УДК 517.946

Ю. О. Митропольський, акад.,
Л. Г. Хома, асп. (Ін-т математики АН України, Київ)

ІСНУВАННЯ КЛАСИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

The problem on solvability of a mixed problem for a linear hyperbolic partial-differential equation of second order is studied. The minimal necessary and sufficient conditions are found for the existence of a unique classic solution of this problem.

Вивчаються питання розв'язності однієї мішаної задачі для лінійного гіперболічного рівняння в частинних похідних другого порядку. Встановлені мінімальні необхідні та достатні умови існування єдиного класичного розв'язку даної задачі.

Розглянемо питання існування та єдиності класичного розв'язку мішаної задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + k(x,t)u + f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \le x \le \pi. \tag{3}$$

Як відомо [1], мішана задача (1) – (3) еквівалентна в області $\Pi_T = \{(x,t):\ 0 \le \le x \le \pi,\ 0 \le t \le T\}$ такій мішаній задачі для гіперболічної системи першого порядку:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}(x,t)u_j + f_i(x,t), \quad i = 1, 2, 3, \tag{4}$$

$$u_1(0,t) + u_2(0,t) = 0, \quad u_1(\pi,t) + u_2(\pi,t) = 0, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} u_1(x,0) = \psi(x) + \varphi'(x) \equiv \varphi_1(x), \\ u_2(x,0) = \psi(x) - \varphi'(x) \equiv \varphi_2(x), \quad u_3(x,0) = u(x,0) = \varphi(x) \equiv \varphi_3(x), \end{gathered} \tag{6}$$

де

$$u_3 = u, \quad \alpha = (-1)^i, \quad i = 1, 2, \quad \alpha_3 = 0, \quad f_i = f(x,t), \quad i = 1, 2, \quad f_3 = 0, \tag{7}$$

а коефіцієнти a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, утворюють матрицю

$$\begin{pmatrix} (b(x,t)+c(x,t))/2 & (b(x,t)-c(x,t))/2 & k(x,t) \\ (b(x,t)+c(x,t))/2 & (b(x,t)-c(x,t))/2 & k(x,t) \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Зауважимо, що задача (4)–(6) в класі функцій $u_i(x,t) \in C^1(\Pi_T)$, $i = 1, 2, 3$, еквівалентна системі інтегральних рівнянь типу Вольтерра [2]. Для написання системи інтегральних рівнянь припустимо, що $T > \pi/2$, і проведемо через точки $(0,0)$ і $(\pi,0)$ всі характеристики системи (4) в прямокутнику Π_T. Це будуть прямі $x = t$ і $x = \pi - t$, які перетнуться в точці $(\pi/2; \pi/2)$. Розглянемо прямокутник $\Pi_{T_1} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2:\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le \pi/2\}$. Вказані характеристики поділять його на три частини $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta}_1$ і $\overline{\Delta}_2$, які є трикутниками, причому область $\overline{\Delta}$ обмежена характеристиками $x = t$, $x = \pi - t$ і віссю Ox ($t = 0$); область $\overline{\Delta}_1$ — віссю Ot ($x = 0$), характеристикою $x = t$ і прямою $t = \pi/2$; область $\overline{\Delta}_2$ — характеристикою $x = \pi - t$; прямими $x = t$, $t = \pi/2$.

Взагалі, прямокутник Π_T можна розбити прямими $t = n\pi/2$ на скінченне число прямокутників, всередині яких характеристики $x = t - k\pi/2$, $x = \pi + k\pi/2 - t$, $k = 0, 1, \ldots, n$, перетинаються (у випадку, коли характеристики не перетинаються ($k\pi/2 \le t < (k+1)\pi/2$, подальші міркування аналогічні). Тому обмежимося розглядом мішаної задачі (4) – (6) в прямокутнику Π_{T_1}.

Справді, якщо відомий розв'язок мішаної задачі в прямокутнику Π_{T_1}, то тоді відомі значення функцій $u_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$, на прямій $t = \pi/2$. Приймаючи значення функцій $u_i(x, t)$ на прямій $t = \pi/2$ за початкові значення, одержуємо мішану задачу для прямокутника Π_{T_2} вже розглядуваного типу і т. д., поки не дійдемо до прямої $t = T$.

Розглянемо прямокутник Π_{T_1}, зокрема область $\overline{\Delta}$. Згідно з [2], в цій області мішана задача (4) – (6) еквівалентна такій системі інтегральних рівнянь:

$$u_1(x, t) = \varphi_1(x+t) + \int_0^t \sum_{j=1}^3 a_{1j}(x+t-\tau, \tau)\, u_j(x+t-\tau, \tau)\, d\tau + \int_0^t f(x+t-\tau, \tau)\, d\tau,$$

$$u_2(x, t) = \varphi_2(x-t) + \int_0^t \sum_{j=1}^3 a_{2j}(x-t+\tau, \tau)\, u_j(x-t+\tau, \tau)\, d\tau + \int_0^t f(x-t+\tau, \tau)\, d\tau, \tag{9}$$

$$u(x, t) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \{u_1(x, \theta) + u_2(x, \theta)\}\, d\theta.$$

Нехай тепер $(x, t) \in \overline{\Delta}_1$. В даній області мішана задача (4) – (6) з урахуванням першої крайової умови (5) еквівалентна системі інтегральних рівнянь

$$u_1(x, t) = \varphi_1(x+t) + \int_0^t \sum_{j=1}^3 a_{1j}(x+t-\tau, \tau)\, u_j(x+t-\tau, \tau)\, d\tau + \int_0^t f(x+t-\tau, \tau)\, d\tau,$$

$$u_2(x, t) = -\varphi_1(t-x) - \int_0^{t-x} \sum_{j=1}^3 a_{1j}(t-x-\tau, \tau)\, u_j(t-x-\tau, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{t-x}^t \sum_{j=1}^3 a_{2j}(x-t+\tau, \tau)\, u_j(x-t+\tau, \tau)\, d\tau + \int_0^t \tilde{f}(x-t+\tau, \tau)\, d\tau, \tag{10}$$

$$u(x, t) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \{u_1(x, \theta) + u_2(x, \theta)\}\, d\theta,$$

де $\tilde{f}$ — непарне, 2π-періодичне продовження функції $f(x, t)$ по змінній x з відрізка $[0, \pi]$ на всю числову вісь.

Розглянемо область $\overline{\Delta}_2$. В цій області мішана задача (4) – (6) з урахуванням другої крайової умови (5) еквівалентна такій системі інтегральних рівнянь:

$$u_1(x, t) = -\varphi_2(2\pi - x - t) - \int_0^{t-\pi+x} \sum_{j=1}^3 a_{2j}(2\pi - x - t + \tau, \tau)\, u_j(2\pi - x - t +$$

$$+\tau, \tau)\,d\tau + \int\limits_{t-\pi+x}^{t} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}(x+t-\tau, \tau)\, u_j(x+t-\tau, \tau)\, d\tau + \int\limits_{0}^{t} \tilde{f}(x+t-\tau, \tau)\, d\tau, \tag{11}$$

$$u_2(x,t) = \varphi_2(x-t) + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{3} a_{2j}(x-t+\tau, \tau)\, u_j(x-t+\tau, \tau) d\tau + \int\limits_0^t \tilde{f}(x-t+\tau, \tau) d\tau,$$

$$u(x,t) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \{u_1(x,\theta) + u_2(x,\theta)\} d\theta.$$

Використовуючи зображення (9) – (11), доведемо одну із теорем існування та єдиності класичного розв'язку мішаної задачі (1) – (3) при мінімальних умовах, накладених на коефіцієнти і функції.

Теорема 1. *Для існування та єдиності класичного розв'язку мішаної задачі* (1)–(3) *в області* Π_T *необхідно і достатньо, щоб функції* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $k(x,t)$, $f(x,t)$ *задовольняли умови погодження*

$$\varphi(u) = \varphi(\pi) = 0, \tag{12}$$

$$\psi(u) = \psi(\pi) = 0, \tag{13}$$

$$\varphi''(0) = -c(0,0)\varphi'(0), \quad \varphi''(\pi) = -c(\pi,0)\varphi'(\pi), \tag{14}$$

і умови

$$\varphi(x) \in C^2_{[0,\pi]}, \quad \psi(x) \in C^1_{[0,\pi]}, \tag{15}$$

$$b(x,t),\ c(x,t),\ k(x,t) \in C^{1,0}(\Pi_T) \tag{16}$$

або

$$b(x,t),\ c(x,t),\ k(x,t) \in C^{0,1}(\Pi_T),$$

$$f(x,t) \in C(\Pi_T), \tag{17}$$

$$p^-(x,t) = \int\limits_0^t \tilde{f}(x+t-\tau, \tau)\, d\tau \in C^1(\Pi_T), \tag{18}$$

$$p^+(x,t) = \int\limits_0^t \tilde{f}(x-t+\tau, \tau)\, d\tau \in C^1(\Pi_T), \tag{19}$$

Доведення. Нехай існує класичний розв'язок мішаної задачі (1)–(2). Тоді з рівності (1) випливають включення

$$b(x,t),\ c(x,t),\ k(x,t),\ f(x,t) \in C(\Pi_T). \tag{20}$$

Як відомо з попереднього, мішана задача (1)–(3) в області Π_T еквівалентна мішаній задачі (4)–(6). Виконаємо зазначеним вище способом розбиття області Π_T на часткові прямокутники Π_{T_k} і розглянемо прямокутник Π_{T_1}, зокрема область $\overline{\Delta}$. У розглядуваній області $\overline{\Delta}$ мішана задача (4) – (6) зводиться до системи інтегральних рівнянь (9), з якої на основі умов (6) випливають включення

$$\varphi(x) \in C^1_{[0,\pi]}, \quad \psi(x) \in C_{[0,\pi]}, \tag{21}$$

$$\int\limits_0^t \tilde{f}(x+t-\tau, \tau)\, d\tau, \quad \int\limits_0^t \tilde{f}(x-t+\tau, \tau)\, d\tau \in C(\Pi_T). \tag{22}$$

Враховуючи, що $u_i(x,t) \in C^1(\overline{\Delta})$, $i = 1, 2, 3$, і диференціюючи рівності (9) по x, одержуємо, виходячи з умов (6), що повинні виконуватись ще такі умови:

$$b(x,t),\ c(x,t),\ k(x,t) \in C^{1,0}(\Pi_T), \tag{23}$$

$$\varphi(x) \in C^2_{[0,\pi]}, \quad \psi(x) \in C^1_{[0,\pi]}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \tilde{f}(x+t-\tau,\tau)\,d\tau, \ \ \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \tilde{f}(x-t+\tau,\tau)\,d\tau \in C(\Pi_T). \tag{25}$$

Аналогічно, диференціюючи рівності (9) по t, одержуємо, виходячи з умов (6), включення (23), (24) і

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \tilde{f}(x+t-\tau,\tau)\,d\tau, \ \ \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \tilde{f}(x-t+\tau,\tau)\,d\tau \in C(\Pi_T). \tag{26}$$

Щодо другої умови (16), то вона випливає з існування класичного розв'язку мішаної задачі (1)–(3) і з рівностей (9), записаних у вигляді

$$u_1(x,t) = \varphi_1(x+t) - \int_{x+t}^{x}\sum_{j=1}^{3} a_{1j}(y,t+x-y)\,u_j(y,t+x-y)dy + \int_0^t \tilde{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau,$$

$$u_2(x,t) = \varphi_2(x-t) + \int_{x-t}^{x}\sum_{j=1}^{3} a_{2j}(y,t-x+y)\,u_j(y,t-x+y)\,dy + \int_0^t \tilde{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau, \tag{27}$$

$$u(x,t) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \{u_1(x,\theta)+u_2(x,\theta)\}d\theta$$

при диференціюванні по x і t.

Оскільки в областях $\overline{\Delta}_1 \subset \Pi_{T_1}$, $\overline{\Delta}_2 \subset \Pi_{T_1}$ системи інтегральних рівнянь (10), (11) мають аналогічний системі (9) вигляд, то з існування класичного розв'язку мішаної задачі (1)–(3) випливає, що умови (15)–(19) є необхідними і в областях $\overline{\Delta}_1$ і $\overline{\Delta}_2$, а значить, у всьому прямокутнику Π_{T_1}. Проводячи подібні міркування для решти прямокутників згаданого вище розбиття, переконуємось в необхідності виконання умов (15)–(19) у всьому прямокутнику Π_T.

Оскільки $u(x,t) \in C(\Pi_T)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, то справедлива умова погодження $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Так як

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(\Pi_T), \ \ \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial t} = 0, \ \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

то випливає, що $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$. Далі, функція $u(x,t)$ задовольняє рівняння (1) в усіх точках (x,t), а значить, і в точках $(0,0)$, $(\pi,0)$. Здійснюючи граничний перехід у рівнянні (1) при $(x \to 0, t \to 0)$ і $(x \to \pi, t \to 0)$, на основі леми [3, с. 66] одержуємо умову погодження (14).

Нехай тепер, навпаки, функції $b(x,t)$, $c(x,t)$, $k(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ задовольняють умови (12) – (19) теореми 1. Покажемо, що при виконанні вказаних умов існує єдиний класичний розв'язок мішаної задачі (1) – (3) в прямокутнику Π_T. При цьому скористаємося еквівалентністю мішаних задач (1) – (3) і (4) – (6) і встановимо спочатку існування та єдиність класичного розв'язку задачі (1) – (3) в прямокутнику Π_{T_1}, розбивши його на трикутники Δ, Δ_1, Δ_2, як було вказано вище.

Розглянемо лінійну систему інтегральних рівнянь (9) ((27)) в області $\overline{\Delta}$.

Враховуючи позначення (8) для коефіцієнтів і умови теореми 1, маємо включення

$$a_{ij}(x,t) \in C^{1,0}(\Pi_T) \text{ або } a_{ij}(x,t) \in C^{0,1}(\Pi_T). \qquad (28)$$

Система інтегральних рівнянь (9) ((27)) в силу неперервності коефіцієнтів $a_{ij}(x,t)$ має єдиний розв'язок $(u_1^0(x,t), u_2^0(x,t), u_3^0(x,t)) \in C(\overline{\Delta})$, який можна знайти методом послідовних наближень [4, с. 94] і який перетворює систему (9) ((27)) в тотожність. Враховуючи умови (28) і диференціюючи одержані тотожності по x, одержуємо систему інтегральних рівнянь для знаходження похідних $\partial u_i^0(x,t)/\partial x$, $i = 1, 2, 3$. Оскільки виконуються умови (18), (19) і (28), то одержана система має єдиний розв'язок $\partial u_i^0(x,t)/\partial x \in C(\overline{\Delta})$, $i = 1, 2, 3$. Аналогічно, диференціюючи рівності (9) ((27)) по t, одержуємо систему інтегральних рівнянь для знаходження похідних $\partial u_i^0(x,t)/\partial t$, $i = 1, 2, 3$, яка має єдиний розв'язок $\partial u_i^0(x,t)/\partial t \in C(\overline{\Delta})$, $i = 1, 2, 3$.

Знаходячи суму $\partial u_i^0(x,t)/\partial t + \alpha_i \partial u_i^0(x,t)/\partial x$, де $i = 1, 2, 3$, $\alpha_i = (-1)^i$, $i = 1, 2$, $\alpha_3 = 0$, і враховуючи лему [3, с. 101], переконуємось, що функція $u^0(x,t) = u_3^0(x,t)$ є єдиним класичним розв'язком рівняння (1) в області $\overline{\Delta}$.

Здійснюючи аналогічні міркування для систем інтегральних рівнянь (10) і (11), знаходимо єдиний класичний розв'язок $u^1(x,t)$ і $u^2(x,t)$ рівняння (1) відповідно в областях $\overline{\Delta}_1$ і $\overline{\Delta}_2$.

Таким чином, ми побудували в прямокутнику Π_{T_1} розв'язок рівнянь (1) виду

$$u(x,t) = \begin{cases} u^0(x,t), & (x,t) \in \overline{\Delta} = \{(x,t) : t \le x \le \pi - t,\ 0 \le t \le \pi/2\}, \\ u^1(x,t), & (x,t) \in \overline{\Delta}_1 = \{(x,t) : 0 \le x \le t,\ 0 \le t \le \pi/2\}, \\ u^2(x,t), & (x,t) \in \overline{\Delta}_2 = \{(x,t) : \pi - t \le x \le \pi,\ 0 \le t \le \pi/2\}. \end{cases} \qquad (29)$$

Покажемо, що він є класичним розв'язком мішаної задачі (1)–(3) в прямокутнику Π_{T_1}.

Покладаючи $t = 0$ в рівностях (9) і враховуючи умови (6), одержуємо, що побудована функція $u(x,t)$ задовольняє першу початкову умову $u(x,0) = \varphi(x)$. Аналогічно з рівностей для похідних $\partial u_i^0(x,t)/\partial t$, $i = 1, 2, 3$, одержуємо, що вказана функція $u(x,t)$ задовольняє другу початкову умову (3). Покладаючи $x = 0$ в рівностях (10) і $x = \pi$ в рівностях (11) і враховуючи умови погодження (12), маємо, що $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ для всіх $t \in [0, \pi/2]$.

Обгрунтуємо, що розв'язок $u(x,t)$, який визначається за допомогою формули (29) належить класу $C^2(\Pi_{T_1})$, якщо виконуються умови (12) – (19). Для цього потрібно перевірити неперервність розв'язку $u(x,t)$ і його похідних до другого порядку включно на характеристиках $x = t$ і $x = \pi - t$.

Для доведення неперервності функції $u(x,t)$ на прямій $x = t$ підставимо значення $t = x$ в системи (9) і (10). Враховуючи початкові умови (6), першу умову погодження (13) і єдиність розв'язку системи (9), одержуємо

$$u_1^0(x,x) = u_1^1(x,x), \quad u_2^0(x,x) = u_2^1(x,x), \quad u^0(x,x) = u^1(x,x), \qquad (30)$$

тобто функція $u(x,t)$ неперервна на характеристиці $x = t$. Аналогічно переконуємося, що функція $u(x,t)$ неперервна на характеристиці $x = \pi - t$.

Використовуючи рівності (30) і формули переходу [1, с. 13] від мішаної задачі (1) – (3) до задачі (4) – (6), маємо, що частинні похідні першого порядку від функції $u(x, t)$ є неперервними на характеристиках $x = t$ і $x = \pi - t$.

Для обгрунтування неперервності других частинних похідних функції $u(x, t)$ на характеристиках $x = t$ і $x = \pi - t$ будуть використані рівності

$$\frac{\partial^2 u^m(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_1^m(x,t) + u_2^m(x,t)}{2} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1^m(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u_2^m(x,t)}{\partial t} \right), \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 u^m(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_1^m(x,t) - u_2^m(x,t)}{2} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1^m(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u_2^m(x,t)}{\partial x} \right), \tag{32}$$

$$m = 0, 1, 2.$$

Підставимо спочатку значення $t = x$ в системи для знаходження похідних $\partial u_i^m(x, t)/\partial x$, $i = 1, 2, 3$, $m = 0, 1$. Враховуючи початкові умови (6), позначення коефіцієнтів (8), першу умову погодження (14), єдиність розв'язку системи інтегральних рівнянь для знаходження похідних $\partial u_i^0(x, t)/\partial x$, $i = 1, 2, 3$, і рівності (32), маємо, що друга похідна по x від функції $u(x, t)$ є неперервною функцією на прямій $x = t$. Аналогічними міркуваннями можна показати, що друга похідна по x від функції $u(x, t)$ є неперервною функцією на прямій $x = \pi - t$.

Тепер підставимо значення $t = x$ в системи для знаходження похідних $\partial u_i^m(x, t)/\partial x$, $i = 1, 2, 3$, $m = 0, 2$. Враховуючи початкові умови (6), позначення коефіцієнтів (8), першу умову погодження (14), єдиність розв'язку системи інтегральних рівнянь для знаходження похідних $\partial u_i^0(x, t)/\partial t$, $i = 1, 2, 3$, і рівності (31), маємо, що друга частинна похідна по t від функції $u(x, t)$ є неперервною функцією на характеристиці $x = t$. По аналогії переконуємося, що друга похідна по t від функції $u(x, t)$ є неперервною функцією на прямій $x = \pi - t$.

Отже, ми побудували єдиний класичний розв'язок $u(x, t)$, визначений формулою (29), мішаної задачі (1)–(3) в прямокутнику Π_{T_1}. Тоді нам відомі значення функції на прямій $t = \pi/2$. Приймаючи

$$u\left(x, \frac{\pi}{2} \right) = \varphi^*(x), \quad \frac{\partial u(x, \pi/2)}{\partial t} = \psi^*(x)$$

за початкові умови, одержуємо мішану задачу для прямокутника $\Pi_{T_2} = \{(x, t)$: $0 \le x \le \pi$, $\pi/2 \le t \le \pi\}$ вже розглядуваного типу і т. д. По аналогії з прямокутником Π_{T_1}, мішана задача (1)–(3) має єдиний класичний розв'язок в усіх областях Π_{T_k} таких, що $\bigcup_k \Pi_{T_k} = \Pi_T$. Теорема 1 доведена.

Теорема 1 дає можливість сформулювати необхідні та достатні умови існування і єдиності класичного розв'язку мішаної задачі виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)\, u = 0, \tag{33}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{34}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{35}$$

які одержані іншим методом в роботі [3].

***Наслідок* 1.** *Для існування та єдиності класичного розв'язку мішаної задачі* (33) – (35) *в області* Π_T *необхідно і достатньо, щоб функції* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(x)$ *задовольняли умови погодження* (12), (13), (15) *і умови*

$$\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0, \tag{36}$$

$$q(x) \in C_{[0,\pi]}. \tag{37}$$

Доведення. При доведенні виходитимемо з того, що задачу (33)–(35) можна розглядати як мішану задачу (1)–(3), коли $f(x, t) \equiv 0$, $b(x, t) \equiv 0$, $c(x, t) \equiv 0$, $k(x, t) = q(x)$. Зрозуміло, що з умови (37) випливає включення $q(x) \in C^{0,1}(\Pi_T)$. Таким чином, виконуються всі умови теореми 1 для мішаної задачі (33)–(35), а значить, вона має єдиний класичний розв'язок $u(x, t)$ в області Π_T.

Зауваження. Встановлені в лемі 4.1 [3, с. 66] граничні умови $f(0, t) = f(\pi, t) = 0$ для функції $f(x, t)$ разом з властивістю її неперервності дозволяють зробити корисні висновки відносно продовженої функції $\tilde{f}(z, \tau)$. По-перше,

$$\tilde{f}(z, \tau) [C(\mathbb{R}^1 \times [0, T]). \tag{38}$$

По-друге, тепер умовам (18), (19) можна надати іншої еквівалентної форми.

Теорема 2. *Для існування та єдиності класичного розв'язку мішаної задачі* (1) – (3) *в області* Π_T *необхідно і достатньо, щоб функції* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$, $k(x, t)$, *задовольняли умови погодження* (12) – (14) *і умови* (15), (16), *функція* $f(x, t)$ *задовольняла умову* (17) *і граничну умову*

$$f(0, t) = f(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{39}$$

а кожний з інтегралів $p^-(x, t)$, $p^+(x, t)$, *які визначаються згідно з формулами* (18), (19), *належав хоча б одному з класів* $C^{1,0}(\Pi_T)$ *або* $C^{0,1}(\Pi_T)$.

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 2 роботи [3].

В порівнянні з теоремою 1 теорема 2 дозволяє спростити процедуру перевірки умов розв'язності мішаної задачі (1) – (3). Замість перевірки чотирьох включень, які об'єднані у твердженнях (18), (19), достатньо згідно з теоремою 2 переконатися в справедливості тільки двох з них — по одному на кожну з функцій $p^-(x, t)$, $p^+(x, t)$, додавши умову (39), яка легко перевіряється.

На закінчення запропонуємо для мішаної задачі (1) – (3) два типи достатніх умов розв'язності, більш жорстких, ніж (17) – (19), але виражених в більш звичних термінах в порівнянні з (18), (19).

Наслідок 2. *Якщо функції* $b(x, t)$, $c(x, t)$, $k(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *задовольняють умови теореми* 1, *а функція* $f(x, t)$ *задовольняє умову* (39) *і умову* $f(x, t) \in C^{1,0}(\Pi_T)$, *то існує єдиний класичний розв'язок мішаної задачі* (1) – (3) *в області* Π_T.

Доведення базується на виведенні умов теореми 1 з даного наслідку.

Наслідок 3. *Якщо функції* $b(x, t)$, $c(x, t)$, $k(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *задовольняють умови теореми* 2, *а функція* $f(x, t)$ *задовольняє умову* (39) *і умову* $f(x, t) \in C^{0,1}(\Pi_T)$, *то існує єдиний класичний розв'язок мішаної задачі* (1) – (3) *в області* Π_T.

Доведення базується на виведенні умов теореми 2 з даного наслідку.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* Об эффективности применения асимптотических методов к квазиволновым уравнениям гиперболического типа. – Киев, 1989. – 32 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 89.15).
2. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. – 1958. – **20**, № 3. – С. 87–104.
3. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 112 с.
4. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

Одержано 20.01.93