УДК 517. 956

И. В. Скрыпник (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ПОТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ ЕМКОСТИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

In the domain $D = \Omega \setminus F$, we consider a nonlinear higher-order elliptic equation such that the corresponding energetic space is $W_p^m(D) \cap W_q^1(D)$, $q > mp$. We estimate a solution $u(x)$ of this equation with the boundary condition $u(x) - kf(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(D)$ where $k \in R^1$, $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ and $f(x) = 1$ for $x \in F$. We prove the pointwise estimate of $u(x)$ in terms of the higher-order capacity of the set F and the distance from the point x to the set F.

В області $D = \Omega \setminus F \subset R^n$ розглядається нелінійне еліптичне рівняння вищого порядку при таких припущеннях, що відповідним енергетичним простором є $W_p^m(D) \cap W_q^1(D)$, $q > mp$. Оцінюється розв'язок $u(x)$ цього рівняння, який задовольняє умову $u(x) - kf(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(D)$, де $k \in R^1$, $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ і $f(x) = 1$ для $x \in F$. Доводиться поточкова оцінка $u(x)$ в термінах ємкості вищого порядку множини F і віддалі від точки x до множини F.

1. Введение. При изучении усреднения для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в последовательности перфорированных областей принципиальную роль играют поточечные оценки решений модельных нелинейных задач. На этих оценках основывается построение асимптотического разложения решений в областях с мелкозернистой границей [1] и в областях с каналами [2]. В последнее время оценки такого типа сделали возможным изучение асимптотического поведения решений нелинейных граничных задач в перфорированных областях без геометрических предположений относительно последовательности областей [3, 4].

Пусть Ω — ограниченное открытое множество в R^n и F — некоторое замкнутое подмножество множества Ω. Будем обозначать через $B(x_0, r)$ шар радиуса r с центром x_0 и $B(r) = B(0, r)$. Предполагаем, что при некоторых d, R справедливы включения

$$F \subset B(d) \subset B(1) \subset B(2) \subset \Omega \subset B(R). \tag{1}$$

Напомним поточечную оценку для уравнения второго порядка. Пусть функции $a_i(x, \xi^{(1)})$ определены для $x \in \Omega$, $\xi^{(1)} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$, измеримы по x для всех $\xi^{(1)}$, непрерывны по $\xi^{(1)}$ для почти всех x и удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, \xi^{(1)})\xi_i \geq \nu_1(1 + |\xi^{(1)}|)^{q-2}|\xi^{(1)}|^2; \tag{2}$$

$$|a_i(x, \xi^{(1)})| \leq \nu_2(1 + |\xi^{(1)}|)^{q-2}|\xi^{(1)}| \tag{3}$$

с некоторыми положительными числами q, ν_1, ν_2, $2 \leq q < n$.

Рассмотрим модельную граничную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad x \in D = \Omega \setminus F, \tag{4}$$

$$u(x) - kf(x) \in \overset{\circ}{W}{}_q^1(D), \tag{5}$$

где $k \in R^1$, $f(x)$ — функция класса $C^\infty(\Omega)$, равная единице в $B(1)$ и нулю вне $B(2)$.

Соответствующая поточечная оценка решения $u(x)$ задачи (4), (5) имеет вид

$$|u(x)| \leq C|k|\left\{\frac{C_q(F)}{|x|^{n-q}}\right\}^{1/(q-1)}, \quad |x| \geq 2d, \tag{6}$$

где $C_q(F)$ обозначает q-емкость множества F. Оценки такого вида доказаны в [5, 2, 6]. Они полезны не только при изучении проблем усреднения, но и при изучении регулярности граничной точки для нелинейных эллиптических уравнений [6] и устойчивости решения нелинейных задач Дирихле относительно вариации области.

Целью данной работы является установление оценки вида (6) для решений нелинейных эллиптических уравнений высшего порядка. Рассматривается уравнение

$$\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, u, \ldots, D^m u) = 0, \quad x \in D, \tag{7}$$

удовлетворяющее условию эллиптичности в форме

$$\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(m)})\xi_\alpha \geq$$

$$\geq \nu_1\left[\sum_{|\alpha| = m} |\xi_\alpha|^p + \sum_{|\alpha| = 1} |\xi_\alpha|^q\right] \tag{8}$$

с $q > mp$. Дальше используются следующие обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс с неотрицательными целыми компонентами,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad D^\alpha u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u(x),$$

$$D^k u(x) = \{D^\alpha u(x), |\alpha| = k\},$$

$$|D^k u(x)|^2 = \sum_{|\alpha| = k} |D^\alpha u(x)|^2.$$

Предполагаются также соответствующие условия роста функций $A_\alpha(x, \xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(m)})$, обеспечивающие возможность определения решения уравнения (7) из пространства $W_p^m(D) \cap W_q^1(D)$. Существенность условия (8), более сильного, чем обычно предполагаемое условие эллиптичности, следует из того, что для квазилинейного эллиптического уравнения высшего порядка невозможно доказать без условия (8) даже ограниченность решения, если размерность области достаточно велика [6]. Уравнения (7) с условием вида (8) введены в [5], где доказана ограниченность и гельдеровость решений без условий на n.

Рассматривается решение уравнения (7), удовлетворяющее граничному условию в форме

$$u(x) - kf(x) \in \mathring{W}_p^m(D) \cap \mathring{W}_q^1(D), \tag{9}$$

где $f(x)$ — такая же функция, как и в (5). В данной работе доказывается оценка

$$|u(x)| \leq C(1+|k|)^{a_0}\left\{\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{|x|^{n-q}} + |x|^{\delta}\right\} \tag{10}$$

для $|x| \geq 8d$, где $C_{p,q}^{m,1}(F)$ — соответствующая емкость высшего порядка множества F, C, a_0, δ — положительные постоянные, зависящие только от известных параметров.

Модельным уравнением для рассматриваемого в статье класса уравнений может служить уравнение Эйлера для функционала

$$\int_D \left\{\sum_{|\alpha|=m} |D^{\alpha}u(x)|^p + \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha}u(x)|^q\right\} dx$$

с $q > mp$. Тем самым из оценки (10) следует поточечная оценка для потенциальной функции, соответствующей емкости $C_{p,q}^{m,1}(F)$.

2. Формулировка результатов. Предполагаем, что функции $A_\alpha(x, \xi^{(0)}, \ldots$ $\ldots, \xi^{(m)})$, $1 \leq |\alpha| \leq m$, определены для $x \in \Omega$, $\xi^{(j)} = \{\xi_\gamma, |\gamma| = j\}$, $\xi_\gamma \in R^1$, и удовлетворяют условиям:

A_1) $A_\alpha(x, \xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(m)})$ — непрерывные функции $\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(m)}$ для почти всех x и измеримые функции x для всех $\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(m)}$;

A_2) существуют положительные числа ν_1, ν_2 такие, что для всех значений $x, \xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(m)}$ справедливы неравенство (8) и оценка

$$|A_\alpha(x, \xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(m)})| \leq \nu_2\left[\sum_{|\beta|=m} |\xi_\beta|^{p_\beta} + 1\right]^{(p_\alpha - 1)/p_\alpha} \tag{11}$$

с $p \geq 2$ и p_α, определяемыми условиями

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{|\alpha|-1}{m-1}\frac{1}{p} + \frac{m-|\alpha|}{m-1}\frac{1}{q_1} \quad \text{для} \quad 1 < |\alpha| \leq m, \tag{12}$$

$$p_\alpha = q \quad \text{для} \quad |\alpha| = 1, \qquad p_0 < \frac{nq}{n-q}, \tag{13}$$

и q, q_1, удовлетворяющими неравенству

$$mp < q_1 < q < n. \tag{14}$$

Будем говорить, что функция $u(x) \in W_p^m(D) \cap W_q^1(D)$ является решением задачи (7), (9), если выполнено включение (9) и для произвольной функции $\varphi(x) \in \mathring{W}_p^m(D) \cap \mathring{W}_q^1(D)$ справедливо интегральное тождество

$$\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \int_D A_\alpha(x, u(x), \ldots, D^m u(x)) D^\alpha \varphi(x)\, dx = 0. \tag{15}$$

Используя неравенство Ниренберга–Гальярдо, просто проверить, что в сформулированных условиях на функции $A_\alpha(x, \xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(m)})$, $u(x)$, $\varphi(x)$ интеграл в левой части (15) конечен. Существование решения задачи (7), (9) просто следует из теории монотонных операторов.

Продолжим решение $u(x)$ на Ω, полагая $u(x) = k$ для $x \in F$. Тогда справедливо включение $u(x) \in \mathring{W}_p^m(D) \cap \mathring{W}_q^1(D)$. Следующий результат доказан в [5].

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* A_1), A_2), (1) *и* $u(x)$ — *решение задачи* (7), (9). *Тогда существует постоянная* M, *зависящая лишь от* $n, k, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$ *такая, что справедлива оценка*

$$\operatorname{ess\,sup}\{|u(x)|,\ x \in D\} \le M. \tag{16}$$

Будем доказывать поточечную оценку решения $u(x)$ в терминах некоторой емкости множества F, связанной с рассматриваемым классом уравнений. Определим емкость $C_{p,q}^{m,1}(F)$ множеств F равенством

$$C_{p,q}^{m,1}(F) = \inf \int_{R^n} \{|D^m \varphi(x)|^p + |D^1 \varphi(x)|^q\}\, dx,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$, равным единице на F.

Вначале будет оценена норма $u(x)$ в терминах введенной емкости, а в п. 3 будет доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существуют положительные постоянные* K_1, a_1, *зависящие только от* $n, k, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$, *такие, что справедливо неравенство*

$$\sum_{1 \le |\alpha| \le m} \int_D |D^\alpha u(x)|^{p_\alpha} dx \le K_1 |k| (1 + |k|)^{a_1} C_{p,q}^{m,1}(F). \tag{17}$$

Основным результатом статьи является следующая теорема, доказываемая в п. 5.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существуют положительные постоянные* $K_2, a_2, \delta_1, \delta_2$, *зависящие только от* $n, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$, *такие, что для* $8d \le r \le R$ *справедлива оценка*

$$\operatorname{ess\,sup}\{|u(x)|,\ x \in D \setminus B(r)\} \le$$
$$\le K_2 (1 + |k|)^{a_2} \left\{ \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{1/(q-1)} + \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{\delta_1} r^{\delta_2} \right\}. \tag{18}$$

3. Оценки нормы решения. Определим вспомогательную функцию $v(x)$ как решение граничной задачи

$$(-1)^m \sum_{|\alpha| = m} D^\alpha (|D^\alpha v|^{p-2} D^\alpha v) -$$
$$- \sum_{|\alpha| = 1} D^\alpha (|D^\alpha v|^{q-2} D^\alpha v) = 0, \quad x \in D, \tag{19}$$

$$v(x) - f(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(D) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(D), \tag{20}$$

где $f(x)$ — та же функция, что и в (5). Просто проверяется оценка

$$\int_D \{|D^m v(x)|^p + |D^1 v(x)|^q\}\, dx \le C_1 C_{p,q}^{m,1}(F). \tag{21}$$

Здесь и в дальнейшем через C_j, $j = 1, 2, \ldots$, обозначаем постоянные, зависящие лишь от $n, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$. Из [5] следует оценка

$$\operatorname{ess\,sup}\{|v(x)|,\ x\in D\}\le M_1 \tag{22}$$

с постоянной M_1, зависящей лишь от n, m, q, q_1.

Лемма 1. *Существует постоянная* K_3, *зависящая лишь от* n, m, p, q, *такая, что справедливо неравенство*

$$\sum_{1<|\alpha|<m}\int_D \{|D^\alpha v(x)|^{p_\alpha}+|D^\alpha v(x)|^{mp/|\alpha|}\}\,dx\le K_3\,C^{m,1}_{p,q}(F) \tag{23}$$

с показателями p_α, *определенными равенством* (12).

Оценка (23) следует из (21) и неравенства Ниренберга–Гальярдо [7].

Доказательство теоремы 2. Подставим в интегральное тождество (15) пробную функцию

$$\varphi(x)=u(x)-k|v(x)|^{q-1}v(x). \tag{24}$$

Просто проверяется оценка

$$|D^\alpha\{|v(x)|^{q-1}v(x)\}|\le$$

$$\le C_2\sum_{1\le|\gamma|\le|\alpha|}|v(x)|^{q-|\alpha|/|\gamma|}|D^\gamma v(x)|^{|\alpha|/|\gamma|}.$$

Используя эту оценку, условие A_2 и неравенство Юнга, из (15) с функцией $\varphi(x)$, определенной в (24), получаем

$$\int_D\left\{\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u(x)|^p+\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u(x)|^q\right\}dx\le$$

$$\le C_3|k|(1+|k|)^{q-1}\left\{\int_D\sum_{1<|\beta|<m}|D^\beta u|^{p_\beta}|v(x)|^q\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_D\left[\sum_{1\le|\alpha|\le m}\sum_{1\le|\gamma|\le|\alpha|}|v(x)|^{q-|\alpha|p_\alpha/|\gamma|}|D^\gamma v(x)|^{|\alpha|p_\alpha/|\gamma|}+|v(x)|^q\right]dx\right\}. \tag{25}$$

Из определения p_α в (12) следует неравенство

$$|\gamma|p_\gamma>|\alpha|p_\alpha\quad\text{для } 1\le|\gamma|<|\alpha|\le m. \tag{26}$$

Оценим второй интеграл в правой части (24), используя неравенство Юнга, Пуанкаре и оценки (21)–(23):

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m}\sum_{1\le|\gamma|\le|\alpha|}\int_D\left(|v|^{q-|\alpha|p_\alpha/|\gamma|}|D^\gamma v|^{|\alpha|p_\alpha/|\gamma|}+|v|^q\right)dx\le$$

$$\le C_4\sum_{1\le|\gamma|\le m}\int_D\left(|v|^{q-p_\alpha}|D^\gamma v|^{p_\gamma}+|v|^q\right)dx\le$$

$$\le C_5\sum_{1\le|\gamma|\le m}\int_D|D^\gamma v|^{p_\gamma}dx\le C_6\,C^{m,1}_{p,q}(F). \tag{27}$$

Теперь оценим первый интеграл в правой части (25). Пусть $|\beta|=j$, $1<j<m$, и представим β в виде $\beta=\beta'+\beta''$, где $|\beta'|=j-1$, $|\beta''|=1$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_D |D^\beta u|^{p_\beta} |v(x)|^q dx =$$
$$= \int_D |D^\beta u|^{p_\beta - 2} D^\beta u D^{\beta' + \beta''} u |v|^q dx =$$
$$= -\int_D \{(p_\beta - 1) |D^\beta u|^{p_\beta - 2} D^{\beta + \beta''} u D^{\beta'} u |v|^q +$$
$$+ q D^\beta u |D^\beta u|^{p_\beta - 2} D^{\beta'} u D^{\beta''} v |v(x)|^{q-2} v\} \, dx. \tag{28}$$

Используя неравенство Юнга с ε, оценим слагаемые правой части (28). Возможность применения неравенства Юнга следует из равенств

$$\frac{p_\alpha - 2}{p_\alpha} + \frac{1}{p_{\alpha+\gamma}} + \frac{1}{\tilde{p}_\beta} = 1,$$
$$\frac{p_\alpha - 1}{p_\alpha} + \frac{1}{\tilde{p}_\beta} + \frac{1}{\tilde{p}_\gamma} = 1, \tag{29}$$

справедливых при $2 \le |\alpha| \le m$, $|\beta| = |\alpha| - 1$, $|\gamma| = 1$. В (29) $\tilde{p}_\beta = p_\beta$ для $2 \le |\beta| \le m$, $\tilde{p}_\beta = q_1$ для $|\beta| = 1$. Получаем из (28) оценку

$$I(\beta) \le \varepsilon I(\beta + \beta') + C_6 \varepsilon^{-k_1} \left\{ \tilde{I}(\beta'') + \int_D |v(x)|^{q - q_1} |D^1 v(x)|^{q_1} \, dx \right\}, \tag{30}$$

где

$$I(\beta) = \int_D |D^\beta u|^{p_\beta} |v|^q dx,$$
$$\tilde{I}(\beta'') = \int_D |D^\beta u|^{\tilde{p}_\beta} |v|^q dx. \tag{31}$$

В (30) и далее через k_i, $i = 1, 2, \ldots$, обозначены положительные постоянные, зависящие только от m, p, q, q_1.

Из (30) следует, что для $1 < j < m$ и произвольного положительного δ справедливо неравенство

$$\sum_{|\beta| = j} I(\beta) \le \delta \left[\sum_{|\beta| = j+1} I(\beta) + \sum_{|\beta| = 1} I(\beta) \right] +$$
$$+ C_7 \delta^{-k_j} \int_D \{|D^1 v|^{q_1} |v|^{q - q_1} + |v|^q\} \, dx. \tag{32}$$

Для $j = 2$ неравенство (32) получаем из (30), оценивая $\tilde{I}(\beta'')$ по неравенству Юнга. Для $j > 2$ устанавливаем (32) индукцией по j. Если оценка (32) справедлива при $j \le j_0$, $j_0 \ge 2$, то используем оценку (30) с $j = j_0 + 1$ оцениваем $\tilde{I}(\beta'') = I(\beta'')$ по неравенству (32) с $j = j_0$, $\delta = \varepsilon^{-k_1 + 1}$, используя предположение индукции.

Суммируя неравенства вида (32) по j от 2 до $m - 1$, получаем оценку

$$\sum_{1 < |\beta| < m} I(\beta) \le \delta \left[\sum_{|\beta| = m} I(\beta) + \sum_{|\beta| = 1} I(\beta) \right] +$$

$$+ C_8 \delta^{-k_m} \int_D \{ |D^1 v|^{q_1} |v|^{q-q_1} + |v|^q \} \, dx. \tag{33}$$

Неравенство (17) следует сейчас из оценок (25), (27), (33), леммы 1 и неравенств Юнга и Пуанкаре. Тем самым доказательство теоремы 2 завершено.

Пусть μ, ν — произвольные положительные числа, удовлетворяющие для фиксированного числа $r \in [4d, R]$ неравенствам

$$\operatorname{ess\,sup} \{ |u(x)|, \ x \in \Omega \setminus B(r) \} \le \mu \le M, \quad \nu \le M, \tag{34}$$

где M — постоянная из теоремы 1. Обозначим

$$E_{\pm}(\mu, \nu) = \{ x \in D : \mu < \pm u(x) < \mu + \nu \} \tag{35}$$

и $[f(x)]_+ = \max [f(x), 0]$ для произвольной функции $f(x)$.

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существуют положительные числа* K_4, a, b *зависящие только от* $n, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2$ *и* R, *такие, что* $b \ge q$ *и для произвольного числа* $\sigma \ge b$ *выполнена оценка*

$$\int_{E_{\pm}(\mu, \nu/2)} [\pm u - \mu]_+^{\sigma-1} \{ |D^m u|^p + |D^1 u|^q \} \, dx \le$$

$$\le K_4 (1 + |k|)^a \sigma^{2m} \Big\{ \nu^{\sigma} C_{p,q}^{m,1}(F) + \nu^{\sigma-\beta} \big[C_{p,q}^{m,1}(F) \big]^{1/q} [r^n]^{1-1/q} \Big\}. \tag{36}$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (15) пробную функцию

$$\varphi_{\pm}(x) = \big[\nu^{\sigma} - [\pm u - \mu]_+^{\sigma} \big]_+^{\sigma} - \nu^{\sigma^2} - \Big\{ \big[\nu^{\sigma} - [\pm k - \mu]_+^{\sigma} \big]^{\sigma} - \nu^{\sigma^2} \Big\} v(x), \tag{37}$$

где $v(x)$ — решение задачи (19), (20). Просто проверяется, что определяемая равенством (37) функция $\varphi_{\pm}(x)$ принадлежит пространству $\mathring{W}_p^m(D) \cap \mathring{W}_q^1(D)$. В дальнейшем рассматриваем только случай функции $\varphi_+(x)$, так как для $\varphi_-(x)$ все оценки полностью аналогичны.

Производные первого слагаемого в (37) представим в виде

$$D^{\alpha} [T_1(u)]^{\sigma} = -\sigma^2 [T_1(u)]^{\sigma-1} [T_2(u)]^{\sigma-1} D^{\alpha} u + R_{\alpha}^{(1)}, \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned} T_1(u) &= \big[\nu^{\sigma} - [u - \mu]_+^{\sigma} \big]_+, \\ T_2(u) &= [u - \mu]_+ \end{aligned} \tag{39}$$

и $R_{\alpha}^{(1)} \equiv 0$ при $|\alpha| = 1$, и при $2 \le |\alpha| \le m$ выполнена оценка

$$|R_{\alpha}^{(1)}| \le C_9 \sigma^{2|\alpha|} \sum_{j=1}^{|\alpha|} \sum_{1 \le |\gamma| < |\alpha|} [T_1(u)]^{\sigma-j} [T_2(u)]^{\sigma j - |\alpha|/|\gamma|} |D^{\gamma} u|^{|\alpha|/|\gamma|}. \tag{40}$$

Подставляя функцию $\varphi_+(x)$ в интегральное тождество (15) и оценивая стандартным образом, получаем неравенство

$$\int_D [T_1(u)]^{\sigma-1} [T_2(u)]^{\sigma-1} \Big\{ \sum_{|\alpha|=m} |D^{\alpha} u|^p + \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} u|^q \Big\} dx \le$$

$$\leq C_{10} \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \int_D \left[\sum_{1 \leq |\beta| \leq m} |D^\beta u|^{p_\beta} + 1 \right]^{(p_\alpha - 1)/p_\alpha} \times$$

$$\times \left\{ \nu^{\sigma^2} |D^\alpha v| + \sigma^{2|\alpha|} \sum_{j=1}^{|\alpha|} \sum_{1 \leq |\gamma| < |\alpha|} [T_1(u)]^{\sigma - j} [T_2(u)]^{\sigma j - |\alpha|/|\gamma|} |D^\gamma u|^{|\alpha|/|\gamma|} \right\} dx. \quad (41)$$

Перейдем к оценке различных слагаемых правой части (41). Из неравенств (17), (21), (23) имеем

$$\int_D \left[\sum_{1 \leq |\beta| \leq m} |D^\beta u|^{p_\beta} \right]^{(p_\alpha - 1)/p_\alpha} |D^\alpha v| dx \leq$$

$$\leq C_{11} (1 + |k|)^{(a_1 + 1)(p_\alpha - 1)/p_\alpha} C_{p,q}^{m,1}(F). \quad (42)$$

Используя неравенства Гельдера и (21), (23) при $1 \leq |\alpha| \leq m$ получаем оценку

$$\int_D |D^\alpha v| dx \leq C_{12} \left[C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^{1/p_\alpha} [r^n]^{1 - 1/p_\alpha}. \quad (43)$$

Из (17), (26) и неравенства Гельдера следует

$$\int_D [T_2(u)]^{\sigma - j} [T_1(u)]^{\sigma j - |\alpha|/|\gamma|} \times$$

$$\times \left[\sum_{1 \leq |\beta| \leq m} |D^\beta u|^{p_\beta} \right]^{(p_\alpha - 1)/p_\alpha} |D^\gamma u|^{|\alpha|/|\gamma|} dx \leq$$

$$\leq C_{13} \nu^{\sigma 2 - |\alpha|/|\gamma|} r^n \left\{ (1 + |k|)^{1 + a_1} r^{-n} C_{p,q}^{m,1}(F) \right\}^{(p_\alpha - 1)/p_\alpha + |\alpha|/|\gamma| p_\gamma}. \quad (44)$$

Из (41)–(44) и неравенства Юнга получаем оценку

$$\int_D [T_1(u)]^{\sigma - 1} [T_2(u)]^{\sigma - 1} \left\{ \sum_{|\alpha| = m} |D^\alpha u|^p + \sum_{|\alpha| = 1} |D^\alpha u|^q \right\} dx \leq$$

$$\leq C_{14} (1 + |k|)^{a_3} \sigma^{2m} \left\{ \nu^{\sigma^2} C_{p,q}^{m,1}(F) + \nu^{\sigma^2 - b} \left[C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^{1/q} r^{n(1 - 1/q)} \right\} \quad (45)$$

с некоторыми положительными постоянными a, b. Принимая во внимание, что

$$T_2(u) \geq \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^\sigma \right] \nu^\sigma \quad \text{для} \quad x \in E_+\left(\mu, \frac{\nu}{2} \right),$$

из (45) получаем неравенство (36), и следовательно, лемма 2 доказана.

4. Итерационное неравенство для $m_j - m(r)$. Обозначим

$$m(r) = \operatorname{ess\,sup} \{ |u(x)|, \ x \in D \setminus B(r) \}, \quad (46)$$

где $u(x)$ — решение задачи (7), (9). Пусть r — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $4d \leq r \leq R$. Выберем последовательность

$$r_j = \frac{r}{4}(1 + 2^{-j}), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

и неотрицательные функции $\psi_j(x)$ из пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$, равные единице вне шара $B_j = B(r_j)$ и нулю в B_{j+1}. Можем предполагать, что с некоторой, зависящей лишь от n, m, постоянной C_0 выполнены неравенства

$$|D^\alpha \psi_j(x)| \le [2^j C_0 r^{-1}]^{|\alpha|} \quad \text{для} \quad 0 \le |\alpha| \le m. \tag{47}$$

Обозначим $m_j = \operatorname{ess\,sup}\{|u(x)|,\ x \in D \setminus B_j\}$.

При доказательстве оценки для $m_j - m(r)$ будет использована следующая лемма, доказательство которой полностью аналогично доказательству леммы 1.3 из гл. 8, в [6].

Лемма 3. *Предположим, что для ограниченной функции* $g(x) \in \mathring{W}_q^1(\Omega)$, *неотрицательной функции* $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$ *и положительного числа* λ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega |g(x)|^{p-1} |D^1 g(x)|^q \varphi^\tau(x)\,dx \le A[\rho+\tau]^B \int\limits_\Omega |g(x)|^{p-\lambda} \varphi^{\tau-q}(x)\,dx \tag{48}$$

при произвольных $\rho \ge \lambda$, $\tau \ge q$ *с положительными числами* A, B, *не зависящими от* ρ, τ. Тогда справедлива оценка

$$\operatorname{ess\,sup}\left\{|g(x)|^{\overline{q}+n(q+\lambda-1)/q},\ x \in \Omega_1\right\} \le$$

$$\le C\left\{A + \operatorname{ess\,sup}\left\{|g(x)|^{q+\lambda-1},\ x \in \Omega_2\right\} L^q\right\}^{n/q} \int\limits_\Omega |g|^{\overline{q}} |\varphi|^{\overline{q}}\,dx, \tag{49}$$

где $\Omega_1 = \{x \in \Omega,\ \varphi \ge 1\}$, Ω_2 — *носитель функции* $\varphi(x)$,

$$L = \max\left\{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|,\ x \in \overline{\Omega}\right\},$$

$\overline{q}$ — *произвольное число, удовлетворяющее неравенству* $\overline{q} \ge 1$, C — *постоянная, зависящая только от* $n, q, \overline{q}, B, \lambda, R$.

Основная в дальнейшем оценка для $m_j - m(r)$ дана в следующей лемме.

Лемма 4. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Существуют положительные числа* K_5, λ, *зависящие только от* $n, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$, *такие, что для* $j = 1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$[m_j - m(r)]^{b+q+n(q+\overline{\lambda}-1)/q} \le$$

$$\le K_5(1+|k|)^a r^q \left\{[m_{j+1} - m(r)]^{q-1+\overline{\lambda}}\left(\frac{2^j}{r}\right)^q + 1\right\}^{n/q} \times$$

$$\times \left\{[m_{j+1} - m(r)]^{b+1} C_{p,q}^{m,1}(F) + [m_{j+1} - m(r)]\,[C_{p,q}^{m,1}(F)]^{1/q} [r^n]^{1-1/q}\right\} \tag{50}$$

с постоянными a, b, *определенными в лемме* 2.

Доказательство. Можем считать, что

$$m_j - m(r) = \operatorname{ess\,sup}\{[u(x) - m(r)]_+,\ x \in D \setminus B_j\}. \tag{51}$$

В противном случае в дальнейших рассуждениях нужно только изменить $u(x)$ на $-u(x)$.

Подставим в интегральное тождество (15) пробную функцию

$$\varphi_j(x) = [u(x) - m(r)]_+^\rho \psi_j^\tau(x) \tag{52}$$

с $\rho \ge q+b$, $\tau \ge q+b$ где b — число, определенное в лемме 2. Производные функции $\varphi_j(x)$ можем представить в виде

$$D^{\alpha}\varphi_j(x) = \rho[u(x)-m(r)]_+^{\rho-1} D^{\alpha}u\psi_j^{\tau}(x)+R_{\alpha}^{(2)}, \tag{53}$$

где $R_{\alpha}^{(2)}$ удовлетворяет оценке

$$|R_{\alpha}^{(2)}| \le C_{15}(\rho+\tau)^{|\alpha|}\left\{\sum_{1\le|\beta|<\alpha}[u(x)-m(r)]_+^{\rho-|\alpha|/|\beta|}|D^{\beta}u|^{|\alpha|/|\beta|}\psi_j^{\tau}(x)+\right.$$
$$\left.+[u(x)-m(r)]_+^{\rho}\left(\frac{2^j}{r}\right)^{|\alpha|}\psi_j^{\tau-|\alpha|}(x)\right\}. \tag{54}$$

Используя условие A_2), неравенство Юнга и (47), (54), получаем из (15) с $\varphi(x)=\varphi_j(x)$ следующую оценку:

$$\int_D [m_j-m(r)]_+^{\rho-1}\left\{|D^m u|^p+|D^1 u|^q\right\}\psi_j^{\tau}(x)\,dx \le$$
$$\le C_{16}(\rho+\tau)^q\int_D\left\{[u-m(r)]_+^{\rho-1}\sum_{1<|\alpha|<m}|D^{\alpha}u|^{p_\alpha}\psi_j^{\tau}(x)+\right.$$
$$\left.+[u-m(r)]_+^{\rho-1+q}\left(\frac{2^j}{r}\right)^q\psi_j^{\tau-q}+[u-m(r)]_+^{\rho-\lambda_1}\psi_j^{\tau}(x)\right\}dx. \tag{55}$$

Здесь и дальше λ_i, $i=1,2,\ldots,$ — положительные числа, зависящие только от m,p,q,q_1. Предполагаем также, что $\rho\ge\lambda_i$, $i=1,2,\ldots$.

Оценим член правой части (55) с производными $u(x)$. Обозначим

$$I_j(\alpha) = \int_D [u-m(r)]_+^{\rho-1}|D^{\alpha}u|^{p_\alpha}\psi_j^{\tau}(x)\,dx. \tag{56}$$

Пусть $|\alpha|\ge 2$ и представим α в виде $\alpha=\alpha'+\alpha''$, где $|\alpha'|=1$, $|\alpha''|=|\alpha|-1$. Используя интегрирование по частям, получаем

$$I_j(\alpha) = -\int_D D^{\alpha''}u\left\{(\rho-1)|D^{\alpha}u|^{p_\alpha-2}D^{\alpha}uD^{\alpha'}u[u-m(r)]_+^{\rho-2}\psi_j^{\tau}(x)+\right.$$
$$+(p_\alpha-1)|D^{\alpha}u|^{p_\alpha-2}D^{\alpha+\alpha'}u[u-m(r)]_+^{\rho-1}\psi_j^{\tau}(x)+$$
$$\left.+\tau[u-m(r)]^{\rho-1}+\tau|D^{\alpha}u|^{p_\alpha-2}D^{\alpha}uD^{\alpha'}\psi_j\psi_j^{\tau-1}(x)\right\}dx. \tag{57}$$

Оценим слагаемые правой части (57) по неравенству Юнга с положительным ε. Возможность применения неравенства Юнга следует из (29). Получаем оценку

$$I_j(\alpha) = \varepsilon I_j(\alpha+\alpha')+C_{17}\varepsilon^{-k|\alpha|}I_j(\alpha'')+$$
$$+C_{17}(\tau+\rho)^{q_1}\int_D\left\{[u-m(r)]_+^{\rho-1+q_1}|D^{\alpha'}u|^{q_1}\psi_j^{\tau}(x)+\right.$$
$$\left.+[u-m(r)]_+^{\rho-1}\psi_j^{\tau-q_1}(x)\left(\frac{2^j}{r}\right)^{q_1}\right\}dx. \tag{58}$$

Отсюда, используя индукцию по $|\alpha|$, устанавливаем следующую оценку с произвольным положительным δ:

$$\sum_{|\alpha|=i} I_j(\alpha) \le \delta\left\{\sum_{|\alpha|=i+1} I_j(\alpha) + \sum_{|\alpha|=1} I_j(\alpha)\right\} +$$

$$+ C_{18}(\tau+\rho)^q \delta^{-k(i)} \int_D \left\{[u-m(r)]_+^{\rho+q-1}\psi_j^{\tau-q}(x)\left(\frac{2^j}{r}\right)^q + \right.$$

$$\left. + [u-m(r)]_+^{\rho-\lambda_i}\psi_j^{\tau}(x)\right\} dx \tag{59}$$

с некоторыми положительными числами λ_i, $k(i)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Суммируя последнее неравенство по i от 2 до $m-1$, получаем оценку

$$\sum_{2\le|\alpha|\le m-1} I_j(\alpha) \le \delta\left\{\sum_{|\alpha|=m} I_j(\alpha) + \sum_{|\alpha|=1} I_j(\alpha)\right\} +$$

$$+ C_{19}(\tau+\rho)^q \delta^{-k(m)} \int_D \left\{[u-m(r)]_+^{\rho+q-1}|\psi_i|^{\tau-q}\left(\frac{2^j}{r}\right)^q + \right.$$

$$\left. + [u-m(r)]_+^{\rho-\lambda_m}\psi_j^{\tau}(x)\right\} dx. \tag{60}$$

Из неравенств (55), (60) при соответствующем выборе δ имеем

$$\int_D [u-m(r)]_+^{\rho-1}\{|D^m u|^p + |D^1 u|^q\}\psi_j^{\tau}(x)\,dx \le$$

$$\le C_{20}(\tau+\rho)^B \int_D \left\{[u-m(r)]_+^{\rho+q-1}\psi_j^{\tau-q}(x)\left(\frac{2^j}{r}\right)^q + [u-m(r)]_+^{\rho-\overline{\lambda}}\psi_j^{\tau}(x)\right\} dx \tag{61}$$

с $B = q(k(m)+1)$, $\overline{\lambda} = \max\{\lambda_i, \lambda_m, q+b\}$.

Функцию $[u-m(r)]_+$ на носителе $\psi_j(x)$ можем оценить сверху постоянной $m_{j+1} - m(r)$, что следует из выборов m_{j+1}, $\psi_j(x)$. Следовательно, из (61) получаем неравенство

$$\int_D [u(x)-m(r)]_+^{\rho-1}|D^1 u|^q \psi_j^{\tau}(x)\,dx \le$$

$$\le C_{21}(\rho+\tau)^B \left\{[m_{j+1}-m(r)]^{q-1+\overline{\lambda}}\left(\frac{2^j}{r}\right)^q + 1\right\} \int_D [u(x)-m(r)]_+^{\rho-\overline{\lambda}}\psi_j^{\tau-q}(x)\,dx, \tag{62}$$

справедливое для всех ρ, τ при $\rho \ge \overline{\lambda}$, $\tau \ge q$.

Применяя лемму 3 при $g(x) = [u(x) - m(r)]_+$, устанавливаем оценку

$$[m_j - m(r)]^{b+q+n(q+\overline{\lambda}-1)/q} \le$$

$$\le C_{22}\left\{[m_{j+1}-m(r)]^{q-1+\overline{\lambda}}\left(\frac{2^j}{r}\right)^q + 1\right\}^{n/q} \int_D [u(x)-m(r)]_+^{b+q}\psi_j^{b+q}(x)\,dx. \tag{63}$$

Последний интеграл оценим, используя неравенство Пуанкаре и лемму 2. Получаем при $\nu = 2[m_{j+1} - m(r)]$:

$$\int_D [u(x) - m(r)]_+^{b+q} \psi_j^{b+q}(x)\,dx \le$$

$$\le \int_D \left[\min\left\{[u(x) - m(r)]_+, \frac{\nu}{2}\right\}\right]^{b+q} dx \le$$

$$\le C_{23} r^q \int_{E\left(m(r), \frac{\nu}{2}\right)} [u(x) - m(r)]_+^b |D^1 u|^q\,dx \le$$

$$\le C_{24} r^q (1 + |k|)^a \times$$

$$\times \left\{[m_{j+1} - m(r)]^{b+1} C_{p,q}^{m,1}(F) + [m_{j+1} - m(r)]\left[C_{p,q}^{m,1}(F)\right]^{1/q} [r^n]^{1-1/q}\right\}. \qquad (64)$$

Теперь неравенство (50) следует из оценок (63), (64), и следовательно, лемма 4 доказана.

5. Доказательство поточечной оценки. Вначале докажем оценку для $m(r/2) - m(r)$, используя оценку (5) и следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $\{y_j\}$ *— ограниченная последовательность, удовлетворяющая неравенству*

$$0 \le y_j \le \left[A_1 y_{j+1}^{\alpha_1} + A_2 y_{j+1}^{\alpha_2}\right] A_3^j, \quad j = 1, 2, \ldots, \qquad (65)$$

с $A_3 \ge 1$, *положительными числами* A_1, A_2 *и числами* α_1, α_2 *из интервала* (0, 1). *Тогда справедлива оценка*

$$y_1 \le A_4 \left\{[2A_1]^{1/(1-\alpha_1)} + [2A_2]^{1/(1-\alpha_2)}\right\} \qquad (66)$$

с постоянной A_4, *зависящей лишь от* α_1, α_2, A_3.

Доказательство. Для произвольного $j = 1, 2, \ldots$ можно определить неотрицательные целые числа $z_1(j)$, $z_2(j)$ так, чтобы $z_1(j) + z_2(j) = j - 1$ и при произвольном $J = 1, 2, \ldots$ выполнялась оценка

$$y_1 \le \left[(2A_1)^{1/(1-\alpha_1)} + (2A_2)^{1/(1-\alpha_2)}\right]^{1 - \alpha_1^{z_1(J)} \alpha_2^{z_2(J)}} \times$$

$$\times A_3^{\sum_{j=2}^{J} (j-1) \alpha_1^{z_1(j-1)} \alpha_2^{z_2(j-1)}} y_J^{\alpha_1^{z_1(J)} \alpha_2^{z_2(J)}}. \qquad (67)$$

Доказательство оценки (67) проведем индукцией по J. Для $J = 2$ рассмотрим две возможности:

$$\begin{aligned} &1) \qquad A_1 y_2^{\alpha_1} \le A_2 y_2^{\alpha_2}; \\ &2) \qquad A_1 y_2^{\alpha_1} > A_2 y_2^{\alpha_2}. \end{aligned} \qquad (68)$$

Определим $z_1(2) = 0$, $z_2(2) = 1$, если выполнено первое неравенство в (68), и $z_1(2) = 1$, $z_2(2) = 0$ в противоположном случае. Непосредственно из (65), (68) следует неравенство (67) при $J = 2$.

Предположим, что неравенство (67) справедливо при $J \le J_0$ при соответствующем выборе $z_1(j)$, $z_2(j)$ для $2 \le j \le J_0$ и докажем (67) при $J = J_0 + 1$. Рассмотрим две возможности:

$$
\begin{aligned}
&1) \qquad A_1 y_{J_0+1}^{\alpha_1} \le A_2 y_{J_0+1}^{\alpha_2}; \\
&2) \qquad A_1 y_{J_0+1}^{\alpha_1} > A_2 y_{J_0+1}^{\alpha_2}.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Если выполнено первое неравенство в (69), определим $z_1(J_0+1)=z_1(J_0)$, $z_2(J_0+1)=z_2(J_0)+1$. В противном случае определяем $z_1(J_0+1)=z_1(J_0)+$ $+1$, $z_2(J_0+1)=z_2(J_0)$. Проверим неравенство (67) при $J=J_0+1$, например, если выполнено первое неравенство в (69). В этом случае из неравенства (65) при $j=J_0$ имеем

$$
y_{J_0} \le 2A_2 y_{J_0+1}^{\alpha_2} A_3^{J_0} \le \left[(2A_1)^{1/(1-\alpha_1)}+(2A_2)^{1/(1-\alpha_2)}\right]^{1-\alpha_2} y_{J_0+1}^{\alpha_2} A_3^{J_0}.
$$

Используя оценку (67) с $J=J_0$, получаем неравенство

$$
y_1 \le \left[(2A_1)^{1/(1-\alpha_1)}+(2A_2)^{1/(1-\alpha_2)}\right]^{1-\alpha_1^{z_1(J_0)}\alpha_2^{z_2(J_0)}+(1-\alpha_2)\alpha_1^{z_1(J_0)}\alpha_2^{z_2(J_0)}} \times
$$
$$
\times A_3^{\sum_{j=2}^{J_0}(j-1)\alpha_1^{z_1(j-1)}\alpha_2^{z_2(j-1)}+J_0\alpha_1^{z_1(J_0)}\alpha_2^{z_2(J_0)}} y_{J_0+1}^{\alpha_1^{z_1(J_0)}\alpha_2^{z_2(J_0)+1}},
$$

совпадающее с (67) при $J=J_0+1$. Следовательно, неравенство (67) доказано.

Используя ограниченность последовательности $\{y_j\}$, получаем из (67) оценку (66) при $j\to\infty$, что доказывает лемму 5.

Далее будем рассматривать две возможности:

$$
\begin{aligned}
&1) \qquad \left(\frac{2}{r}\right)^q [m_2-m(r)]^{q-1+\overline{\lambda}} \le 1; \\
&2) \qquad \left(\frac{2}{r}\right)^q [m_2-m(r)]^{q-1+\overline{\lambda}} > 1,
\end{aligned}
\tag{70}
$$

где $\overline{\lambda}$ определено в лемме 4.

Лемма 6. *Предположим, что выполнены первое неравенство в* (70) *и все условия теоремы* 1. *Тогда существуют положительные постоянные* K_6, $a(1)$, $b(1)$, $c(1)$, *зависящие только от* $m, n, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$, *такие, что справедливо неравенство*

$$
m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r) \le K_6(1+|k|)^{a(1)}\left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}}\right]^{b(1)} r^{c(1)}. \tag{71}
$$

Доказательство. Заметим, что из определения m_j следует $m(r/2)\le m_1$. Если справедливо первое неравенство в (70), то из леммы 4 получаем

$$
m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r) \le \left[2^{n/q}K_5(1+|k|)^a\right]^\theta \left\{\left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}}\right]^\theta \times \right.
$$
$$
\left. \times\, r^{[n+(b+1)q/(q-1+\overline{\lambda})]\theta} + \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}}\right]^{\theta/q} r^{[nq+q-1+q/(q-1+\overline{\lambda})]\theta}\right\}, \tag{72}
$$

где

$$
\theta = \left[b+q+\frac{n}{q}(q+\overline{\lambda}-1)\right]^{-1}.
$$

Принимая во внимание, что справедливы неравенства

$$C_{p,q}^{m,1}(F) \le C^{(0)} r^{n-q}, \quad r \le R, \tag{73}$$

с постоянной $C^{(0)}$, зависящей только от n, m, p, q, из (72) получаем оценку (71).

Лемма 7. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1 *и второе неравенство в* (70). *Тогда существуют положительные постоянные* K_7, $a(2)$, $b(2)$, $c(2)$, *зависящие только от* $n, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$, *такие, что справедлива оценка*

$$m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) \le K_7 (1+|k|)^{a(2)} \left\{ \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{1/(q-1)} + \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{b(2)} r^{c(2)} \right\}. \tag{74}$$

Доказательство. Отметим, что в условиях леммы для всех $j = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство

$$\left(\frac{2^j}{r}\right)^q [m_{j+1} - m(r)]^{q-1+\overline{\lambda}} > 1. \tag{75}$$

В самом деле, левая часть (75) является возрастающей функцией j и при $j=1$ неравенство (75) совпадает со вторым неравенством в (70).

Используя (75) и лемму 4, при $j = 1, 2, \ldots$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} m_j - m(r) &= 2^{jn\theta} [2^{n/q} K_5 (1+|k|)^a]^\theta \times \\ &\times \Big\{ [m_{j+1} - m(r)]^{[b+1+n(q-1+\overline{\lambda})/q]\theta} \left[r^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^\theta + \\ &+ [m_{j+1} - m(r)]^{[1+n(q-1+\overline{\lambda})/q]\theta} \left[r^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^{\theta/n} r^{(q-1)\theta} \Big\}, \end{aligned} \tag{76}$$

где θ — то же число, что и в оценке (72).

Так как последовательность $m_j - m(r)$ ограничена, то, применяя лемму 5, оцениваем

$$\begin{aligned} m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) &\le m_1 - m(r) \le \\ &\le C_{25} (1+|k|)^{a/(q-1)} \times \\ &\times \left\{ \left[r^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^{1/(q-1)} + \left(\left[r^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^{1/n} r^{q-1} \right)^{1/(b+q-1)} \right\}, \end{aligned} \tag{77}$$

что и доказывает утверждение леммы 7.

Из лемм 6, 7 получаем, что при выполнении каждого из неравенств в (70) справедлива оценка

$$m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) \le \overline{K} (1+|k|)^{\overline{a}} \left\{ \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{1/(q-1)} + \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{\overline{b}} r^{\overline{c}} \right\} \tag{78}$$

с положительными $\overline{K}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, зависящими лишь от $n, m, p, q, q_1, \nu_1, \nu_2, R$.

Доказательство *теоремы* 3. Можем предполагать, что постоянная $\overline{c}$ в (78) настолько мала, что справедливо неравенство

$$(n-q)\overline{b} - \overline{c} > 0. \tag{79}$$

Обозначим через I_0 целую часть числа $\log_2(R/4d)$. Используя (78) при $1 \le i \le I_0$ и принимая во внимание, что $m(r) = 0$, получаем

$$m(2^{-i}R) = \sum_{j=1}^{i} \{m(2^{-j}R) - m(2^{1-j}R)\} \le$$

$$\le \overline{K}(1+|k|)^{\overline{a}} \Bigg\{ \left[R^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^{1/(q-1)} \sum_{j=1}^{i} 2^{((j-1)n-q)/(q-1)} +$$

$$+ \left[R^{q-n} C_{p,q}^{m,1}(F) \right]^{\overline{b}} R^{\overline{c}} \sum_{j=1}^{i} 2^{(j-1)[\overline{b}(n-q)-\overline{c}]} \Bigg\} \le$$

$$\le C_{26}(1+|k|)^{\overline{a}} \left\{ \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{(2^{-i}R)^{n-q}} \right]^{1/(q-1)} + \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{(2^{-i}R)^{n-q}} \right]^{\overline{b}} (2^{-i}R)^{\overline{c}} \right\}. \tag{80}$$

Далее для r из интервала $[8d, R]$ определим целое число $i(r)$ так, чтобы выполнялось неравенство $2^{-i(r)}R \le r < 2^{1-i(r)}R$. Тогда из (80) получаем оценку

$$\operatorname{ess\,sup} \{ |u(x)| : x \in \Omega \backslash B(r) \} \le m(2^{-i(r)}R) \le$$

$$\le C_{27}(1+|k|)^{\overline{a}} \left\{ \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{1/(q-1)} + \left[\frac{C_{p,q}^{m,1}(F)}{r^{n-q}} \right]^{\overline{b}} r^{\overline{c}} \right\},$$

из которого следует утверждение теоремы 3.

1. *Скрыпник И. В.* Квазилинейная задача Дирихле в областях с мелкозернистой границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 2. – С. 21–26.
2. *Skrypnik I. V.* Nonlinear elliptic boundary value problems. – Leipzig: Teubner Verlag, 1986. – 242 p.
3. *Dal Maso G., Skrypnik I. V.* Asymptotic behaviour of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains. – Trieste, 1994. – 49 p. – (Preprint SISSA).
4. *Скрыпник И. В.* Усреднение нелинейных задач Дирихле в перфорированных областях // Мат. сб. – 1996. – **187**, № 8. – С. 125–157.
5. *Скрыпник И. В.* О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 6. – С. 1104–1119.
6. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
7. *Gagliardo E.* Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili // Ric. Mat. – 1959. – **8**. – P. 24–51.
8. *Nirenberg L.* On elleptic partial differential equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1959. – **3**, № 13. – P. 115–162.

Получено 31.10.96