УДК 517.925.3

Н. А. Перестюк (Нац. ун-т, Киев),
О. С. Черникова (Киев. ин-т сухопут. войск)

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

We present principal results in the theory of stability of pulse differential equations obtained by the mathematicians of the Kiev scientific school of nonlinear mechanics. We also present some results of foreign authors.

Наводяться основні результати з теорії стійкості імпульсних деференціальних рівнянь, які було здобуто Київською науковою школою нелінійної механіки, а також деякі результати закордонних математиків.

В последние 15–20 лет весьма интенсивно развивается теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. К импульсным дифференциальным уравнениям приводят многие задачи нелинейной механики; именно импульсные дифференциальные уравнения позволяют адекватно описывать реальные процессы в системах, подвергающихся мгновенным возмущениям. В становление и развитие теории импульсных дифференциальных уравнений основополагающий вклад внесли представители киевской школы нелинейной механики, деятельность которой связана с именами Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского. Еще в 1937 г. в [1] с помощью метода усреднения исследовались колебания маятника, подвергающегося импульсному воздействию. В дальнейшем идеи [1] были развиты Ю. А. Митропольским, А. М. Самойленко, Н. А. Перестюком в применении к более широкому классу систем, подверженных импульсному воздействию; более широким стал круг исследуемых вопросов (см. обзор [2]). Исследования ученых киевской школы нелинейной механики стимулировали всестороннее систематическое изучение импульсных дифференциальных уравнений во многих других научных коллективах (см. подробнее [3, 4]). Как отдельное направление в теории импульсных дифференциальных уравнений сформировалась теория устойчивости импульсных систем. Фундаментальные результаты, связанные с исследованием устойчивости решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, установлены А. М. Самойленко и Н. А. Перестюком. В [3–12] классическая теория первого и второго методов Ляпунова распространена на случай импульсных систем. Позднее многочисленные результаты по теории устойчивости импульсных систем были установлены и в работах зарубежных специалистов.

Весьма эффективным при изучении устойчивости в системах, подвергающихся импульсному воздействию, оказалось применение метода интегральных многообразий, развитого для разных классов дифференциальных уравнений в работах Ю. А. Митропольского и его учеников (см., например, [13]).

Далее будут приведены результаты, которые, на наш взгляд, отражают современное состояние теории устойчивости систем с импульсным воздействием.

Пусть задана система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \quad t \neq \tau_i(x), \\ \Delta x|_{t=\tau_i(x)} &= I_i(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $f\colon R_+ \times R^n \to R^n$, $I_i\colon R^n \to R^n$, $i = 1, 2, \ldots$, $\tau_i\colon R^n \to (0, \infty)$, $\tau_i(x)$ — поверхности разрыва решений, $\tau_1(x) < \tau_2(x) < \ldots$, $\tau_i(x) \to \infty$ при $i \to \infty$.

Будем предполагать, что для системы (1) выполняются условия существования решений и, кроме того, каждое решение встречает каждую из поверхностей $t = \tau_i(x)$ не более одного раза (т. е. отсутствует „биение" решений о поверхности разрыва). Достаточные условия существования, единственности, неограниченной продолжаемости решений импульсных дифференциальных уравнений, а также условия отсутствия биений можно найти, например, в [3–6, 14–16]. Эти результаты, судя по ссылкам на них, хорошо известны специалистам. Перечисленные свойства решений импульсных дифференциальных уравнений изучались также в [17–20]. В [19] для системы (1), в которой $f \in C[R_+ \times \times R^n, R^n]$, $I_i \in C[R^n, R^n]$, $\tau_i \in C^1[R^n, (0, \infty)]$, τ_i — ограниченные функции ($i = 1, 2, \ldots$), предложен следующий вариант достаточных условий существования решений и отсутствия биений.

Теорема 1 [19]. *Предположим, что:*

1) *для любых* (t_0, x_0) *система*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

имеет решение на $[t_0, \infty]$;

2) $$\left\langle \frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x},\ f(t, x) \right\rangle < 1;$$

3) $$\left\langle \frac{\partial \tau_i}{\partial x}(x + sI_i(x)),\ I_i(x) \right\rangle < 0, \quad 0 \le s \le 1,$$

и

$$\tau_{i+1}(x + I_i(x)) > \tau_i(x).$$

Тогда решение $x(t, t_0, x_0)$ *системы* (1) *существует на* $[t_0, \infty]$ *и встречает каждую из поверхностей* s_i: $t = \tau_i(x)$ *лишь один раз.*

Определения понятий теории устойчивости для импульсных систем требуют уточнений. Это связано с тем, что решения импульсных дифференциальных уравнений являются кусочно-непрерывными функциями, точки разрыва которых зависят от решений. Приведем уточненные определения основных понятий теории устойчивости для системы (1) (см., например, [4–6]).

Пусть $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ — решение системы (1), определенное при $t \ge t_0$; предположим, что $x(t)$ встречает поверхность s_i: $t = \tau_i(x)$ в момент времени τ_i^0, $\tau_i^0 < \tau_{i+1}^0$; $\tau_i^0 \to \infty$ при $i \to \infty$.

***Определение* 1.** *Решение* $x(t)$ *системы* (1) *называется устойчивым, если для произвольных* $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ *и* $t_0 \in R_+$ *существует* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon, \eta)$ *такое, что для любого другого решения* $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ *системы* (1), *определенного при* $t \ge t_0$, *из неравенства* $\| x_0 - y_0 \| < \delta$ *следует, что* $\| x(t) - y(t) \| < \varepsilon$ *при всех* $t \ge t_0$ *таких, что* $\| t - \tau_i^0 \| > \eta$.

***Определение* 2.** *Решение* $x(t)$ *системы* (1) *называется равномерно устойчивым, если* δ *в определении* 1 *не зависит от* t_0.

***Определение* 3.** *Решение* $x(t)$ *системы* (1) *называется притягивающим, если для любых* $\varepsilon > 0, \eta > 0$ *и* $t_0 \in R_+$ *существуют* $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ *и* $T(t_0, \varepsilon, \eta)$ *такие, что из неравенства* $\| x_0 - y_0 \| < \delta_0$ *следует неравенство* $\| x(t) - y(t) \| < \varepsilon$ *при* $t \ge t_0 + T$ *и* $| t - \tau_i^0 | > \eta$ [20].

***Определение* 4.** *Решение* $x(t)$ *системы* (1) *называется равномерно притягивающим, если* δ_0 *и* T *в определении* 3 *не зависит от* t_0.

***Определение* 5.** *Решение* $x(t)$ *системы* (1) *называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и для любого* $t_0 \in R_+$ *существует* $\delta_0 =$

$= \delta_0(t_0)$ *такое, что все решения* $y(t, t_0, y_0)$ $(t_0 \le t < \infty)$, *удовлетворяющие условию* $\| y(t_0) - x(t_0) \| < \delta_0$ *имеют свойство*

$$\lim_{t \to \infty} \| y(t) - x(t) \| = 0.$$

***Определение* 6.** *Решение* $x(t)$ *системы* (1) *называется равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.*

Аналогично уточняются и другие определения „устойчивоподобных" понятий.

В случае, когда $\tau_i(x) = \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots$, т. е. функции $\tau_i(x)$ не зависят от x, определения понятий теории устойчивости для импульсных дифференциальных уравнений не отличаются от соответствующих общеизвестных определений (см., например, [21]).

Прежде чем непосредственно перейти к изложению результатов по теории устойчивости решений импульсных дифференциальных уравнений, укажем некоторые вспомогательные результаты, использовавшиеся практически во всех цитируемых ниже статьях и монографиях. Речь идет об установленных в работах Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, Н. А. Перестюка аналогов для кусочно-непрерывных функций лемм Гронуолла – Беллмана, Бихари, аналога неравенства Важевского для импульсных систем, ряда новых интегральных неравенств для кусочно-непрерывных функций [4–6, 9, 22, 23], а также о дифференциальных и интегральных неравенствах для кусочно-непрерывных функций, полученных в [17, 20].

1. Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Наиболее полно изучены вопросы, связанные с устойчивостью решений линейных систем дифференциальных уравнений с фиксированными моментами импульсного воздействия.

Рассмотрим линейную однородную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \ne t_i,$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = B_i x(t_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $(n \times n)$-мерная матрица $A(t)$ непрерывна на R_+ с точками разрыва первого рода $t = t_i$, $i = 1, 2, \ldots$, t_i — фиксированные моменты времени, $t_i \to +\infty$ при $i \to \infty$, матрицы B_i постоянные.

Пусть $X(t, t_0)$ — матрицант системы (2). Как известно [3–7], матрицант $X(t, t_0)$ имеет вид

$$X(t, t_0) = U(t, t_{j+k})(E + B_{j+k}) \prod_{\nu=k}^{1} U(t_{j+\nu}, t_{j+\nu-1})(E + B_{j+\nu-1})\, U(t_j, t_0),$$
$$t_{j-1} < t_0 \le t_j < t_{j+k} < t \le t_{j+k+1}.$$

Здесь $U(t, \sigma)$ — матрицант системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

Для системы (2) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 [6]. *Для устойчивости решений системы* (2) *необходимо и достаточно, чтобы матрицант* $X(t, t_0)$ *этой системы был ограничен при* $t \ge t_0$; *для асимптотической устойчивости — чтобы матрицант удовлетворял условию*

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t, t_0)\| = 0,$$

а для неустойчивости — чтобы матрицант был неограничен.

Как и в случае обыкновенных линейных однородных систем дифференциальных уравнений, решения системы (2) либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы. Соответственно линейную систему (2) называют обычно устойчивой, асимптотически устойчивой или неустойчивой в зависимости от того, являются ли ее решения устойчивыми, асимптотически устойчивыми или неустойчивыми. Приведем некоторые определения.

***Определение* 7.** *Линейная импульсная дифференциальная система* (2) *называется устойчивой, если для любого положительного числа* ε *и для любого* $t_0 \in R_+$ *существует положительное число* δ *такое, что для любого решения* $x(t)$ *системы* (2) *из неравенства* $\|x(t_0)\| < \delta$ *вытекает неравенство* $\|x(t)\| < \varepsilon$ *при* $t \ge t_0$.

***Определение* 8.** *Система* (2) *называется равномерно устойчивой, если для любого положительного числа* ε *существует положительное число* δ *такое, что при любом* $t_0 \in R_+$ *для любого решения* $x(t)$ *системы* (2) *из неравенства* $\|x(t_0)\| < \delta$ *следует неравенство* $\|x(t)\| < \varepsilon$ *при* $t \ge t_0$.

Эти определения общеизвестны. Определения, приведенные для импульсной системы (2), не отличаются от соответствующих определений для системы $\frac{dx}{dt} = A(t)x$. Для исследования устойчивости импульсных линейных систем дифференциальных уравнений полезны также определения в другой форме [24, 25].

Обозначим через L_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, линейное пространство решений $x(t)$ системы (2), определенных на интервале $[t_k + 0, \infty)$.

***Определение* 9.** *Система* (2) *называется устойчивой, если для любого* k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *существует положительное число* N_k *такое, что для любого решения* $x \in L_k$ *справедливо неравенство*

$$\|x(t)\| \le N_k \|x(t_k + 0)\| \quad \text{при} \quad t \ge t_k + 0. \tag{3}$$

***Определение* 10.** *Система* (2) *называется равномерно устойчивой, если существует положительное число* N *такое, что при любом* $k, k = 0, 1, 2, \ldots$, *для любого решения* $x \in L_k$ *выполняется неравенство*

$$\|x(t)\| \le N \|x(s)\|, \quad t \ge s \ge t_k + 0. \tag{4}$$

***Определение* 11.** *Система* (2) *называется слабо устойчивой (слабо равномерно устойчивой) по отношению к пространству решений* L_k, *если неравенство* (3) *(неравенство* (4)*) справедливо только для решений* $x \in L_k$, *где* k — *фиксированное неотрицательное целое число.*

В [24] показано, что определение 7 адекватно определению 9, а определение 8 — определению 10. Там же установлен следующий факт.

***Предложение* 1.** *Пусть импульсные матрицы* $(E + B_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, *системы* (2) *невырождены. Если система* (1) *слабо устойчива (слабо равномерно устойчива) по отношению к некоторому фиксированному пространству* L_k, *то система уравнений* (2) *устойчива (равномерно устойчива).*

С использованием определений 9 и 10 в [24] установлены следующие оценки фундаментальных матриц устойчивой и равномерно устойчивой систем вида (2).

***Предложение* 2.** *Если система* (2) *устойчива, то ее фундаментальная матрица при* $t \ge s$, $s \in [t_k + 0, t_{k+1}]$, *удовлетворяет неравенству*

$$\| X(t, s) \| \leq N(s), \tag{5}$$

где

$$N(s) = N_k \exp \int_{t_k}^{s} \| A(\theta) \| \, d\theta.$$

Предложение 3. *Если система* (2) *равномерно устойчива, то ее фундаментальная матрица при* $t \geq s \geq t_0$ *удовлетворяет неравенству* $\| X(t, s) \| \leq N$.

Приведенные выше утверждения относительно свойств решений системы (2) имеют довольно общий характер. В [4–7] получены достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости линейных однородных импульсных систем, сформулированные в терминах конкретных свойств матриц $A(t)$ и B_i. В [7] установлен аналог неравенства Важевского для системы (2) и следующий результат.

Теорема 3. *Пусть наибольшее из собственных чисел* $\Lambda(t)$ *матрицы* $(1/2)[A(t) + A^T(t)]$ *удовлетворяет неравенству* $\Lambda(t) \leq \gamma$ *при всех* $t \geq t_0$; *для всех* $i = 1, 2, \ldots$ *наибольшие из собственных чисел* Λ_i^2 *матриц* $(E + B_i^T)(E + B_i)$ *таковы, что* $\Lambda_i^2 \leq \alpha^2$, *и существует предел*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} i(t_0, t) = p$$

(*здесь* $i(t_0, t)$ — *количество точек последовательности* $\{ t_i \}$, *принадлежащих промежутку* $[t_0, t]$). *Тогда если* $\gamma + p \ln \alpha < 0$, *то решения системы уравнений* (2) *асимптотически устойчивы.*

Практически важным остается вопрос об устойчивости системы (2) в случае постоянных матриц, т. е. вопрос об устойчивости импульсной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad t \neq t_i, \qquad \Delta x|_{t=t_i} = Bx. \tag{6}$$

Фундаментальная матрица $X(t, t_0)$ такой системы имеет вид

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_i)} \prod_{t_0 < t_\nu < t} (E + B) \, e^{A(t_\nu - t_{\nu-1})}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}. \tag{7}$$

Из представления (7), вообще говоря, трудно сделать какой-либо вывод о структуре и поведении матрицы $X(t, t_0)$ при $t > t_0$ и, следовательно, о поведении решений системы (6) при произвольных матрицах A и B (в отличие от случая линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей без импульсного воздействия). Это связано с тем, что наличие импульсного воздействия фактически делает систему неавтономной. Однако в отдельных случаях выражение (7) упрощается. Такие случаи рассмотрены в [4–7]. В указанных работах, например, установлены необходимые и достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости системы (6) при равноудаленных моментах времени t_i $(t_{i+1} - t_i = \theta > 0, \, i \in N)$; достаточные условия асимптотической устойчивости системы (5) в случае коммутирующих матриц A и B и моментов времени t_i таких, что $0 < \theta_1 \leq t_{i+1} - t_i \leq \theta_2$, $i \in N$; достаточные условия асимптотической устойчивости системы (6) с матрицей A, заданной в действительной канонической форме [25], и последовательностью моментов времени $\{ t_i \}$, для которой равномерно по $t \geq t_0$ существует конечный предел

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{i(t, t+\tau)}{\tau} = p, \tag{8}$$

где $i(t, t+\tau)$ — количество точек последовательности $\{t_i\}$, принадлежащих промежутку $[t, t+\tau]$.

Приведем некоторые из перечисленных результатов.

Теорема 4 [6]. *Пусть в системе уравнений* (6) *матрица A задана в действительной канонической форме, а моменты времени t_i таковы, что существует конечный предел* (8). *Положим*

$$\gamma = \max_{1\le j\le n} \operatorname{Re}\lambda_j(A), \qquad \alpha^2 = \max_{1\le j\le n} \lambda_j((E+B)^T(E+B)).$$

Если выполнено неравенство $\gamma + p\ln\alpha < 0$, то решения системы уравнений (6) *асимптотически устойчивы.*

Теорема 5 [6]. *Пусть матрицы A и B коммутируют, матрица $E+B$ невырождена, а последовательность моментов $\{t_i\}$ такова, что выполняется условие* (8). *Тогда:* 1) *если вещественные части всех собственных чисел матрицы $\Lambda = A + p\ln(E+B)$ отрицательны, то решения системы уравнений* (6) *асимптотически устойчивы;* 2) *если среди собственных чисел матрицы Λ имеется хотя бы одно число с положительной вещественной частью, то решения системы уравнений* (6) *неустойчивы.*

В [6] получены также достаточные условия сохранения устойчивости (асимптотической устойчивости) решений при переходе от системы (6) к системе

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(t)x, \quad t \ne t_i,$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = Bx + I_i x,$$

в которой $P(t)$ — кусочно-непрерывная матрица, I_i — постоянные матрицы.

Вопросы сохранения устойчивости решений при возмущении линейной однородной импульсной системы вида (2) исследовались также в [24]. Рассматривая наряду с системой (2) возмущенную систему

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= (A(t) + \tilde{A}(t))\,y, \quad t \ne t_i, \\ \Delta y|_{t=t_i} &= (B_i + \tilde{B}_i)\,y(t_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\tilde{A}(t)$ — кусочно-непрерывная матрица, $\tilde{B}_i$ — постоянные матрицы, $i = 1, 2, \ldots$, авторы [24] с помощью предложений 2, 3 и аналога леммы Гроноулла – Беллмана для кусочно-непрерывных функций [4–6] установили следующие условия сохранения устойчивости линейной однородной импульсной дифференциальной системы при возмущении.

***Предложение* 4.** *Пусть система* (2) *устойчива. Если*

$$\int_{t_0}^{\infty} N(\theta)\,\|\tilde{A}(\theta)\|\,d\theta < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} N_j\,\|\tilde{B}_j\| < \infty,$$

где функция $N(\theta)$ определяется формулой (5), *то возмущенная система* (9) *также устойчива.*

***Предложение* 5.** *Пусть система* (2) *равномерно устойчива. Если*

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\tilde{A}(\theta)\|\,d\theta < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|\tilde{B}_j\| < \infty,$$

то возмущенная система (9) *также устойчива.*

К результатам [24] примыкают результаты статьи [26], в которой анализируются взаимосвязи между такими понятиями, как экспоненциальная устойчивость системы вида (2) и эквиасимптотическая устойчивость; равномерная асимптотическая устойчивость и равномерная экспоненциальная устойчивость; слабая экспоненциальная устойчивость системы (2) по отношению к некоторому пространству решений L_k и экспоненциальная устойчивость системы (2).

Вопросы, связанные с экспоненциальной устойчивостью системы вида (2), изучались и в [27], где установлены условия, при которых из экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2) следует глобальная асимптотическая устойчивость нулевого решения системы вида (9). Рассмотрен также переход от системы (2) к некоторой квазилинейной системе.

В [4, 5] исследован случай периодической системы (2). Линейная система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (2) называется периодической с периодом T (или T-периодической), если T-периодической является матрица $A(t)$ и можно указать такое натуральное число p, что $B_{i+p} = B_i$, $t_{i+p} = t_i + T$ при всех $i \in Z$. В [4, 5] на случай импульсных систем распространена теория Флоке, установлены необходимые и достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости периодической системы вида (2).

2. Устойчивость решений нелинейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x + f(t,x), \quad t \neq t_i, \\ \Delta x|_{t=t_i} &= B_i x + I_i(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь матрицы $A(t)$ и B_i такие же, как и в системе (2), t_i — фиксированные моменты импульсного воздействия. Функции $f(t,x)$ и $I_i(x)$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\|f(t,x)\| \leq \rho \|x\|, \quad \|I_i(x)\| \leq \rho \|x\| \tag{11}$$

при $t \geq t_0$, $i = 1, 2, \ldots$, $\|x\| \leq h$, $h > 0$.

Предполагается, что матрицы $E + B_i$ невырождены при всех $i = 1, 2, \ldots$.

В [7] получены следующие достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (10).

Теорема 6. *Пусть наибольшее из собственных чисел* $\Lambda(t)$ *матрицы* $[A(t) + A^T(t)]/2$ *удовлетворяет при* $t \geq t_0$ *неравенству* $\Lambda(t) \leq \gamma$; *для всех* $i = 1, 2, \ldots$ *наибольшие из собственных чисел* Λ_i^2 *матриц* $(E + B_i^T)(E + B_i)$ *таковы, что* $\Lambda_i^2 \leq \alpha^2$, *и выполняется условие* (8). *Тогда если*

$$\gamma + p \ln \alpha < 0, \tag{12}$$

функции $f(t,x)$ *и* $I_i(x)$ *удовлетворяют неравенствам* (11) *с достаточно малой постоянной* ρ, *то тривиальное решение системы уравнений* (10) *асимптотически устойчиво.*

Утверждение теоремы остается справедливым, если в ней вместо условия (8) потребовать, чтобы моменты t_i удовлетворяли неравенствам $0 < \theta_1 \leq t_{i+1} - t_i \leq \theta_2$. В этом случае вместо неравенства (12) следует предполагать, что $\gamma + (\ln \alpha)/\theta < 0$, где

$$\theta = \begin{cases} \theta_2, & \text{если} \quad 0 < \alpha < 1, \\ \theta_1, & \text{если} \quad \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Вопросы устойчивости тривиального решения системы (10) изучались также в [9], где на случай импульсных систем распространен ряд понятий и результатов теории характеристических показателей Ляпунова. В частности, установлены достаточные условия конечности характеристических показателей решений системы вида (2); установлены необходимые и достаточные условия правильности по Ляпунову линейной однородной импульсной системы дифференциальных уравнений. В качестве вспомогательного результата получен аналог леммы Бихара для кусочно-непрерывной функции.

В [9] рассматривается система (10), в которой $A(t)$ — непрерывная ограниченная матрица при $t \geq t_0$, B_i — постоянные матрицы, ограниченные равномерно относительно $i = 1, 2, \ldots$, функции

$$f(t, x) \in C^{0,1}_{t,x} \quad (t_0 \leq t < \infty,\ \|x\| < h), \qquad I_i(x) \in C \quad (\|x\| < h)$$

удовлетворяют условиям

$$\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\|^m, \qquad \|I_i(x)\| \leq \beta_i \|x\|^m, \quad m > 1, \tag{13}$$

где $\alpha(t)$ — непрерывная функция, характеристический показатель которой $\chi[\alpha(t)]$ равен нулю; $\beta_i \geq 0$, причем $\beta_i e^{-\varepsilon t_i} \to 0$ при $i \to \infty$ при произвольном $\varepsilon > 0$. В цитируемой работе доказаны теоремы, распространяющие на случай импульсных дифференциальных уравнений известный критерий Ляпунова устойчивости по первому приближению и теорему Массера.

Теорема 7 [9]. *Пусть для системы* (10) *выполняются условия* (8), (13), *а также условие*

$$\inf_i |\det(E + B_i)| \geq \delta > 0.$$

Предположим, что линейная часть системы (10) *правильная. Если все характеристические показатели линейной части системы* (10) *отрицательны, то тривиальное решение системы* (10) *экспоненциально устойчиво по Ляпунову.*

Понятие правильности для импульсных систем дифференциальных уравнений уточняется следующим образом.

Система уравнений вида (2) называется правильной, если выполняется равенство

$$\sigma = \liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t}\left[\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)\, d\tau + \sum_{t_0 < t_i < t} \ln|\det(E + B_i)|\right],$$

где σ — сумма характеристических показателей (с учетом их кратностей) решений системы (2), составляющих некоторую ее нормальную фундаментальную матрицу [9]. Число

$$\kappa = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k - \lim_{t \to \infty}\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\sigma)\, d\sigma + \sum_{t_0 < t_i < t} \ln|\det(E + B_i)|\right)$$

называется мерой неправильности импульсной системы (2) (через λ_k обозначены характеристические показатели решений системы (2)).

Теорема 8 [9]. *Если в системе уравнений* (10) *функции* $f(t, x)$ *и* $I_i(x)$ *удовлетворяют условиям* (13) *и выполняется неравенство*

$$\max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k \leq -\kappa(m-1)^{-1} \leq 0,$$

где κ *— мера неправильности линейной части системы* (10), *то нулевое решение системы* (10) *асимптотически устойчиво.*

В [6] рассмотрен случай, когда импульсные воздействия в системе (10) осуществляется не в фиксированные моменты времени, а при прохождении изображающей точкой (t, x) заданных поверхностей расширенного фазового пространства, относительно которых предполагается, что они заданы непрерывно дифференцируемыми функциями $t = \tau_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, $\tau_i(x) \to \infty$ при $i \to \infty$ равномерно относительно x, $\|x\| \le h$.

В рассматриваемом случае импульсная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x + f(t, x), \quad t \ne \tau_i(x), \\ \Delta x|_{t=\tau_i(x)} &= B_i x + I_i(x), \end{aligned} \tag{14}$$

где матрицы $A(t)$, B_i, функции $f(t, x)$ и $I_i(x)$ такие же, как и в системе (10).

Устойчивость, асимптотическая устойчивость решений системы (14) понимается в смысле определений 1, 6.

В [7] в предположении, что

$$\left\| \frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x} \right\| \le \rho \tag{15}$$

для всех $i = 1, 2, \dots$ и x таких, что $\|x\| \le h$, получено следующее достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (14).

Теорема 9. *Пусть наибольшее из собственных чисел* $\Lambda(t)$ *матрицы* $(1/2)[A(t) + A^T(t)]$ *удовлетворяет неравенству* $\Lambda(t) \le \gamma$ *при всех* $t \ge t_0$; *при каждом* $i = 1, 2, \dots$ *наибольшее из собственных чисел* Λ_i^2 *матрицы* $(E + B_i^T)(E + B_i)$ *таково, что* $\Lambda_i^2 \le \alpha^2$, *и равномерно по* $t \ge t_0$ *и* x, $\|x\| \le h$, *существует предел*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{i_x(t, t+T)}{T} = p,$$

где $i_x(t, t+T)$ — *количество точек* $\tau_i(x)$ *на промежутке* $[t, t+T]$. *Предположим также, что*

$$\sup_{0 \le \sigma \le 1} \left\langle \frac{\partial \tau_i(x + \sigma(B_i x + I_i(x)))}{\partial x}, B_i x + I_i(x) \right\rangle \le 0$$

для всех x, $\|x\| \le h$, $i = 1, 2, \dots$.

Тогда если $\gamma + p \ln \alpha < 0$, *то тривиальное решение системы* (14) *асимптотически устойчиво, если функции* $f(t, x)$, $I_i(x)$ *и* $\tau_i(x)$ *удовлетворяют неравенствам* (11) *и* (15) *с достаточно малой постоянной* ρ.

Условия теоремы 9 обеспечивают отсутствие биений решений о поверхности $t = \tau_i(x)$.

В [4, 5] предложены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (14) и при других предположениях относительно функций $\tau_i(x)$, соответствующих другим вариантам условий отсутствия биений решений о поверхности разрыва.

С вопросами устойчивости решений связаны вопросы существования интегральных множеств импульсных систем дифференциальных уравнений.

В [23, 28–30] исследован вопрос о существовании интегральных множеств системы (10) в предположении, что ее линейная часть является гиперболической; изучено поведение решений рассматриваемой системы в окрестности интегральных множеств и на самих множествах.

В [29] для некоторых классов импульсных систем доказано существование интегральных множеств и установлен принцип сведения для системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = By + g(x, y, t), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = Cx + I_i^{(1)}(x, y), \qquad \Delta y|_{t=t_i} = I_i^{(2)}(x, y), \tag{16}$$

$i \in Z$, $x \in R^n$, $y \in R^m$. Система (16) задана в некоторой окрестности точки $x = 0$, $y = 0$ $(\|x\| < \rho,\ \|y\| < \rho)$. Предполагается, что A, C — постоянные $(n \times n)$-мерные матрицы, матрица A задана в действительной канонической форме, $\det(E_n + C) \neq 0$, постоянная матрица B порядка m такова, что $\operatorname{Re}\lambda_j(B) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Функции $f(x, y, t)$, $g(x, y, t)$, $I_i^{(1)}(x, y)$, $I_i^{(2)}(x, y)$, определенные при $t \in R$, $\|x\| < \rho$, $\|y\| < \rho$, непрерывны, удовлетворяют условию Липшица по x и y равномерно относительно $t \in R$ и индекса $i \in Z$ с постоянной Липшица $l = l(\rho)$, $l(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$;

$$f(0, 0, t) = I_i^{(1)}(0, 0) = 0; \qquad g(0, 0, t) = I_i^{(2)}(0, 0) = 0.$$

Моменты времени t_i удовлетворяют условию $\theta_1 \leq t_{i+1} - t_i \leq \theta_2$, $i \in Z$, $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$.

Позднее вопросы существования интегральных множеств исследовались в [31]. В [31] установлены достаточные условия существования локального интегрального многообразия системы

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = A_2 y + g(x, y), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = B_1 x + I_i(x, y), \qquad \Delta y|_{t=t_i} = B_2 x + J_i(x, y),$$

$i \in \mathbb{Z}$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, в предположении, что $\det(E_n + B_1) \neq 0$, матрицы A_1 и B_1 коммутируют, $\det(E_m + B_2) \neq 0$, матрицы A_2 и B_2 коммутируют.

К вопросам устойчивости решений примыкают вопросы существования ограниченных решений и конвергентности импульсных дифференциальных систем. В [32] установлены достаточные условия конвергентности системы (10), в которой $A(t)$ — непрерывная при $t \in R$ квадратная матрица, B_i — постоянные квадратные матрицы, $\det(E + B_i) \neq 0$, $i \in Z$, $f(t, x)$, $I_i(x)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условию Липшица по x равномерно относительно $t \in R$ и индекса $i \in Z$, $\|f(t, 0)\| \leq k$, $\|I_i(0)\| \leq k$ $(t \in R, i \in Z)$, моменты времени t_i удовлетворяют условию (8).

3. Применение прямого метода Ляпунова в теории устойчивости импульсных систем. Результаты, изложенные выше, получены с помощью подходящих оценок матрицанта линейной системы импульсных дифференциальных уравнений и дифференциальных и интегральных неравенств, установленных в работах [3–6, 9, 22, 23]. Вопросы, связанные с устойчивостью и ограниченностью решений импульсных дифференциальных уравнений, можно успешно исследовать и с помощью прямого метода Ляпунова. При этом в качестве вспомогательной функции выступает разрывная функция — аналог функции Ляпунова для импульсных дифференциальных уравнений. Одними из первых работ, в которых метод функций Ляпунова обобщался на системы вида (1), были работы [10–12], где установлены достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости нулевого решения системы (1). Рассмотрен как общий случай (импульсное воздействие происходит в моменты пересечения интегральной кривой заданных поверхностей расширенного фазового пространства), так и случай импульсного воздействия в фиксированные моменты времени. В [12] предполагается, что система (1) задана в области $\Pi = \{ t \geq t_0, x \in \bar{J}_h \}$, где

$$\bar{J}_h = \{ x \in R^n, \| x \| \leq h \}; \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad t \geq t_0, \quad I_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Предполагается также, что выполняются условия отсутствия биений решений о поверхности и функции $\tau_i(x)$ удовлетворяют следующему условию: существуют такие положительные числа θ_1 и θ_2, что для всех x', x'' из $\bar{J}_h$ при всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $\theta_1 \leq \tau_{i+1}(x'') - \tau_i(x') \leq \theta_2$, где $\tau_0(x) \equiv t_0 = \text{const}$.

В [12] доказаны следующие утверждения.

Теорема 10. *Пусть для системы* (1) *существует положительно определенная функция Ляпунова* $V(t, x)$, *удовлетворяющая в области* Π *условиям*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \leq \varphi(V),$$

$$V(\tau_i(x), x + I_i(x)) \leq \psi(V(\tau_i(x), x)), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\varphi(s), \psi(s)$ — *непрерывные при* $s \geq 0$ *функции,* $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(s) > 0$ *при* $s > 0$. *Нулевое решение системы* (1) *устойчиво, если при некотором* $a_0 > 0$ *для всех* $a \in (0, a_0]$ *выполняется неравенство*

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta_1 \tag{17}$$

при условии, что $\varphi(s) < 0$ *при* $s > 0$, *или неравенство*

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \theta_2 \tag{18}$$

при условии, что $\varphi(s) > 0$ *при* $s > 0$.

Усилением формулировки приведенной теоремы получается формулировка теоремы об асимптотической устойчивости.

Теорема 11. *Если выполнены условия предыдущей теоремы, но вместо неравенств* (17) *и* (18) *выполняются соответственно неравенства*

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta_1 - \gamma,$$

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \theta_2 + \gamma,$$

где $\gamma > 0$, *то тривиальное решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 12. *Пусть для системы* (1) *существует функция Ляпунова* $V(t, x)$, *область положительности которой* $\Pi_1 = \{ (t, x) \in \Pi : V(t, x) > 0 \}$ *при каждом* $t \geq t_0$ *имеет нулевое открытое сечение плоскостью* $t = \text{const}$, *примыкающее к началу координат, причем в* Π_1 $V(t, x)$ *ограничена, и выполнены неравенства*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \geq \varphi(V),$$

$$V(\tau_i(x), x + I_i(x)) \geq \psi(V(\tau_i(x), x)), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\varphi(s), \psi(s)$ — *такие же, как и в предыдущих теоремах. Тогда решение* $x(t) \equiv 0$ *системы* (1) *неустойчиво, если при некотором* $\gamma > 0$ *для всех* $a \in (0, a_0]$, *где*

$$a_0 = \sup_{(t,x) \in \Pi_1} V(t, x),$$

выполняется неравенство

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \theta_2 + \gamma$$

при условии, что $\varphi < 0$ *при* $s > 0$ *или неравенство*

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta_1 - \gamma$$

при условии, что $\varphi > 0$ *при* $s > 0$.

Позднее достаточные условия асимптотической устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы вида (1) с фиксированными моментами импульсного воздействия были установлены в [33]. Эти условия не разделены на непрерывную и дискретную части, а явно выражены в виде комбинации свойств вспомогательной функции на непрерывных и разрывных частях траектории. При этом в [33] дополнительно налагаются условия на верхнюю левую (верхнюю правую) производную Дини от функции $\dot{v}$ вдоль траекторий системы (1) на участках $(t_{k-1}, t_k) \times S(\rho)$. Здесь

$$S(\rho) = \{x \in R^n, \|x\| < \rho\}; \quad v = V(t, x(t)), \quad V(t, x)\colon R_+ \times S(\rho) \to R_+$$

— функции Ляпунова, относительно которой предполагается, что она положительно определена, локально липшицева по x, непрерывно дифференцируема всюду за исключением точек t_k, в которых непрерывна слева, и существует правый предел $V(t_{k^+}, x)$ для любых $x \in R^n$.

Исследование различных свойств решений импульсных дифференциальных уравнений с помощью второго метода Ляпунова проводилось в [34–39]. В [34, 35] получены достаточные условия равномерной ограниченности решений системы вида (1) с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени, а также условия диссипативности такой системы.

В [36] прямой метод Ляпунова применен к исследованию устойчивости множеств по отношению к системе (1), а также установлены условия, при которых некоторое множество M является глобально эквиасимптотически (α-равномерно глобально асимптотически, равномерно глобально асимптотически, t-равномерно глобально асимптотически, экспоненциально глобально асимптотически) устойчивым множеством системы (1).

В [37, 38] для системы (1) с фиксированными моментами импульсного воздействия с помощью второго метода Ляпунова установлены достаточные условия (h_0, h)-устойчивости, (h_0, h)-равномерной устойчивости, (h_0, h)-асимптотической устойчивости, (h_0, h)-неустойчивости системы (1). Понятие (h_0, h)-устойчивости позволяет объединить разнообразные известные понятия теории устойчивости, такие как устойчивость по части переменных, условная устойчивость, устойчивость инвариантного множества и пр. Приведем определение (h_0, h)-устойчивости. Пусть Γ — класс отображений $h\colon R_+ \times R^n \to R_+$, являющихся непрерывными, и $\inf h(t, x) = 0$.

***Определение* 12** [37]. *Пусть* $h_0, h \in \Gamma$. *Импульсная дифференциальная система* (1) *с фиксированными моментами импульсного воздействия называется* (h_0, h)*-устойчивой, если для любого* $\varepsilon > 0$ *и* $t_0 \in R_+$ *существует* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ *такое, что из неравенства* $h_0(t_0, x_0)$ *следует неравенство* $h(t, x(t)) < \varepsilon$ *при* $t \geq t_0$.

В формулировках теорем, дающих достаточные условия (h_0, h)-устойчивости (асимптотической устойчивости, неустойчивости) фигурируют такие свойства вспомогательной функции, как h-положительная определенность, h_0-убывание [37, 38]. Приемы доказательства теорем в указанных работах традиционны для прямого метода Ляпунова; (h_0, h)-устойчивость систем вида (1) с фиксированными моментами времени импульсного воздействия изучалась также в [39] с помощью однопараметрического семейства функций Ляпунова и применения метода сравнения. Метод сравнения для импульсных дифференциальных уравнений получил развитие в работах [19, 40, 41].

Нами приведены результаты, которые позволяют судить об основных направлениях и методах исследований в теории устойчивости импульсных систем.

В заключение отметим, что к направлениям, которые здесь освещены, примыкают результаты [42–47] и некоторых других работ, в которых изучались различные устойчивоподобные свойства решений импульсных дифференциальных систем, исследовалось асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 56–64.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Киев. ун-т, 1980. – 80 с.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
5. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapure–New Jersey–London: World Scientific, 1995. – 462 p.
6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Устойчивость решений дифференциальны уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 11. – С. 1981–1992.
7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием // Там же. – 1981. – **17**, № 11. – С. 1995–2001.
8. *Перестюк Н. А.* Устойчивость решений линейных систем с импульсным воздействием // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. – 1977. – Вып. 19. – С. 71–76.
9. *Перестюк Н. А., Черникова О. С.* К вопросу об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 190–195.
10. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений импульсных систем // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. – 1981. – Вып. 23. – С. 33–40.
11. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* Об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Мат. физика. – 1982. – Вып. 31. – С. 9–14.
12. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* О втором методе Ляпунова в системах с импульсным воздействием // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 10. – С. 11–14.
13. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
14. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И.* Проблема „биений" в импульсных системах. – Киев, 1990. – 46 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики).
15. *Трофимчук С. И.* Достаточные условия отсутствия „биений" в импульсных системах // Дифференц. уравнения с параметром. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 133–139.
16. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
17. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapure–New Jersey–London: World Scientific, 1989. – 273 p.
18. *Dishliev A. B., Bainov D. D.* Sufficient conditions for absence of „beating" in systems of differential equations with impulses // Appl. Anal. – 1984. – № 18. – P. 67–73.
19. *Kaul S., Lakshmikantham V., Leela S.* Extremal solutions, comparison principle and stability criteria for impulsive differential equations with variable times // Nonlinear Anal., Theory, Methods and Appl. – 1994. – **22**, № 10. – P. 1263–1270.

20. *Lakshmikantham V.* Trends in he theory of impulsive differential equations // Proceedings of the International conference of theory and applications of differential equations. – Ohio Univ., 1988. – P. 76–87.
21. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
22. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для уравнений второго порядка с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 750–762.
23. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Интегральные множества одного класса дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. – Киев, 1987. – 43 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики).
24. *Milev N. V., Bainov D. D.* Stability of linear inpulsive differential equations // Bull Cal. Math. Soc. – 1991. – № 83. – P. 501–508.
25. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 244 с.
26. *Milev N. V., Bainov D. D.* Exponential stability of linear inpulsive differential equations // Int. J. Theor. Phys. – 1992. – **31**, № 7. – P. 1325–1334.
27. *Medina R., Pinto M.* Uniform asymptotic stability of solutions of impulsive differential equations // Dynamic Systems and Appl. – 1996. – № 5. – P. 97–107.
28. *Перестюк Н. А.* Об интегральных множествах одного класса дифференциальных уравнений, подверженных импульсному воздействию // III Республиканский симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям: Тез. докл. – Одесса, 1982. – С. 33–34.
29. *Черникова О. С.* Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 5. – С. 601–607.
30. *Мамса Е. Ю.* Интегральные множества одного класса систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. – 1982. – Вып. 24. – С. 61–68.
31. *Stamov G. T.* Integral manifolds and perturbations of the nonlinear part of systems of autonomous differential equations with impulses at fixed moments // Serdica Math. J. – 1995. – № 21. – P. 109–122.
32. *Митропольский Ю. А., Перестюк Н. А., Черникова О. С.* Конвергентность систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 11. – С. 11–15.
33. *Liu X.* Stability problems of impulsive systems // Differential equations and control theory. – Wuhan, 1994. – P. 187–201.
34. *Черникова О. С.* О диссипативности систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 5. – С. 656–660.
35. *Черникова О. С.* К вопросу об ограниченности решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Там же. – 1986. – **38**, № 1. – С. 124–128.
36. *Kulev G. K., Bainov D. D.* Global stability of sets for impulsive differential systems by Lyapunov's direct method // Computer Math. Appl. – 1990. – **19**, № 2. – P. 17–28.
37. *Liu X.* Stability results for impulsive differential systems with applications to population growth models // Dynamic. Stab. Syst. – 1994. – **9**, № 2. – P. 163–174.
38. *Liu X.* Futher extensions of the direct method and stability of impulsive systems // Nonlinear World. – 1994. – **1**. – P. 341–354.
39. *Liu X.* Stability analysis of impulsive system via perturbing families of Lyapunov functions // Rocky Mountain J. Math. – 1993. – **23**, № 2. – P. 651–669.
40. *Kulev G. K., Bainov D. D.* Second method of Lyapunov and comparison principle for systems with impulse effect // J. Comput. and. Appl. Math. – 1988. – **23**. – P. 305–321.
41. *Lakshmikantham V., Leela S., Kaul S.* Comparison princeple for impulsive differential equation with variable times and stability theory // Nonlinear Anal. – 1994. – **22**, № 4. – P. 499–503.
42. *Kulev G. K., Bainov D. D.* Strong stability of impulsive systems // Int. J. Theor. Phys. – 1988. – **27**, № 6. – P. 745–755.
43. *Kulev G. K., Bainov D. D.* Lipschitz quasistability of impulsive differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1993. – № 172. – P. 24–32.
44. *Перестюк Н. А., Черникова О. С.* О сохранении некоторых свойств решений при возмущении импульсной системы дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1707–1713.
45. *Cortés V., Gonzalés P.* Levinson's theorem for impulsive differential equations // Analysis. – 1994. – № 14. – P. 113–125.
46. *Pinto M.* Ghizzetti's theorem for piecewise continuous solutions // Int. J. Math. and Math. Sci. – 1994. – **17**, № 2. – P. 283–286.
47. *Rao A. N. V., Tsokos C. P.* Stability behavior of impulsive stochastic differential systems // Dynamic. Systems and Appl. – 1995. – № 4. – P. 317–328.

Получено 03.07.96