УДК 512.544

А. В. Тушев, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

О РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ, ВСЕ СОБСТВЕННЫЕ ФАКТОР-ГРУППЫ КОТОРЫХ ИМЕЮТ КОНЕЧНЫЙ РАНГ

We consider finitely generated residually finite soluble groups of infinite rank, all of whose proper quotient groups have a finite rank.

Вивчаються скінченнопороджені фінітно-апроксимовні розв'язні групи нескінченного спеціального рангу, всі власні нормальні підгрупи яких визначають фактор-групи скінченного спеціального рангу.

В рамках программы изучения групп с заданными свойствами системы подгрупп [1] можно выделить следующий подход, описанный, например, в [2]. Пусть $\mathfrak{P}$ — некоторое теоретико-групповое свойство. Группу G, не удовлетворяющую свойству $\mathfrak{P}$, будем по аналогии с [2] называть минимально не $\mathfrak{P}$-группой, если все ее собственные фактор-группы имеют свойство $\mathfrak{P}$. На этом пути наиболее полное и интересное описание получили разрешимые минимально не полициклические группы [3]. Из результатов работы [3], в частности, следует, что разрешимая минимально не полициклическая группа конечно порождена, финитно-аппроксимируема и имеет подгруппу конечного индекса, ступень разрешимости которой не превышает числа 3.

В настоящей работе рассматриваются разрешимые, конечнопорожденные финитно-аппроксимируемые группы минимально бесконечного (специального) ранга, ступень разрешимости которых не превышает числа 3. При этом использованы идеи и результаты работ [3 – 5].

Пусть A — абелева группа конечного ранга, Γ — группа ее операторов. Группа A называется Γ-плинтусом, если все подгруппы конечного индекса группы Γ действуют на A рационально неприводимо. Γ-плинтус называется нетеровым, если он удовлетворяет условию максимальности для Γ-допустимых подгрупп (см., например, [5]).

Лемма 1. *Пусть A — минимаксная абелева группа без кручения, ξ — ее автоморфизм такой, что $A = \langle a^{\xi^n} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$. Пусть k — конечное поле и $S = kA$. Тогда пересечение всех максимальных идеалов L кольца S, нормализуемых автоморфизмом ξ, для которых $|S/L| < \infty$, нулевое.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 5 из работы [4]. Так же, как и в этой лемме, доказываемое утверждение сводится к доказательству соотношения

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = 1, \tag{1}$$

где $A_n = \langle a^{(\xi - q^n)} \mid a \in A,\ q = |k| \rangle$. Поскольку ввиду результатов [6] A удовлетворяет условию максимальности для $\langle \xi \rangle$-допустимых подгрупп, доказательство соотношения (1) индукцией по $r(A)$ сводится к случаю, когда A является нетеровым $\langle \xi \rangle$-плинтусом. В этом случае либо

$$\left| A \Big/ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right| < \infty,$$

либо выполняется соотношение (1), причем первая ситуация невозможна, так как $|A/A_n| = \chi(q^n)$ стремится вместе с n к бесконечности, где χ — характери-

© А. В. ТУШЕВ, 1993

стический многочлен автоморфизма ξ. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A — нетеров Γ-плинтус, где Γ — разрешимая группа конечного ранга, k — локальное конечное поле, $S = kA$. Тогда для любого ненулевого идеала X кольца S существует бесконечное семейство $\mathcal{L} = \{L_i\}$ максимальных идеалов кольца S таких, что $\dim_k(S / L_i) < \infty$ и L_i не содержит идеалов, Γ-сопряженных с X.*

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $S_\Gamma(A) = 1$. Тогда, так как Γ действует на A рационально неприводимо, из результатов работы [7] следует, что Γ — конечное расширение свободной абелевой группы конечного ранга. Воспользовавшись аргументами, приведенными в начале § 4.4 работы [4], можно считать, что k — конечное поле, и что Γ — свободная абелева группа конечного ранга.

Нетрудно заметить, что в доказательстве леммы группу A можно заменить любой ее Γ-допустимой подгруппой конечного индекса. Будем рассматривать A как $\mathbb{Z}\Gamma$-модуль. Заменив группу A ее Γ-подгруппой конечного индекса, можна считать, что A — циклический $\mathbb{Z}\Gamma$-модуль, и, следовательно, $A \cong \mathbb{Z}\Gamma / I$, где I — идеал кольца $\mathbb{Z}\Gamma$. Так как A — Γ-плинтус, то идеал I простой и, следовательно, A — область целостности. Таким образом, $A \le F$, где F — поле частных кольца A.

Из леммы 4 работы [4] следует существование элемента $\mu \in F$ такого, что $\mathbb{Q}(\mu^n) = F$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, причем, не ограничивая общности, можно считать, что μ является целым над $\mathbb{Z}$. Из результатов работы [8] следует, что A — минимаксная группа. Пусть $\operatorname{Sp}(A) = \{p_1, \ldots, p_k\}$ и $s = p_1 \ldots p_k$. Покажем, что $A \le B = \mathbb{Z}[<\xi>]$, где $\xi = s^{-1}\mu^{-1}$ и $\mathbb{Z}[<\xi>]$ — подкольцо в F, порожденное $\mathbb{Z}$ и подгруппой $<\xi>$. Так как $\mathbb{Q}(\xi) = F$, то $r(B) = r(A)$, поэтому достаточно показать, что группа B является s-делимой. Пусть $C = B[\mu]$ — подкольцо в F, порожденное подкольцом B и элементом μ. Так как $s^{-1} \in C$, то группа C является s-делимой. Элемент μ целый над $\mathbb{Z}$, поэтому любой элемент $c \in C$ можно представить в виде $c = b_0 + b_1\mu + \ldots + b_t\mu^t$, где $b_i \in B$, а так как фактор-группа C / B периодическая, то существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $m\mu^i \in B$, где $1 \le i \le t$. Отсюда нетрудно заключить, что $mC \le B$, и, следовательно, $|C / B| < \infty$. Таким образом, группа B — s-делимая, и, следовательно, заменив, если нужно, A ее Γ-подгруппой конечного индекса, можно считать, что $A \le B$. Так как $\mathbb{Q}(\mu^n) = F$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ и $\xi = s^{-1}\mu^{-1}$, то $\mathbb{Q}(\mu^n) = F$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Осюда следует, что B — $<\xi>$-плинтус, а так как кольцо $\mathbb{Z}[<\xi>]$ нетерово (см. [6]), то B — нетеров $<\xi>$-плинтус.

Из леммы 1 следует, что семейство $\mathcal{L}' = \{L_i'\}$ максимальных идеалов кольца $S' = kB$, нормализуемых автоморфизмом ξ, для которых $|S' / L_i'| < \infty$, бесконечно. Покажем, что пересечение любого его бесконечного подсемейства нулевое. Предположим, что это не так. Тогда бесконечное семейство идеалов из $\mathcal{L}'$ содержит ненулевой $\langle\xi\rangle$-инвариантный идеал J кольца S'. Но B является нетеровым $\langle\xi\rangle$-плинтусом, и по теореме C из [4] $|S'/J| < \infty$, что приводит к противоречию. Поскольку ξ коммутирует со всеми элементами из Γ, $\mathcal{L}'$ замкнуто относительно действия Γ, а так как $|S'/L_i'| < \infty$, то $|\Gamma : N_\Gamma(L_i')| < \infty$, и, следовательно, $\mathcal{L}'$ распадается на конечные классы Γ-сопряженных идеалов.

Положим $\mathcal{L}^* = \{ L_i^* = S \cap L_i' \}$. Тогда семейство $\mathcal{L}^*$ распадается на конечные классы Г-сопряженных идеалов, и пересечение любого его бесконечного подсемейства нулевое. Пусть X — ненулевой идеал кольца S и $\mathcal{L}$ — семейство идеалов из $\mathcal{L}^*$, которые не содержат Г-сопряженных с X идеалов. Если семейство $\mathcal{L}$ конечно, то существует беконечное семейство идеалов из $\mathcal{L}^*$, содержащих X, что приводит к противоречию. Таким образом, $\mathcal{L}$ бесконечно. Лемма доказана.

Отметим, что лемма 2 обобщает теорему E работы [4] на случай не полициклического плинтуса.

Пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга, Г — группа ее операторов. Обозначим через $\Delta_\Gamma(A)$ подгруппу в A, состоящую из элементов, которые при действии Г имеют конечные орбиты. Если K — кольцо и I — идеал группового кольца KA, то стандартизатором $St_\Gamma(I)$ идеала I в группе Г, согласно [5], называется множество элементов из Г такое, что для любого $\gamma \in \in St_\Gamma(I)$ существует конечнопорожденная подгруппа $A_\gamma \le A$ такая, что $r(A_\gamma) = r(A)$ и $I \cap KA_\gamma = I^\gamma \cap KA_\gamma$. Как показано в [5], $St_\Gamma(I)$ — подгруппа группы Г.

Пусть H — подгруппа группы G. Множество элементов, выбранных по одному из каждого правого (левого) смежного класса группы G по подгруппе H, называется правой (левой) трансверсалью подгруппы H в группе G.

Лемма 3. *Пусть G — группа, A — ее абелева нормальная подгруппа без кручения конечного ранга, K — нетерова область целостности, M — KG-модуль. Если модуль M имеет KA-кручение, то:*

1. Существуют элемент $a \in M$ и конечнопорожденная подгруппа $D \le A$, ранг которой равен рангу подгруппы A такие, что $Ann_{KD}(a) = P$ — простой идеал, и $aKG = (aKH) \otimes_{KH} KG$, где $H = \mathrm{St}_G(I)$ и $I = Ann_{KA}(a)$.

2. Если U — KH-подмодуль в aKH, то отображение $\varphi\colon U \to UKG$ задает вложение множества KH-подмодулей модуля aKH в множество KG-подмодулей модуля aKG.

Доказательство. 1. Пусть a_0 — конечнопорожденная подгруппа из A такая, что $r(A_0) = r_0(A)$. Тогда модуль M имеет KA_0-кручение, а так как кольцо KA_0 нетерово, то существует простой идеал P_0 такой, что $\mathrm{Ann}_m(P_0) \ne \ne 0$ (см. [9], гл. IV, § 1.). Так как степень трансцендентности AK над K конечна, то A_0 и P_0 можно выбрать так, что степень трансцендентности KA_0 / P_0 над K минимальна. Тогда нетрудно показать, что для любой подгруппы конечного индекса $D \le A_0$ имеем $P_0 \cap KD \in \mathrm{Ass}_{KD}(M)$ (см. [9], гл. IV, §1).

Пусть

$$a \in \mathrm{Ann}_M(P_0), I = \mathrm{Ann}_{KA}(a), H = \mathrm{St}_G(I),$$

T — правая трансверсаль подгруппы H в группе G. Тогда достаточно показать, что сумма $\sum_{t \in T} (aKH)t$ является прямой. Предположим, что это не так. Тогда существуют $b_i \in KH$ и $t_1, \ldots, t_n \in T$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} (ab_i)t_i = 0. \tag{2}$$

Положим $b_i = \sum_j k_{ij} g_{ij}$, где $k_{ij} \in K$, $g_{ij} \in H$. Из определения H следует существование конечнопорожденных подгрупп $C_{ij} \leq A$ таких, что $r(C_{ij}) = r(A)$ и $I^{g_{ij}} \cap KC_{ij} = \cap KC_{ij}$. Положим $C = (\bigcap_{i,j} C_{ij}) \cap A_0$ и пусть $D = (\bigcap_i C^{t_i}) \cap C$. Тогда $I^{g_{ij}} \cap KC = I \cap KC = P$ — простой идеал в KC, и, следовательно, $I^{g_{ij}\, t_i} \cap \cap KC^{t_i} = (I^{g_{ij}} \cap KC)^{t_i} = P^{t_i}$ — простой идеал в KC^{t_i}, а так как $D \leq C^{t_i}$, то $I^{g_{ij}\, t_i} \cap KD = P_i$ — простой идеал в KD. Поскольку t_i — представители различных смежных классов группы G по подгруппе H, то из определения H следует, что все идеалы P_i различны. Очевидно,

$$Ann_{KD}(ak_{ij}g_{ij}t_i) = I^{g_{ij}\, t_i} \cap KD = P_i,$$

поэтому

$$\mathrm{Ann}_{KD}(ab_i t_i) = \mathrm{Ann}_{KD}(\sum_j k_{ij} g_{ij} t_i) = P_i$$

и $P_i \in Ass_{KD}(M)$. Тогда из рассуждений, приведенных в начале §2.4 работы [4], следует, что сумма $\sum_{i=1}^{n} (ab_i t_i)KD$ прямая, а это противоречит (2).

2. Доказательство содержится в доказательстве утверждения (2) из § 2.4 [4].

Лемма 4. *Пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга, Γ — группа ее операторов, K — кольцо, I_1 и I_2 — идеалы группового кольца KA. Если существует такая конечнопорожденная подгруппа $A_0 \leq A$, что $r(A_0) = r(A)$ и $I_1 \cap RA_0 = I_2 \cap KA_0$, то $H_1 = \mathrm{St}_G(I_1) = \mathrm{St}_G(I_2) = H_2$.*

Доказательство. Пусть $g \in H_1$. Тогда существует подгруппа конечного индекса $A_1 \leq A_0$, для которой $I_1^g \cap KA_1 = I_1 \cap KA_1$. Пусть $A_2 = A_1 \cap A_1^{g^{-1}}$, тогда $A_2^g = A_1^g \cap A_1$ и, следовательно,

$$I_2^g \cap KA_2^g = (I_2 \cap KA_2)^g = (I_1 \cap KA_2)^g =$$

$$= I_1^g \cap KA_2^g = I_1 \cap KA_2^g = I_2 \cap KA_2^g.$$

Отсюда следует, что $g \in H_2$. Таким образом, $H_1 \leq H_2$, и, используя те же рассуждения, можно показать, что $H_2 \leq H_1$. Лемма доказана.

Модуль M будем называть модулем минимально бесконечного ранга, если его аддитивная группа имеет бесконечный специальный ранг, а любой его собственный подмодуль определяет фактор-группу конечного специального ранга.

Теорема 1. *Пусть Γ — группа конечного свободного ранга, A — ее абелева нормальная подгруппа без кручения такая, что $\Delta_\Gamma(A) = 1$. Пусть K — нетерова область целостности, M — финитно-аппроксимируемый $K\Gamma$-модуль минимально бесконечного ранга без K-кручения. Если модуль M имеет KA-кручение, то существуют подмодуль $M' \leq M$ и подгруппа конечного индекса $H \leq \Gamma$ такие, что $M' = V \otimes_{KH} K\Gamma$, где V — KH-модуль минимально бесконечного ранга, причем $r_0(H / C_H(V)) < r_0(\Gamma)$.*

Доказательство. Согласно лемме 3 существуют элемент $a \in M$ и конечнопорожденная подгруппа $D \leq A$, ранг которой равен рангу подгруппы A, такие, что $\mathrm{Ann}_{KD}(a) = P_0$ — простой идеал и $M' = aKG = (V) \otimes_{KH} KG$, где $V = aKH$, $H = \mathrm{St}_G(I)$ и $I = \mathrm{Ann}_{KA}(a)$.

Предположим, что $|\Gamma : H| = \infty$. Из леммы 3 следует, что если V содержит собственный KH-подмодуль U, то фактор-группа

$$VK\Gamma / UK\Gamma \cong (V/U) \otimes_{KH} K\Gamma$$

имеет бесконечный ранг. Следовательно, подмодуль $UK\Gamma$ определяет фактор-группу $M / UK\Gamma$ бесконечного ранга, что невозможно. Таким образом, V — простой KH-модуль, а так как V — финитно-аппроксимируемый модуль, то $|V| < \infty$, и, следовательно, $|H / C_H(V)| < \infty$. Поскольку $A \le H$, то $A^n \le C_H(V)$, а так как A^n — нормальная подгруппа группы Γ, то $A^n \le C_\Gamma(M')$. Тогда, очевидно, $r_0(\Gamma / C_\Gamma(M')) \le r_0(\Gamma)$.

Предположим теперь, что $|\Gamma : H| < \infty$, и пусть P — простой идеал из KA, для которого $P \cap KD = P_0 = I \cap KD$. Тогда по лемме 4 $H = \mathrm{St}_\Gamma(P)$. Пусть $\hat{K}$ — поле частных кольца K и $\hat{P}$ — идеал в KA, порожденный P. Тогда нетрудно показать, что $H = \mathrm{St}_\Gamma(\hat{P})$, а так как $|\Gamma : H| < \infty$, то по теореме A из работы [5] $\hat{P}^+ = A \cap (\hat{P} + 1) \ne 1$. Так как модуль M без K-кручения, то $P \cap K = 0$, и, следовательно, $\hat{P}^+ = P^+$. Очевидно, $D \cap P^+ \le C_A(a) = C$. Поскольку модуль M финитно-аппроксимируемый, то KA-модуль aKA также финитно-аппроксимируем, и, следовательно, финитно-аппроксимируемой будет фактор-группа A/C. Отсюда ввиду минимаксности $A\, |t(A/C)| < \infty$, и, заменив A ее Γ-допустимой подгруппой конечного индекса, можно считать, что подгруппа C сервантна в A. Так как $H = \mathrm{St}_\Gamma(I)$ и $C = A \cap (1 + M)$, то для любого $g \in H$ существует конечнопорожденная подгруппа $A_g \le A$ такая, что $r(A_g) = r(A)$ и $C^g \cap A_g = C \cap A_g = C_g$. Подгруппа C^g сервантна в A, поэтому $C^g / C_g = t(A/C_g) = C/C_g$, и, следовательно, $C^g = C$. Таким образом, C — нормальная подгруппа в H, откуда $A \le C_H(V)$, и, следовательно, $r(H / C_H(V)) < r(\Gamma)$. Теорема доказана.

Лемма 5. *Пусть S — коммутативное кольцо, Γ — группа его операторов, M — S-модуль, $0 \ne \alpha \in S$, и F — такой свободный подмодуль в M, что любой элемент из M/F аннулируется произведением элементов, сопряженных с α элементами из Γ. Тогда для любого ненулевого идеала L кольца S каждый элемент из $(ML \cap F)/FL$ аннулируется произведением элементов, сопряженных с α элементами из Γ.*

Доказательство. Пусть U/F — конечнопорожденный подмодуль в M/F. Тогда существует элемент $x = \alpha^{g_1} \ldots \alpha^{g_n}$, где $g_i \in \Gamma$, такой, что $Ux \le F$. Отсюда

$$(UL + F)(L + X) \le ULX + FL \le FL + FL,$$

и лемма следует из того, что M является объединением подмодулей U. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть Γ — конечнопорожденная метабелева группа конечного специального ранга. Если группа Γ не является почти нильпотентной, то она содержит абелеву нормальную подгруппу без кручения A такую, что $\Delta_\Gamma(A) = 1$ и фактор-группа Γ/A — полициклическая.*

Доказательство проведем индукцией по $r_0(\Gamma)$. Если группа Γ не почти нильпотентная, то она имеет нормальную абелеву подгруппу без кручения B такую, что $\Gamma / C_\Gamma(B)$ — конечнопорожденная абелева и $D = \Delta_\Gamma(B) \neq B$. Если $D = 1$, то утверждение леммы очевидно. Предположим, что $D \neq 1$. Тогда, по предположению индукции, фактор-группа B/D имеет Γ-допустимую абелеву подгруппу K/B такую, что $\Delta_\Gamma(K/B) = 1$. При этом, очевидно, подгруппу K можно выбрать так, что Γ действует на K/B рационально неприводимо. Тогда нетрудно получить существование элемента $g \in C_\Gamma(D)$ такого, что $C_{K/D}(g) = 1$. Отсюда следует, что $A_1 = [K, g]$ — нормальная подгруппа группы Γ и $A_1 \cap D = 1$. По предположению индукции фактор-группа B/A_1 имеет Γ-допустимую подгруппу A такую, что $\Delta_\Gamma(A/B) = 1$ и фактор-группа Γ / A полициклическая. Тогда, очевидно, A и будет искомой подгруппой. Лемма доказана.

Бесконечный финитно-аппроксимируемый модуль M называется минимально бесконечным, если любой его собственный фактор-модуль конечен.

Теорема 2. *Пусть Γ — конечнопорожденная метабелева группа конечного специального ранга, M — финитно-аппроксимируемый $\mathbb{Z}\Gamma$-модуль минимально бесконечного ранга. Тогда M — минимально бесконечный $\mathbb{Z}_p\Gamma$-модуль, где p — простое число.*

Доказательство. Отметим вначале, что аддитивная группа модуля M либо без кручения, либо элементарная абелева p-группа. Действительно, если $t(M) \neq 0$, то M содержит бесконечный подмодуль T такой, что T — элементарная абелева p-группа и $r(M/T) < \infty$. Из последнего соотношения следует, что $|Mp \cap T| < \infty$, откуда $|M/Mp| = \infty$, и, следовательно, $Mp = 0$.

Покажем индукцией по $r_0(\Gamma)$, что M — элементарная абелева p-группа; отсюда будет следовать, что M — минимально бесконечный $\mathbb{Z}_p\Gamma$-модуль. Предположим, что M — группа без кручения. Если группа Γ почти нильпотентная, то по лемме 5.1 работы [8] M содержит свободную абелеву подгруппу бесконечного ранга F такую, что $|\pi(M/F)| < \infty$, и, следовательно, для любого простого $p \overline{\in} \pi(M/F)$ имеем $|M/Mp| = \infty$.

Таким образом, можно предполагать, что группа Γ не является почти нильпотентной. Пусть A — подгруппа из Γ, существование которой следует из леммы 6. Тогда ввиду теоремы 1 достаточно показать, что модуль M имеет $\mathbb{Z}A$-кручение. Если это не так, то согласно следствию 2.1 работы [10] существуют свободный $\mathbb{Z}A$-подмодуль $F \leq M$ и элемент $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}A$ такие, что каждый элемент из M/F аннулируется произведением элементов, сопряженных с α элементами из Γ. Очевидно, существует простое число p такое, что $\alpha \overline{\in} p\mathbb{Z}A$, и, следовательно, для любого $g \in \Gamma$ $\hat{\alpha}^g = \alpha^g + p\mathbb{Z}A$ — ненулевой элемент кольца $\mathbb{Z}_pA \simeq \mathbb{Z}A / p\mathbb{Z}A$. Пусть $\hat{F} = F/Fp$ и $\hat{F}_1 = (Mp \cap F)/Fp$. Тогда, так как $|M/Mp| < \infty$, то $|\hat{F}/\hat{F}_1| < \infty$. По лемме 6 каждый элемент из $\hat{F}_1$ аннулируется произведением элементов, сопряженных с $\hat{\alpha}$ элементами из Γ. Поэтому модуль $\hat{F}$ имеет $\mathbb{Z}_pA$-кручение, что невозможно, так как, очевидно, $\hat{F}$ — свободный $\mathbb{Z}_pA$-модуль. Теорема доказана.

Лемма 7. *Пусть Γ — группа, k — конечное поле, M — минимально бесконечный $k\Gamma$-модуль, Γ_1 — нормальная подгруппа конечного индекса в Γ.*

Тогда существует $k\Gamma_1$*-подмодуль* $M' \leq M$ *такой, что* $|M/M'| < \infty$ *и* $M' = \oplus_{i=1}^{n} M_i$, где M_i *— минимально бесконечные* $k\Gamma_1$*-модули.*

Доказательство. Из [11] следует, что M — нетеров $k\Gamma_1$-модуль, поэтому M содержит $k\Gamma_1$-подмодуль V, максимальный относительно свойства $|M/V| < \infty$. Пусть T — правая трансверсаль подгруппы Γ_1 в группе Γ. Тогда $k\Gamma$-подмодуль $(\bigcap_{t \in T} Vt) \leq M$ нулевой, и, следовательно,

$$M \leq \bigoplus_{t \in T} (M/Vt). \tag{3}$$

Очевидно, что модули M/Vt либо минимально бесконечные, либо почти простые, причем ввиду финитной аппроксимируемости модуля M и соотношения (3) последний случай невозможен. Таким образом, $M \leq \oplus_{i=1}^{n} B_i$, где B_i — минимально бесконечные $k\Gamma_1$-модули, причем можно считать, что $B_i \cap M = M_i \neq 0$. Тогда можно положить $M' = \oplus_{i=1}^{n} M_i$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть Γ — конечнопорожденная метабелева группа конечного специального ранга, $\Delta(\Gamma)$ — ее FC-центр, k — конечное поле, M — минимально бесконечный $k\Gamma$-модуль такой, что $C_\Gamma(M)$. Тогда:*

1. *Если $|\Delta(\Gamma)| = \infty$, то Γ — конечное расширение свободной абелевой группы конечного ранга.*

2. *Если $|\Delta(\Gamma)| < \infty$, то существуют нормальная подгруппа конечного индекса $\Gamma_1 \leq \Gamma$ и $k\Gamma_1$-подмодуль $M' \leq M$ такие, что $M' = \oplus_{i=1}^{n} M_i$, где M_i — минимально бесконечные $k\Gamma_i$-модули и $\Gamma_1/C_\Gamma(M_i) = A_i \leftthreetimes H_i$, где H_i — свободная абелева группа конечного ранга и A_i — нетеров H_i-плинтус.*

Доказательство. **1.** Следует из теоремы 2 работы [12].

2. Отметим, что ввиду леммы 7 группу Γ можно заменить любой ее нормальной подгруппой конечного индекса. Поэтому, так как $|\Delta(\Gamma)| < \infty$ и Γ удовлетворяет условию $\max - \Gamma$, можно считать, что Γ имеет нормальную подгруппу без кручения A такую, что Γ/A — свободная абелева группа, $\Delta_\Gamma(A) = 1$, и A содержит Γ-плинтус B такой, что если $A \neq B$, то фактор-группа A/B без кручения. Тогда ввиду утверждения 2.4,IV работы [3] достаточно показать, что $A = B$. Доказательство проведем индукцией по $r_0(\Gamma)$, для чего ввиду теоремы 1 достаточно показать, что M имеет kA-кручение. Предположим, что M без kA-кручения. Тогда по следствию 2.1 работы [10] существуют свободный $\mathbb{Z}A$-подмодуль $F \leq M$ и элемент $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}A$ такие, что каждый элемент из M/F аннулируется произведением элементов, сопряженных с α элементами из Γ. Пусть $\alpha = \sum_i \beta_i t_i$, где $\beta_i \in kB$, t_i — элементы правой трансверсали B в A и X — идеал в kB, порожденный элементом $\prod_i \beta_i$. По лемме 2 существует максимальный идеал L кольца kB, не содержащий идеалов, сопряженных с X элементами из Γ. Отсюда следует, что kAL не содержит элементов, сопряженных с α элементами из Γ. Таким образом, для любого $g \in \Gamma$ $\hat{\alpha}^g = \alpha^g + kAL$ — ненулевой элемент кольца $S = kA/kAL$. Пусть $\hat{F} = F/FL$ и $\hat{F}_1 = (ML \cap F)/FL$. Тогда, так как $|M/ML| < \infty$, то $|\hat{F}/\hat{F}_1| < \infty$.

По лемме 6 каждый элемент из $\hat{F}_1$ аннулируется произведением элементов, сопряженных с $\hat{\alpha}$ элементами из Γ. Поэтому модуль $\hat{F}$ имеет S-кручение, что невозможно, так как, очевидно, $\hat{F}$ — свободный S-модуль. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть G — конечнопорожденная финитно-аппроксимируемая разрешимая группа минимально бесконечного ранга, ступень разрешимости которой не превышает числа 3, $M = \mathrm{Fitt}\,(G)$ — ее нильпотентный радикал. Тогда M — элементарная абелева p-группа, $M = C_G(M)$, и M — минимально бесконечный $\mathbb{Z}_p\Gamma$-модуль, где $\Gamma = G/M$.*

Доказательство. Пусть M — максимальная абелева нормальная подгруппа группы G. Тогда M — $\mathbb{Z}\Gamma$-модуль минимально бесконечного ранга, и из теоремы 2 следует, что M — элементарная абелева p-группа и M — минимально бесконечный $\mathbb{Z}_p\Gamma$-модуль, где $\Gamma = G/M$. Предположим, что $M \neq \neq \mathrm{Fitt}(G)$. Тогда существует нормальная нильпотентная подгруппа $N \leq G$ такая, что $Z(N) \leq M \leq N$ и $r(N/M) < \infty$. Из последнего соотношения следует, что $|M \cap N^p| \leq \infty$. Тогда из минимальной бесконечности модуля M вытекает $M \cap N^p = 1$. Отсюда $r(G/N^p) = \infty$, и, следовательно, $N^p = 1$. Из последнего равенства следует, что $|N/M| < \infty$ и, значит, $|[N, N]| < \infty$, а так как группа минимально бесконечного ранга, очевидно, не содержит собственных конечных нормальных подгрупп, то $[N, N] = 1$. Таким образом, $N = M$, и, следовательно, $M = = \mathrm{Fitt}(G)$. Равенство $M = C_G(M)$ является известным свойством нильпотентного радикала разрешимых групп. Теорема доказана.

В заключение отметим, что с помощью теоремы 4 изучение рассматриваемых в ней групп в значительной степени сводится к изучению минимально бесконечных модулей над конечнопорожденными метабелевыми группами конечного специального ранга, а в теореме 3 содержится информация об этих модулях, которая позволяет получить детальное описание конечнопорожденных финитно-аппроксимируемых разрешимых групп минимально бесконечного ранга, ступень разрешимости которых не превышает числа 3, подобно тому, как это было сделано в [3] для разрешимых минимально не полициклических групп.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Robinson D. J. S., Zang Z.* Groups whose proper quotients have finite derived subgroups // J. Algebra. – 1988. – **118**. – P. 346 – 368.
3. *Robinson D. J. S., Wilson J. S.* Soluble groups with many polycyclic quotients // Proc. London Math. Soc. – 1984. – **48**, №2. – P. 193 – 229.
4. *Roseblade J. E.* Groups rings of polycyclic groups // J. Pure and Appl. Algebra. – 1973. – **3**, №4. – P. 307 – 328.
5. *Brookes C. J. B.* Ideals in group rings of soluble groups of finite rank // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1985. – **97**. – P. 27 – 49.
6. *Hall P.* Finiteness conditions for soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1954. – **4**, №16. – P. 419 – 436.
7. *Чарин В. С.* О группах автоморфизмов нильпотентных групп // Укр. мат. журн. – 1954. – **6** №3. – С. 295 – 304.
8. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1959. – **9**, №36. – P. 595 – 622.
9. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра. – М.: Наука, 1971. – 709 с.
10. *Brown K. A.* The nullstellensatz for cerrtain group rings // J. London Math. Soc. – 1982. – **2**, №26. – P. 425 – 434.
11. *Wilson J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z. – 1970. – **144**, №1. – S. 19 – 21.
12. *Тушев А. В.* Минимально бесконечные модули над локально полициклическими группами конечного ранга // IV симп. по теории колец, алгебр и модулей: Тез. сообщ. – Львов, 1990. – С. 126.

Получено 24.09.91