpha < \delta_\Delta$. Из соотношения (9) следует

$$\Delta(\lambda)\hat{u}(\lambda) = 0, \quad \operatorname{Re}\lambda > \alpha. \tag{10}$$

Те λ, для которых $\hat{u}(\lambda) \neq 0$ и $\operatorname{Re}\lambda > \alpha$, принадлежат точечному спектру $\sigma_p(\Delta)$. Пусть $\hat{u}(\lambda_0) = 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_0 > \alpha$. Поскольку $\hat{u}(\lambda)$ голоморфна и $\hat{u}(\lambda) \neq$ $\neq 0$, то найдется целое число $m \geq 1$ такое, что $\hat{u}^{(k)}(\lambda_0) = 0$ при $k = 0, \ldots$ $\ldots, m-1$ и $\hat{u}^{(m)}(\lambda_0) \neq 0$. Из соотношения (10), голоморфности вектор-функций $\hat{u}(\lambda)$, $A_j\hat{u}(\lambda)$, $B_j\hat{u}(\lambda)$ и замкнутости операторов A_j, B_j получаем

$$0 = \frac{d^m}{d\lambda^m}\left[\Delta(\lambda)\hat{u}(\lambda)\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \Delta(\lambda_0)\ \hat{u}^{(m)}(\lambda_0).$$

Так как $\hat{u}^{(m)}(\lambda_0) \neq 0$, то $\lambda_0 \in \sigma_p(\Delta)$. Таким образом, вся полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda >$ $> \alpha$ принадлежит $\sigma_p(\Delta)$. Это противоречит условию $\alpha < \delta_\Delta$.

Одна из важных задач, которая возникает при исследовании вырожденного уравнения (1), — описание множества допустимых начальных функций (4). Уже в конечномерном случае, если $\det A_0 = 0$, для однородного уравнения (5) это множество может быть тривиальным $(g(t) \equiv 0)$. В разделе 6.4 монографии [11] отмечалось, что теоремы существования и единственности для таких уравнений не могут быть подобны теоремам для явных уравнений. В [4 – 6] получены достаточные условия существования и единственности решения вырожденной начальной задачи (1), (4) в случае $B(s) \equiv 0$. Основное предположение состояло в том, что точка $\mu = 0$ является полюсом резольвенты $(A_0 + \mu B_0)^{-1}$. При построении решений уравнения (1) в теореме 3 мы не только отказываемся от этого требования, но даже не предполагаем наличия регулярных точек пучка операторов $A_0 + \mu B_0$.

Теорема 3. *Пусть функция $f(t)$ допускает преобразование Лапласа $\hat{f}(\lambda)$ с абсциссой сходимости σ_f и регулярное множество $\rho(\Delta)$ оператор-функции $\Delta(\lambda)$ содержит прямую $\operatorname{Re}\lambda = \gamma > \max\{0, \sigma_f\}$. Пусть также на этой прямой нормы $\|\Delta^{-1}(\lambda)\|$, $\|A_j\Delta^{-1}(\lambda)\|$, $\|B_j\Delta^{-1}(\lambda)\|$, $j = 0, 1, \ldots, n$, оцениваются через $O(|\lambda|^k)$ для некоторого $k \geq 0$ и конечны интегралы $\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}(\cdot)\,d\lambda$ от функций $\|\Delta^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\|$, $\|A_j\Delta^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\|$, $\|B_j\Delta^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\|$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Тогда для любых векторов $v \in X$, комплексных чисел ζ из полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta >$ $> \gamma$ и целых чисел $p \geq [k] + 2$ вектор-функция*

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\Delta^{-1}(\lambda)\left[\frac{v}{(\lambda-\zeta)^p} + \hat{f}(\lambda)\right]d\lambda, \qquad t \geq -\omega, \tag{11}$$

является решением уравнения (1) *из класса E_γ. Если конечны интегралы $\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}(\cdot)\,d\lambda$ от функций $\|\lambda\Delta^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\|$, $\|\lambda A_j\Delta^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\|$, $\|\lambda B_j\Delta^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\|$, $j = 0, 1, \ldots, n$, то при целых $p \geq [k] + 3$ функция* (11) *является сильным решением уравнения* (1).

Доказательство. Имеем $u(t) \in C([-\omega, \infty), X)$, $A_j u(t) \in C([-\omega, \infty), Y)$, $B_j u(t) \in C([-\omega, \infty), Y)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Напомним, что через $L(u(t))$ обозначена левая часть соотношения (3). Для всех $0 < \varepsilon \leq t$ имеем

$$L(u(t)) - L(u(\varepsilon)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda\varepsilon}}{\lambda(\lambda-\zeta)^p} d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda\varepsilon}}{\lambda} \hat{f}(\lambda) d\lambda.$$

В силу леммы Жордана и теоремы о вычетах первый интеграл равен нулю, ко второму интегралу применим формулу обращения преобразования Лапласа:

$$L(u(t)) - L(u(\varepsilon)) = \int_{\varepsilon}^{t} f(\tau)d\tau, \quad t \geq \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, убеждаемся в том, что функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (3) при всех $t \geq 0$. Таким образом, функция $u(t)$ (11) является слабым решением уравнения (1). Нетрудно видеть, что $h_u \leq \gamma$.

Если $p \geq [k]+3$, то при дополнительных предположениях теоремы $u(t) \in C^1([-\omega, \infty), X)$, $A_j u(t) \in C^1([-\omega, \infty), Y)$ и, следовательно, $u(t)$ — сильное решение уравнения (1). Теорема доказана.

3. Приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных. Уравнения в частных производных с запаздыванием по времени встречаются при изучении классических задач математической физики, в которых учитывается эффект запаздывания, причем эти уравнения могут быть вырожденными. Так, уравнение теплопроводности в случае теплообмена с окружающей средой имеет вид

$$a(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) + h_0(x)u(t,x) + h_1(x)u(t-\omega,x) +$$
$$+ \int_0^{\omega} h_2(s,x)u(t-s,x)ds = f(t,x), \quad t>0, \quad 0<x<l. \tag{12}$$

Здесь слагаемые $h_0(x)u(t,x)$, $h_1(x)u(t-\omega,x)$, $\int_0^{\omega} h_2(s,x)u(t-s,x)ds$ соответствуют потерям тепла. Функция $a(x)$ является неотрицательной и, вообще говоря, может обращаться в нуль. Поэтому в общем случае уравнение (12) является вырожденным. Для уравнения (12) будем рассматривать краевые условия Дирихле

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t>0, \tag{13}$$

и начальное условие

$$u(t,x) = g(t,x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad -\omega \leq t \leq 0. \tag{14}$$

В общем случае к смешанной задаче (12) – (14) нельзя применить метод разделения переменных [17]. Будем предполагать, что коэффициенты в уравнении (12) удовлетворяют следующим ограничениям: $a(x) \geq 0$, $a(x) \in C[0,l]$, $k(x) > 0$, $k(x) \in C^1[0,l]$, $h_0(x) > 0$, $h_0(x) \in C[0,l]$, $h_1(x) \neq 0$, $h_1(x) \in C[0,l]$, $h_2(s,x) \neq 0$, $h_2(s,x) \in C([0,\omega]\times[0,l])$. Пусть вектор-функция $f(t) = f(t,\cdot) \in L_{1,\mathrm{loc}}(0,\infty; L_2(0,l))$ и допускает преобразование Лапласа $\hat{f}(\lambda)$ с абсциссой сходимости σ_f, вектор-функция $g(t) = g(t,\cdot) \in W_1^1(-\omega,0; L_2(0,l))$. В пространстве $X = Y = L_2(0,l)$ смешанная задача (12) – (14) записывается в абстрактной форме

$$A_0u'(t) + B_0u(t) + B_1u(t-\omega) + \int_0^{\omega} B(s)u(t-s)ds = f(t), \quad t>0,$$
$$u(t) = g(t), \quad -\omega \leq t \leq 0. \tag{15}$$

Здесь $A_0 u(x) = a(x)u(x)$, $B_0 u(x) = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + h_0(x)u(x)$, $D_{B_0} = \{u(x) \in$ $\in W_2^1(0, l), u(0) = u(l) = 0\}$, $B_1 u(x) = h_1(x)u(x)$, $B(s)u(x) = h_2(s, x)u(x)$. Под слабым (сильным) решением $u(t, x)$ смешанной задачи (12) – (14) понимается слабое (сильное) решение $u(t)(x)$ начальной задачи (15). Пучок операторов $\lambda_0 A_0 + B_0$ и оператор-функция

$$\Delta(\lambda) = \lambda A_0 + B_0 + e^{-\lambda\omega} B_1 + \int_0^\omega e^{-\lambda s} B(s)\, ds$$

определяются дифференциальными выражениями

$$l_0(\lambda, x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + \lambda a(x)$$

и

$$l_\Delta(\lambda, x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) + \lambda a(x) + e^{-\lambda\omega} h_1(x) + \int_0^\omega e^{-\lambda s} h_2(s, x)\, ds$$

соответственно. Коэффициенты этих дифференциальных выражений являются целыми функциями параметра λ. Поэтому любая точка λ комплексной плоскости является либо регулярной, либо собственным числом для пучка $\lambda A_0 + B_0$ и оператор-функции $\Delta(\lambda)$ [18, с. 27]. Для всех λ из полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ и $u(x) \in D_{B_0}$ справедливо

$$\operatorname{Re}\left((\lambda A_0 + B_0)u, u\right) \geq \min_{[0,l]} k(x)\|u'(x)\|^2 + \min_{[0,l]} h_0(x)\|u(x)\|^2 \geq C_0\|u(x)\|^2,$$

где $C_0 = \min\limits_{[0,l]} h_0(x) > 0$. Отсюда следует, что полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ состоит из регулярных точек пучка $\lambda A_0 + B_0$ и резольвента $(\lambda A_0 + B_0)^{-1}$ ограничена в этой полуплоскости: $\left\|(\lambda A_0 + B_0)^{-1}\right\| \leq C_0^{-1}$. Заметим, что в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ имеет место представление $\Delta(\lambda) = (E + A(\lambda))(\lambda A_0 + B_0)$, где

$$A(\lambda) = \left(e^{-\lambda\omega} B_1 + \int_0^\omega e^{-\lambda s} B(s)\, ds\right)(\lambda A_0 + B_0)^{-1}$$

и

$$\|A(\lambda)\| \leq C_0^{-1}\left(e^{-\operatorname{Re}\lambda\omega} C_1 + C_2 (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}\left(1 - e^{-\operatorname{Re}\lambda\omega}\right)\right) \to 0,$$
$$\operatorname{Re}\lambda \to +\infty, \quad C_1 = \max_{[0,l]}|h_1(x)|, \quad C_2 = \max_{[0,l]\times[0,\omega]}|h_2(s, x)|.$$

Поэтому существует полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > a_0 \geq 0$, состоящая из регулярных точек оператор-функции $\Delta(\lambda)$, и резольвента $\Delta^{-1}(\lambda)$ в этой полуплоскости ограничена: $\left\|\Delta^{-1}(\lambda)\right\| \leq C$. Например, достаточно взять $a_0 = \max\{\omega^{-1}\ln(2C_0^{-1}C_1),$ $2C_0^{-1}C_2\}$. Таким образом, к начальной задаче (15) можно применить теорему 3 и получить следующий результат для смешанной задачи (12) – (14).

Теорема 4. *Пусть для некоторого* $\gamma > \max\{\sigma_f, a_0\}$ *конечен интеграл* $\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\left\|\Delta^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)\right\| d\lambda$. *Тогда для любых векторов* $v \in L_2(0, l)$, *комплексных чисел* ζ *из полуплоскости* $\operatorname{Re}\zeta > \gamma$ *и целых чисел* $p \geq 2$ *вектор-функция*

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t}\Delta^{-1}(\lambda)\left[(\lambda - \zeta)^{-p} v + \hat{f}(\lambda)\right] d\lambda, \quad t \geq -\omega, \tag{16}$$

определяет начальную функцию $g(t, x) = u(t)(x)$ *при* $-\omega \le t \le 0$ *и соответствующее слабое решение* $u(t, x) = u(t)(x)$ *смешанной задачи* (12) – (14). *Если конечен интеграл* $\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left\| \lambda \Delta^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda) \right\| d\lambda$, *то при целых* $p \ge 3$ *вектор-функция* (16) *определяет начальную функцию и соответствующее сильное решение* $u(t, x) = u(t)(x)$ *смешанной задачи* (12) – (14). *Показатель экспоненциального роста вектор-функции* $u(t)$

$$\chi_u = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{2t} \ln \int_0^l |u(t, x)|^2 dx$$

не превышает γ *и полный показатель экспоненциального роста* $h_u = \max\{\chi_u, \chi_{A_0 u}, \chi_{B_1 u}\}$ *равен* χ_u.

Из теоремы 2 следует, что смешанная задача (12) – (14) детерминирована в классе решений $u(t, x)$, которые являются вектор-функциями $t \to u(t, \cdot) \in L_2(0, l)$ экспоненциального типа ($\chi_u < \infty$).

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Introduction to functional differential equations. – New York: Springer, 1993. – 447 p.
3. *Datko R.* Linear autonomous neutral differential equations in a Banach space // J. Different. Equat. – 1997. – **2**, № 2. – P. 258 – 274.
4. *Favini A., Tanabe H., Pandolfi L.* Singular equations with delay // Different. and Integral Equat. – 1999. – **12**, № 3. – P. 351 – 371.
5. *Vlasenko L.* Implicit linear time-dependent differential-difference equations and applications // Math. Meth. in Appl. Sci. – 2000. – **23**, № 10. – P. 937 – 948.
6. *Власенко Л. А.* Теоремы существования и единственности для одного неявного дифференциального уравнения с запаздываниями // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 5. – С. 624 – 628.
7. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
8. *Любич Ю. И.* Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши // Успехи мат. наук. – 1966. – **21**, № 3. – С. 3 – 51.
9. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 11. – С. 1996 – 2010.
10. *Rutkas A., Vlasenko L.* Implicit operator differential equations and applications to electrodynamics // Math. Meth. in Appl. Sci. – 2000. – **23**, № 1. – P. 1 – 15.
11. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
12. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
13. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Асимптотически ограниченные на всей оси решения систем нелинейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1597 – 1601.
14. *Власенко Л. А.* Повнота елементарних розв'язків одного операторно-диференціального рівняння із загаюваннями // Допов. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 15 – 19.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.
16. *Власенко Л. А.* Единственность решения для вырожденного линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом в банаховых пространствах // Тр. III Междунар. конф. женщин-математиков (Воронеж, 29 мая – 2 июня 1995 г.). – 1995. – Вып. 1. – С. 57 – 62.
17. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
18. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Получено 04.05.2001