УДК 519.21

Л. Б. Вовк, мл. научн. сотр. (Ин-т кибернетики АН Украины, Киев),
Р. Е. Майборода, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ОБ ОЦЕНИВАНИИ МОМЕНТА РАЗЛАДКИ ДЛЯ ПРОЦЕССА ТИПА ОРНШТЕЙНА – УЛЕНБЕКА

A consistent estimate is constructed for the disorder time of a process of Ornstein–Uhlenbeck type. The rate of almost sure convergence of this estimate is investigated and the confidence interval is obtained.

Побудовано слушну оцінку для моменту розладки процесу типу Орнштейна – Уленбека. Досліджено швидкість збіжності цієї оцінки майже напевно та одержано надійний інтервал.

Рассмотрим случайный процесс, заданный стохастическим дифференциальным уравнением $dx_t = \alpha x_t dt + b(t) dw(t)$, $t \in [0, 1]$, где $w(t)$ — винеровский процесс,

$$b(t) = \begin{cases} b_1, & t < \theta; \\ b_2, & t \geq \theta, \end{cases} \quad 0 < \theta < 1, \ \alpha < 0,$$

с начальным условием $x_0 \sim N(0, b_1^2 / 2|\alpha|)$. Согласно [1, с. 166], он имеет вид

$$x_t = e^{\alpha t} \left[x_0 + \int_0^t e^{-\alpha s} b(s) \, dw(s) \right]. \tag{1}$$

При $0 < t < \theta$ процесс (1) является процессом Орнштейна – Уленбека. В момент $t = \theta$, называемый моментом разладки, происходит изменение "интенсивности шума" $b(t)$. Задача обнаружения момента разладки заключается в оценке параметра θ по наблюдениям x_t. Предполагается, что x_t можно наблюдать лишь в моменты времени $t = j/N$, $j = 1, \ldots, N$.

Введем процесс

$$y(v) = (1 - v) \sum_{t=0}^{v} (x_{t+\Delta} - x_t)^2 - v \sum_{t=v+\Delta}^{1} (x_{t+\Delta} - x_t)^2,$$

где $v = 0, 1/N, 2/N, \ldots, N/N$, $\Delta = 1/N$.

Доопределим процесс $y(v)$ линейным образом, т. е. при $v < t < v + \Delta$ положим

$$y(t) = (1 - \kappa) \, y(v) + \kappa \, y(v + \Delta), \tag{2}$$

где $\kappa = (t - v)/\Delta$. Определим также

$$\xi(t) = y(t) - E\, y(t). \tag{3}$$

В качестве оценки θ используется

$$\hat{\theta}_N = \arg\max_v |y(v)|. \tag{4}$$

Исследуем асимптотическое поведение оценки $\hat{\theta}_N$ при увеличении количества наблюдений N.

Теорема. *Для любого* $\beta < 1/2$ *существуют* $N_0 = N_0(\omega)$ *и константа* $D > 0$ *такие, что для любого* $N > N_0$ *с вероятностью* 1

$$|\hat{\theta}_N - \theta| \leq D N^{-\beta}. \tag{5}$$

Для доказательства теоремы понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Для процесса* $\xi(t)$, *заданного формулой* (3), *выполняется неравенство*

$$P\{\sup_{t\in[0,1]}|\xi(t)|>x\} \leq \tilde{C}\left[\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}+3e^{1/2}\right]\exp\left\{-\frac{x}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\right\}, \tag{6}$$

где $\tilde{C}$ *и* ε_0 *будут определены ниже.*

Доказательство. Заметим, что

$$\Delta x_t = x_{t+\Delta}-x_t = e^{\alpha t}\left\{(e^{\alpha\Delta}-1)\left[x_0+\int_0^t e^{-\alpha s}b(s)\,dw(s)\right]+\right.$$
$$\left.+\ e^{\alpha\Delta}\int_t^{t+\Delta}e^{-\alpha s}b(s)\,dw(s)\right\}.$$

Для определенности будем считать $t\leq s$. Далее,

$$E\,\Delta x_t\,\Delta x_s = e^{\alpha(t+s)}\left\{(e^{\alpha\Delta}-1)^2\left[Ex_0^2+\int_0^t e^{-2\alpha u}b^2(u)\,du\right]+\right.$$
$$+\ e^{2\alpha\Delta}E\int_t^{t+\Delta}e^{-\alpha u}b(u)\,dw(u)\int_t^{s+\Delta}e^{-\alpha u}b(u)\,dw(u)\ +$$
$$\left.+\ (e^{\alpha\Delta}-1)\,e^{\alpha\Delta}E\int_t^{t+\Delta}e^{-\alpha u}b(u)\,dw(u)\int_0^s e^{-\alpha u}b(u)\,dw(u)\right\}.$$

Пусть $t<s$. Тогда

$$E\,\Delta x_t\,\Delta x_s = e^{\alpha(t+s)}\left\{(e^{\alpha\Delta}-1)^2\left[Ex_0^2+\int_0^t e^{-2\alpha u}b^2(u)\,du\right]+\right.$$
$$\left.+\ (e^{\alpha\Delta}-1)\,e^{\alpha\Delta}\int_t^{t+\Delta}e^{-2\alpha u}b^2(u)\,du\right\}.$$

Если $\theta\leq t$, то

$$E\Delta x_t\Delta x_s = e^{\alpha(t+s)}\{(e^{\alpha\Delta}-1)^2[(b_1^2-b_2^2)\,e^{-2\alpha\theta}+b_2^2e^{-2\alpha t}]\ +$$
$$+\ (e^{\alpha\Delta}-1)e^{\alpha\Delta}\,b_2^2e^{-2\alpha t}\}\,/\,2|\alpha|.$$

Обозначая

$$B=\max(|b_1|,|b_2|), \tag{7}$$

имеем

$$E\,\Delta x_t\,\Delta x_s \leq (e^{\alpha\Delta}-1)^2\,e^{\alpha(s-t)}B^2/2|\alpha|. \tag{8}$$

Если $\theta>t$, то

$$E\,\Delta x_t\,\Delta x_s \leq (e^{\alpha\Delta}-1)^2\,e^{\alpha(s-t)}\,b_1^2/2|\alpha|. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь случай $t=s$. При этом

$$E\,(\Delta x_t)^2 = e^{2\alpha t}\left\{(e^{\alpha\Delta}-1)^2\left[Ex_0^2+\int_0^t e^{-2\alpha u}b^2(u)\,du\right]+\right.$$
$$\left.+\ e^{2\alpha\Delta}\int_t^{t+\Delta}e^{-2\alpha u}b^2(u)\,du\right\}. \tag{10}$$

Если $\theta\leq t$, то

$$E\,(\Delta x_t)^2 = \frac{e^{2\alpha t}}{2|\alpha|}\{(e^{\alpha\Delta}-1)^2[(b_1^2-b_2^2)\,e^{-2\alpha\theta}+\ b_2^2e^{-2\alpha t}]+e^{-2\alpha t}\,b_2^2(1-e^{2\alpha\Delta})\},$$

$$E\,(\Delta x_t)^2 \leq \frac{1-e^{\alpha\Delta}}{|\alpha|}B^2. \tag{11}$$

Если $\theta>t$, то

$$E\,(\Delta x_t)^2 \leq \frac{1-e^{\alpha\Delta}}{|\alpha|}b_1^2. \tag{12}$$

Оценим дисперсию $\xi(v)$. Имеем

$$D\,\xi(\nu) = 2\Big\{ (1-\nu)^2 \sum_{t=0}^{\nu} \sum_{s=0}^{\nu} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 + \nu^2 \sum_{t=\nu+\Delta}^{1} \sum_{s=\nu+\Delta}^{1} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 -$$

$$- 2\nu\,(1-\nu) \sum_{t=0}^{\nu} \sum_{s=\nu+\Delta}^{1} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 \Big\}. \qquad (13)$$

Пусть $\theta < \nu$. Тогда первая сумма в (13) примет вид

$$\sum_{t=0}^{\nu} \sum_{s=0}^{\nu} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 = \sum_{t=0}^{\theta-\Delta} \sum_{s=0}^{\theta-\Delta} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 + 2\sum_{t=0}^{\theta-\Delta} \sum_{s=\theta}^{\nu} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 +$$

$$+ \sum_{t=\theta}^{\nu} \sum_{s=\theta}^{\nu} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2.$$

С учетом (8), (9), (11) и (12) имеем

$$\sum_{t=0}^{\theta-\Delta} \sum_{s=0}^{\theta-\Delta} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 = \sum_{t=0}^{\theta-\Delta} (E\,\Delta x_t)^2)^2 + \sum_{t\neq s} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 \le \left(\frac{1-e^{\alpha\Delta}}{|\alpha|} b_1^2 \right)^2 \theta N +$$

$$+ \frac{(1-e^{\alpha\Delta})^4}{4|\alpha|^2}\, b_1^4 \sum_{t\neq s} e^{2\alpha(s-t)} = \left(\frac{1-e^{\alpha\Delta}}{|\alpha|} b_1^2 \right)^2 \theta N + \frac{(1-e^{\alpha\Delta})^4}{4|\alpha|^2}\, b_1^4 \Big[\frac{\varphi(\theta)}{\varphi(\Delta)} - \theta N \Big],$$

где

$$\varphi(x) = (1-e^{2\alpha x})(1-e^{-2\alpha x}). \qquad (14)$$

Далее,

$$\sum_{t=0}^{\theta-\Delta} \sum_{s=\theta}^{\nu} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 = -\frac{(1-e^{\alpha\Delta})^4}{4|\alpha|^2}\, b_1^4\, \frac{(1-e^{2\alpha\theta})(1-e^{2\alpha(\nu-\theta+\Delta)})}{\varphi(\Delta)}$$

и

$$\sum_{t=\theta}^{\nu} \sum_{s=\theta}^{\nu} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 \le \left(\frac{1-e^{\alpha\Delta}}{|\alpha|} B^2 \right)^2 (\nu-\theta+\Delta)\,N +$$

$$+ \frac{(1-e^{\alpha\Delta})^4}{4|\alpha|^2}\, B^4 \Big[\frac{\varphi(\nu-\theta+\Delta)}{\varphi(\Delta)} - (\nu-\theta+\Delta)\,N \Big].$$

Вторая сумма из (13) имеет вид

$$\sum_{t=\nu+\Delta}^{1} \sum_{s=\nu+\Delta}^{1} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 \le \left(\frac{1-e^{\alpha\Delta}}{|\alpha|} B^2 \right)^2 (1-\nu)\,N +$$

$$+ \frac{(1-e^{\alpha\Delta})^4}{4|\alpha|^2} B^4 \Big[\frac{\varphi(1-\nu)}{\varphi(\Delta)} - (1-\nu)\,N \Big],$$

а третья —

$$\sum_{t=0}^{\nu} \sum_{s=\nu+\Delta}^{1} (E\,\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 \ge 0.$$

Следовательно, при $\theta < \nu$

$$D\xi(\nu) \le 2\,\Big\{ \frac{(1-e^{\alpha\Delta})^2}{|\alpha|^2} \big[(1-\nu)^2 (b_1^4 \theta\,N + B^4\,(\nu-\theta+\Delta)\,N) + \nu^2\,(1-\nu)\,B^4\,N \big] +$$

$$+ \frac{(1-e^{\alpha\Delta})^4}{4|\alpha|^2} \Big[(1-\nu)^2 \Big[b_1^4 \Big(\frac{\varphi(\theta)}{\varphi(\Delta)} - \theta\,N - 2\,\frac{(1-e^{2\alpha\theta})(1-e^{2\alpha(\nu-\theta+\Delta)})}{\varphi(\Delta)} \Big) +$$

$$+ \ B^4 \left(\frac{\varphi(v-\theta+\Delta)}{\varphi(\Delta)} - (v-\theta+\Delta) N \right) \Big] + v^2 B^4 \left[\left(\frac{\varphi(1-v)}{\varphi(\Delta)} - (1-v) N \right) \right] \Big\}.$$

Воспользовавшись тем, что

$$1 - e^{\alpha \Delta} < |\alpha| \Delta, \tag{15}$$

$$\varphi(x) > -4 |\alpha|^2 x^2 - \frac{8 |\alpha|^3 x^3}{3} \operatorname{sh}(2 |\alpha|), \tag{16}$$

$$\varphi(\Delta) < -4 |\alpha|^2 \Delta^2 (1 - |\alpha|^2 \Delta^2), \tag{17}$$

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(\Delta)} < \frac{4\alpha^2 x^2 + \frac{8|\alpha|^3 x^3}{3} \operatorname{sh}(2|\alpha|)}{4\alpha^2 \Delta^2 (1 - |\alpha|^2 \Delta^2)} < A \frac{x^2}{\Delta^2} \tag{18}$$

при $N > \sqrt{2} |\alpha|$, где

$$A = 2 \left[1 + \frac{2}{3} |\alpha| \operatorname{sh}(2 |\alpha|) \right], \tag{19}$$

$\varphi(x)$ определено в (14), получим

$$D\xi(v) \le 2v(1-v) \Delta \left\{ (1-v) b_1^4 + B^4 + \frac{|\alpha|^2 \Delta}{4} v(1-v) \left[b_1^4 (A+4) + 2B^4 A \right] \right\} \le$$

$$\le \frac{\Delta}{2} \left\{ b_1^4 + B^4 + \frac{|\alpha|^2 \Delta}{16} \left[b_1^4 (A+4) + 2B^4 A \right] \right\}. \tag{20}$$

При $\theta > v$ дисперсия оценивается аналогично первому случаю. Получаем

$$D\xi(v) \le 2 \Big\{ \frac{(1-e^{\alpha\Delta})^2}{|\alpha|^2} \big[(1-v)^2 b_1^4 (v+\Delta) N + v^2 \big[b_1^4 (\theta - v - \Delta) N + B^4 (1 - \theta +$$

$$+ \Delta) N \big] \big] + \frac{(1-e^{\alpha\Delta})^4}{4|\alpha|^2} \Big[(1-v)^2 b_1^4 \Big[\frac{\varphi(v+\Delta)}{\varphi(\Delta)} - (v+\Delta) N \Big] + v^2 \Big[b_1^4 \Big(\frac{\varphi(\theta - v - \Delta)}{\varphi(\Delta)} -$$

$$- (\theta - v - \Delta) N - 2 \frac{(1-e^{2\alpha(\theta - v - \Delta)})(1-e^{2\alpha(1-\theta-\Delta)})}{\varphi(\Delta)} \Big) + B^4 \Big(\frac{\varphi(1-\theta+\Delta)}{\varphi(\Delta)} -$$

$$- (1 - \theta + \Delta) N \Big) \Big] + 2v(1-v) b_1^4 \frac{(1-e^{2\alpha(v+\Delta)})(1-e^{2\alpha(1-\Delta)})}{\varphi(\Delta)} \Big] \Big\}.$$

Используя (15) – (18), имеем

$$D\xi(v) \le 2v(1-v) \Delta \left\{ 2(1-v) b_1^4 + v B^4 + \frac{|\alpha|^2 \Delta}{4} A v (1-v) \left[2b_1^4 + B^4 \right] \right\} \le$$

$$\le \frac{\Delta}{2} \left\{ 2b_1^4 + B^4 + \frac{|\alpha|^2 \Delta}{16} A \left[2b_1^4 + B^4 \right] \right\}. \tag{21}$$

Следовательно, из (20) и (21) находим

$$D\xi(v) \le \frac{\Delta}{2} \max \Big\{ b_1^4 + B^4 + \frac{|\alpha|^2 \Delta}{16} \left[b_1^4 (A+4) + 2B^4 A \right],$$

$$2b_1^4 + B^4 + \frac{|\alpha|^2 \Delta}{16} A \left[2b_1^4 + B^4 \right] \Big\} = \varepsilon_0^2, \tag{22}$$

где B определено в (7), A — в (19).

Оценим теперь дисперсию приращения $D(\xi(u) - \xi(v))$. Пусть для определенности $u < v$. Тогда

$$\xi(u)-\xi(v) = (v-u)\sum_{t=0}^{u}(\Delta x_t)^2 - (1-v+u)\sum_{t=u+\Delta}^{v}(\Delta x_t)^2 + (v-u)\sum_{t=v+\Delta}^{1}(\Delta x_t)^2,$$

$$D(\xi(u)-\xi(v)) = (v-u)^2\sum_{t=0}^{u}\sum_{s=0}^{u}(E\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 + (1-v+u)^2\sum_{t=u+\Delta}^{v}\sum_{s=u+\Delta}^{v}(E\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 +$$

$$+ (v-u)^2\sum_{t=v+\Delta}^{1}\sum_{s=v+\Delta}^{1}(E\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 + 2\Big\{ (v-u)^2\sum_{t=0}^{u}\sum_{s=v+\Delta}^{1}(E\Delta x_t\Delta x_s)^2 - (v-u)\times$$

$$\times (1-v+u)\sum_{t=0}^{u}\sum_{s=u+\Delta}^{v}(E\Delta x_t\,\Delta x_s)^2 - (v-u)(1-v+u)\sum_{t=u+\Delta}^{v}\sum_{s=v+\Delta}^{1}(E\Delta x_t\,\Delta x_s)^2\Big\}.$$

Разбивая каждое слагаемое на части, как это делалось для $D\xi(u)$, и пользуясь затем соотношениями (8), (9), (11), (12), (15)–(18), получаем

1) $\theta \le u < v$:

$$D(\xi(u)-\xi(v)) \le \frac{1}{N}\Big\{ (b_1^4+2B^4)(v-u) + B^4 + \frac{|\alpha|^4}{4N}(v-u)[Ab_1^4 + 4b_1^4 + 3AB^4 +$$

$$+ 4(1+2|\alpha|)(2b_1^4+B^4)]\Big\}(v-u) \le \frac{1}{N}\Big\{ b_1^4 + 3B^4 + \frac{|\alpha|^4}{4N}[Ab_1^4 + 4b_1^4 +$$

$$+ 3AB^4 + 4(1+2|\alpha|)(2b_1^4+B^4)]\Big\}(v-u);$$

2) $u < \theta \le v$:

$$D(\xi(u)-\xi(v)) \le \frac{1}{N}\Big\{ (b_1^4+B^4)(v-u) + b_1^4 + B^4 + \frac{v-u}{N}\Big[\frac{b_1^4+B^4}{8} + b_1^4|\alpha|(1+$$

$$+ 2|\alpha|)(|\alpha|+\frac{1}{2}) + \frac{A|\alpha|^2}{4}(b_1^4(1+|\alpha|^2)+B^4)\Big]\Big\}(v-u) \le \frac{1}{N}\Big\{ 2(b_1^4+B^4) +$$

$$+ \frac{1}{N}\Big[\frac{b_1^4+B^4}{8} + b_1^4|\alpha|(1+2|\alpha|)(|\alpha|+\frac{1}{2}) + \frac{A|\alpha|^2}{4}(b_1^4(1+|\alpha|^2)+B^4)\Big]\Big\}(v-u);$$

3) $u < v \le \theta$:

$$D(\xi(u)-\xi(v)) \le \frac{1}{N}\Big\{ (2b_1^4+B^4)(v-u) + b_1^4 + \frac{v-u}{N}b_1^4[(1+|\alpha|(1+2|\alpha|))/2 + A\times$$

$$\times |\alpha|^2/4]\Big\}(v-u) \le \frac{1}{N}\Big\{ 3b_1^4 + B^4 + \frac{b_1^4}{N}[(1+|\alpha|(1+2|\alpha|))/2 + A|\alpha|^2/4]\Big\}(v-u).$$

Следовательно, существует такая константа C,

$$C^2 = \frac{1}{N}\max\Big\{ b_1^4 + 3B^4 + \frac{|\alpha|^4}{4N}[Ab_1^4 + 4b_1^4 + 3AB^4 + 4(1+2|\alpha|)(2b_1^4+B^4)],$$

$$2(b_1^4+B^4) + \frac{1}{N}\Big[\frac{b_1^4+B^4}{8} + b_1^4|\alpha|(1+2|\alpha|)(|\alpha|+\frac{1}{2}) + \frac{A|\alpha|^2}{4}(b_1^4(1+$$

$$+ |\alpha|^2)+B^4)\Big],\ 3b_1^4 + B^4 + \frac{b_1^4}{N}[(1+|\alpha|(1+2|\alpha|))/2 + A|\alpha|^2/4]\Big\}, \tag{23}$$

что

$$D(\xi(u)-\xi(v)) \le C^2(v-u). \tag{24}$$

Из работы [2, с. 83] следует, что для центрированного гауссовского вектора $\vec{\eta}$ и положительно определенной симметричной матрицы F справедливо неравенство

$$E\,\mathrm{ch}\,\{s(\vec{\eta}'F\vec{\eta}-E\vec{\eta}'F\vec{\eta})/(D\vec{\eta}'F\vec{\eta})^{1/2}\}\le\frac{1}{2}[(1-s\sqrt{2})^{-1/2}/2+$$
$$+\exp(s/\sqrt{2})(1-s^2)^{-1/2}]=R(s)/2,\ \ 0<s<1/\sqrt{2}. \tag{25}$$

Процесс $\xi(t)$, определенный формулой (3), принадлежит классу $K(R)$ [3], где R определена в (25), а $\|\xi\|=(D\xi)^{1/2}$. Из (22) следует, что $\sup\limits_{t\in[0,1]}\|\xi(t)\|\le\varepsilon_0$. Для произвольного $p\in(0,1)$, ε_0, определенного в (22), и $s\in(0,(1-p)/\sqrt{2}\,\varepsilon_0)$ получаем неравенство [3]

$$P\Big\{\sup_{t\in[0,1]}|\xi(t)|>x\Big\}\le\exp(-sx)\Big[\Big(1-\frac{s\sqrt{2}\varepsilon_0}{1-p}\Big)^{-1/2}+$$
$$+3e^{1/2}\Big]r^{(-1)}\Big((p\varepsilon_0)^{-1}\int_0^{p\varepsilon_0}r(N(u))\,du\Big), \tag{26}$$

где $r(u)>0$ — монотонно неубывающая, $r(u)\to\infty$, $u\to\infty$, $r(e^t)$ — выпукла.

Поскольку из (24) следует, что $\sup\limits_{|u-v|<h}D(\xi(u)-\xi(v))^{1/2}\le Ch^{1/2}$, где C определена в (23), то $N(u)\le\left(2\sigma^{(-1)}(u)\right)^{-1}+1$, где $\sigma(h)=Ch^{1/2}$ [4]. Имеем $N(u)\le C^2/2u^2+1$. Исследуем интеграл в (26). Выберем r в виде $r(t)=t^\beta$, $0<\beta<1/2$. Тогда

$$\int_0^{p\varepsilon_0}r(N(u))\,du\le\int_0^{p\varepsilon_0}\Big(\frac{C^2}{2u^2}+1\Big)^\beta du\le\int_0^{p\varepsilon_0}\Big[\Big(\frac{C^2}{2u^2}\Big)^\beta+1\Big]du=$$
$$=p\,\varepsilon_0\Big[\Big(\frac{C^2}{2(p\varepsilon_0)^2}\Big)^\beta\frac{1}{1-2\beta}+1\Big],$$

$$r^{(-1)}\Big((p\,\varepsilon_0)^{-1}\int_0^{p\varepsilon_0}r(N(u))\,du\Big)\le r^{(-1)}\Big(\Big(\frac{C^2}{2(p\varepsilon_0)^2}\Big)^\beta\frac{1}{1-2\beta}+1\Big)=$$
$$=\Big[\Big(\frac{C^2}{2(p\varepsilon_0)^2}\Big)^\beta\frac{1}{1-2\beta}+1\Big]^{1/\beta}\le\Big[\frac{C^2}{2(p\varepsilon_0)^2}(1-2\beta)^{-1/\beta}+1\Big]2^{1/\beta-1}$$

(мы воспользовались неравенством $(x+y)^\gamma\le2^{\gamma-1}(x^\gamma+y^\gamma)$ при $\gamma\ge2$). Функция

$$g(\beta)=(1-2\beta)^{-1/\beta}2^{1/\beta-1}=\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{1-2\beta}\Big]^{1/\beta}$$

на интервале $(0,1/2)$ достигает минимума при $\beta=\beta_0$, β_0 — корень уравнения

$$2\beta-(1-2\beta)\ln(2/(1-2\beta))=0. \tag{27}$$

Таким образом, (26) принимает вид

$$P\Big\{\sup_{t\in[0,1]}|\xi(t)|>x\Big\}\le\exp(-sx)\Big[\Big(1-\frac{s\sqrt{2}\varepsilon_0}{1-p}\Big)^{-1/2}+$$
$$+3e^{1/2}\Big]\Big[C^2(2(p\varepsilon_0)^2)^{-1}(1-2\beta_0)^{-1/\beta_0}+1\Big]2^{1/\beta_0-1}. \tag{28}$$

Полагая в (28) $s=\dfrac{1-p}{\varepsilon_0\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2x}$, получаем, что при $x>\dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}(1-p)}$

$$P\Big\{\sup_{t\in[0,1]}|\xi(t)|>x\Big\}\le\tilde{C}\exp\Big\{-\frac{x}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\Big\}\exp\Big\{\frac{px}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\Big\}\times$$

$$\times\Big[\Big(\frac{\sqrt{2}\,(1-p)x}{\varepsilon_0}\Big)^{1/2}+3\,e^{1/2}\Big], \qquad (29)$$

где

$$\tilde{C} = 2^{1/\beta_0-1}\,e^{1/2}\Big[\,C^2(2(p\varepsilon_0)^2)^{-1}\,(1-2\beta_0)^{-1/\beta_0}+1\,\Big], \qquad (30)$$

β_0 — корень уравнения (27). После минимизации по p функции

$$g_1(p) = \exp\Big\{\frac{px}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\Big\}\Big(\frac{\sqrt{2}\,(1-p)x}{\varepsilon_0}\Big)^{1/2}$$

неравенство (29) примет вид

$$P\Big\{\sup_{t\in[0,1]}|\xi(t)|>x\Big\} \le \tilde{C}\,\Big[\Big(\frac{\sqrt{2}\,x}{\varepsilon_0}\Big)^{1/2}+3\,e^{1/2}\Big]\exp\Big\{-\frac{x}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\Big\},$$

где $\tilde{C}$ определено в (30), а ε_0 — в (22). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $0<q<1$, $\tilde{C}$ *и* ε_0 — *константы, определенные соответственно в* (30) *и* (22), $\tilde{x}_q$ — *корень уравнения*

$$\tilde{C}\,\Big[\Big(\frac{\sqrt{2}\,x}{\varepsilon_0}\Big)^{1/2}+3\,e^{1/2}\Big]\exp\Big\{-\frac{x}{\varepsilon_0\sqrt{2}}\Big\} = q,$$

$x_q=\tilde{x}_q+\Delta[b_1^2+|b_1^2-b_2^2|\,(|\alpha|+1/2)]$, *и существует* ε *такое, что* $0<\varepsilon<\theta<$ $<1-\varepsilon$. *Тогда*

$$P\Big\{|\hat{\theta}_N-\theta|\le\frac{2x_q}{\varepsilon|b_1^2-b_2^2|}\Big\} \ge 1-q. \qquad (31)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$Ey(v) = (1-v)\sum\nolimits_{t=0}^{v}E(\Delta x_t)^2-v\sum\nolimits_{t=v+\Delta}^{1}E(\Delta x_t)^2,$$

где процесс $y(t)$ определен в (3). Воспользовавшись формулами (10) и (15), несложно показать, что $|Ey(t)-l(t)| \le \Delta\,[b_1^2+|b_1^2-b_2^2|(|\alpha|+1/2)]$, где

$$l(t) = \begin{cases} t(1-\theta)(b_1^2-b_2^2), & t\le\theta;\\ \theta(1-t)(b_1^2-b_2^2), & t>\theta.\end{cases}$$

Из (6) следует, что с вероятностью не меньше $1-q$ $|\xi(t)|\le\tilde{x}_q$, и, значит, $|y(t)-$ $-l(t)| \le |\xi(t)|+|Ey(t)-l(t)|\le x_q$. Пусть $b_1^2-b_2^2>0$. Тогда с учетом (4)

$$l(\hat{\theta}_N)+x_q \ge y(\hat{\theta}_N) \ge y(\theta) \ge l(\theta)-x_q,\quad l(\theta)-l(\hat{\theta}_N) \le 2\,x_q,$$

откуда и следует (31). Случай $b_1^2-b_2^2<0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что неравенство (5) является следствием (31), (6) и леммы Бореля – Кантелли.

Замечание. Неравенство (31) дает доверительный интервал для оценки $\hat{\theta}_N$.

1. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
2. *Козаченко Ю. В., Стадник А. И.* О сходимости некоторых функционалов от гауссовских векторов в пространствах Орлича // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1991. – **44**. – С. 80–87.
3. *Козаченко Ю. В., Стадник А. И.* Предгауссовские процессы и сходимость оценок ковариационных функций в $C(T)$ // Там же. – **45**. – С. 54–62.
2. *Козаченко Ю. В.* Случайные процессы в пространствах Орлича. II // Там же. – 1984. – **31**. – С. 44–50.

Получено 16.01.92