УДК 519.48

**В. С. Мазорчук,** студ. (Киев. ун-т)

# $\alpha$-РАССЛОЕННЫЕ МОДУЛИ НАД АЛГЕБРОЙ ЛИ sl $(n, \mathbb{C})$

The properties of the generalized Weyl group are studied for $\alpha$-stratified modules over the Lie algebra sl $(n, \mathbb{C})$.

Вивчені властивості узагальненої групи Вейля для $\alpha$-розшарованих модулів над алгеброю Лі sl $(n, \mathbb{C})$.

Настоящая работа посвящена изучению обобщенных модулей Верма, порожденных $\alpha$-примитивным элементом. Понятие такого модуля дано в [1], для случая алгебры sl $(3, \mathbb{C})$ они частично исследованы в [2]. Для таких модулей над алгеброй sl $(n, \mathbb{C})$ построена группа, имеющая свойства, аналогичные свойствам группы Вейля, связанной с класическими модулями Верма. Получен критерий неприводимости модуля $M(\lambda, p)$ и построен аналог БГГ-резольвенты.

**1. Обозначения и предварительные результаты.** Обозначим черз $\mathfrak{G}$ алгебру Ли sl $(n, \mathbb{C})$; $\Delta = \Delta_{-} \cup \Delta_{+}$ — стандартная система корней алгебры $\mathfrak{G}$; $\pi = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ — множество простых корней; $W$ — группа Вейля системы корней $\Delta$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана, состоящая из диагональных матриц со следом 0; $\mathfrak{n}_{-}$ и $\mathfrak{h}_{+}$ — подалгебры $\mathfrak{G}$, соответствующие множествам $\Delta_{-}$ и $\Delta_{+}$. Тогда $\mathfrak{G} = \mathfrak{n}_{-} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{+}$. Обозначим через $U(\mathfrak{G})$ универсальную обертывающую алгебру алгебры $\mathfrak{G}$. Положим

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_{+}} \alpha.$$

Пусть $\mathfrak{G}_a$ обозначает корневое подпространство, соответствующее корню $a$. Пусть $V$ — некоторый $\mathfrak{G}$-модуль, для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ положим $V_\lambda := \{v \in V \mid hv = \lambda(h)v, \ \forall\, h \in \mathfrak{h}\}$. Если $V_\lambda \neq 0$, то $\lambda$ называется весом модуля $V$ и $V_\lambda$ — соответствующим весовым подпространством. Множество всех весов $V$ обозначается $\mathrm{supp}(V)$. Модуль $V$ называется весовым, если он является прямой суммой своих весовых подпространств. Далее будут рассматриваться только весовые $\mathfrak{G}$-модули.

Элемент $v \in V$ называется примитивным элементом веса $\lambda$, если $\mathfrak{n}_{+}v = 0$. Существует конструкция универсальных модулей, порожденных примитивным элементом. Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ определим $\mathbb{C}$ как $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{+}$-модуль, положив $(h + a)z = (\lambda - \rho)(h)z$, где $h \in \mathfrak{h}$, $a \in \mathfrak{n}_{+}$, $z \in \mathbb{C}$. Модуль

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{G}) \underset{U(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{+})}{\otimes} \mathbb{C}$$

называется модулем Верма и является универсальным объектом в категории $\mathfrak{G}$-модулей, порожденных примитивным элементом. Обозначим через $L(\lambda)$ единственный простой фактор модуля $M(\lambda)$. Напомним следующие свойства модулей Верма [4]:

Пусть $\chi_\lambda$ — центральный характер модуля $M(\lambda)$:

$$\chi_\lambda = \chi_\mu \Leftrightarrow \lambda \in W\mu.$$

Пусть $S_\gamma \in W$ — отражение, соответствующее $\gamma \in \Delta_{+}$. Тогда эквивалентны следующие условия:

1. $M(\lambda) \subset M(\mu)$.
2. $L(\lambda)$ входит в ряд Жордана – Гельдера модуля $M(\mu)$.
3. Существует последовательность $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \subset \Delta_+$ таких корней, что

$$\mu \geq S_{\gamma_1}\mu \geq \ldots \geq S_{\gamma_k} \ldots S_{\gamma_1}\mu = \lambda$$

(на $\mathfrak{h}^*$ определен стандартный частичный порядок).

Для $w \in W$ пусть $l(w)$ — число элементов в приведенном разложении $w$, $\lambda \in P_{++}$ — множество доминантных весов. Тогда точна следующая последовательность:

$$0 \to \bigoplus_{\substack{w \in W \\ l(w) = n_0}} M(w\lambda) \to \ldots \to \bigoplus_{\substack{w \in W \\ l(w) = 1}} M(w\lambda) \to M(\lambda) \to L(\lambda) \to 0$$

(где $n_0 = \mathrm{card}(\Delta_+)$). Эта последовательность называется БГГ-резольвентой модуля $M(\lambda)$.

Введем в рассмотрение еще один класс $\mathfrak{G}$-модулей. Фиксируем $\alpha \in \pi$ Обозначим через $\mathfrak{n}$ алгебру, порожденную корневыми векторами $X_\beta$, $\beta \in \Delta_+ \setminus \{a\}$. Элемент $v \in V_\lambda$ назовем $\alpha$-примитивным элементом веса $\lambda$, если $\mathfrak{n}v = 0$. Пусть $c$ — квадратичный элемент Казимира центра алгебры $U(\mathfrak{G})$. Для $\varepsilon \in \mathbb{C}$ положим $U_\varepsilon = U(\mathfrak{G})/(c - \varepsilon)$. Для $h \in \mathfrak{h}$, $a \in \mathfrak{n}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $z \in \mathbb{C}$ определим $(h + a)z = (\lambda - \rho)(h)z$, превратив $\mathbb{C}$ в $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$-модуль. Модуль

$$M(\lambda, \varepsilon) = U_\varepsilon \bigotimes_{U(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n})} \mathbb{C}$$

называется обобщенным модулем Верма, порожденным $\alpha$-примитивным элементом. Обозначим через $X_\beta$, $(Y_\beta, H_\beta)$ корневые векторы алгебр $\mathfrak{n}_+$, $(\mathfrak{n}_-, \mathfrak{h})$.

**Определение 1.** *$\mathfrak{G}$-модуль $V$ называется $\alpha$-расслоенным, если он без кручения, как $\langle X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha \rangle$- модуль.*

$\alpha$-Расслоенные обобщенные модули Верма являются универсальными объектами в категории $\alpha$-расслоенных $\mathfrak{G}$-модулей, порожденных $\alpha$-примитивным элементом.

**2. Обобщение группы Вейля для случая крайнего корня.** Пусть $c' = (H_\alpha + 1)^2 + 4Y_\alpha X_\alpha$ — оператор Казимира алгебры $\langle X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha \rangle$. Из работы [3] следует, что мы можем заменить параметризацию модуля $M(\lambda, \varepsilon)$ на $M(\lambda, \varepsilon')$, где $\varepsilon'$ — собственное значение оператора $c'$ на $\alpha$-примитивном элементе. Положим $p = \sqrt{\varepsilon'}$ и далее будем обозначать модуль $M(\lambda, p)$. (Очевидно, что $M(\lambda, p) = M(\lambda, -p)$.)

**Лемма 1.** *Пусть $h_j = \lambda(H_j)$ и $H_i = H_\alpha$. Модуль $M(\lambda, p)$ $\alpha$-расслоен тогда и только тогда, когда $\forall l \in \mathbb{Z}$: $p^2 \neq (2l + h_i)^2$.*

***Доказательство*** следует из леммы 1 работы [2] .

Основным результатом работы [2] является следующая теорема.

**Теорема 1** (*Футорный*). *Пусть*

$$\mathfrak{G} = \mathrm{sl}(3, \mathbb{C}),\ h_1 = \lambda(H_1) = \lambda(H_\alpha),\ h_2 = \lambda(H_2),\ N^\pm = (h_1 + 2h_2 \pm p)/2.$$

*Тогда имеет место один из следующих случаев*:

1. *Если $N^\pm \cap \mathbb{N} = \varnothing$, то $M(\lambda, p)$ — неприводим.*

2. *Если* $N^{\pm} \cap \mathbb{N} = N$, *то существует единственный подмодуль* $M(\lambda', p')$ *модуля* $M(\lambda, p)$, *причем*

$$h_1' = h_1 + N, \quad h_2' = h_2 - 2N, \quad p' = p \mp N^{\pm}.$$

3. *Если* $N^{\pm} \cap \mathbb{N} = N_{1,2}$, *то*

$$M(\lambda_2, p_2) \subset M(\lambda_1, p_1) \subset M(\lambda, p),$$

*причем для соответствующих параметров имеем*

$$h_1^i = h_1 + N_i, \quad h_2^i = h_2 - 2N_i, \quad p_i = p \mp N^{\pm}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть опять $\mathfrak{G} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$. Произвольный элемент $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ можно задать набором $(h_1, \ldots, h_{n-1})$, где $h_i = \lambda(H_i)$. Будем предполагать, что $H_1 = H_\alpha$. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$ с координатами $(h_1, \ldots, h_{n-1}, p)$. Пусть $N^{\pm} = (h_1 + 2h_2 \pm p)/2$. Определим следующие линейные преобразования пространства $\mathbb{C}^n$:

$$\oplus\colon\ h_1 \to h_1 + N^+,$$
$$h_2 \to h_2 - 2N^+,$$
$$h_3 \to h_3 + N^+,$$
$$p \to p - N^+,$$
$$\ominus\colon\ h_1 \to h_1 + N^-,$$
$$h_2 \to h_2 - 2N^-,$$
$$h_3 \to h_3 + N^-,$$
$$p \to p + N^-$$

(остальные координаты не изменяются). Пусть $S_3, \ldots, S_{n-1}$ — отражения относительно соответствующих корней, не изменяющие значения $p$.

**Определение 2.** *Группа* $W_\alpha = \langle \oplus, \ominus, S_3, \ldots, S_{n-1} \rangle$ *называется обобщенной группой Вейля алгебры* $\mathfrak{G}$ *для представлений, порожденных* α-*примитивным элементом.*

***Замечание* 1.** В случае алгебры sl (3) координата $(h_3)$ не учитывается.

**Теорема 2.** *В пространстве* $\mathbb{C}^n$ *можно выбрать базис* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *так, что будут выполнены следующие условия:*

**1.** $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ *— базис системы корней типа* $A_{n-1}$.

**2.** $W_\alpha$ *действует как группа Вейля описанной выше системы корней, не изменяя вектор* $e_n$.

***Доказательство.*** Для доказательства достаточно от координат $(h_1, \ldots$ $\ldots, h_{n-1}, p)$ перейти к координатам

$$\left(p, \frac{h_1 + 2h_2 - p}{2}, h_3, \ldots, h_{n-1}\right)$$

и дополнить их координатой, не изменяющейся под действием $W_\alpha$. Легко проверить, что $W_\alpha$ действует в новых кординатах так же, как $W$ в координатах $(h_1, \ldots, h_{n-1})$.

***Замечание 2.*** Естественный изоморфизм $W_\alpha$ и симметрической группы $S_{n-1}$ можно задать следующим образом:

$$\oplus \to (1,3),\ \ominus \to (2,3),\ S_3 \to (3,4),\ \dots,\ S_{n-1} \to (n-1, n).$$

**Лемма 2.** *При $n > 3$ для любого комплексного $a$ гиперплоскость*

$$\frac{2n-2}{n-2}h_1 + 2h_2 + \frac{2(n-3)}{n-2}h_3 + \ldots + \frac{2}{n-2}h_{n-1} = a$$

*инвариантна относительно действия $W_\alpha$.*

***Доказательство.*** Это легко проверяется на образующих $W_\alpha$.

***Замечание 3.*** 1. Будем обозначать буквами $\xi$ или $\eta$ кортежи $(h_1, \ldots$ $\ldots, h_{n-1}, p)$.

2. Если два обобщенных модуля Верма нельзя задать на одной и той же гиперплоскости, описанной в предыдущей лемме, то их носители расположены на разных решетках пространства $\mathfrak{h}^*$, они не могут иметь нетривиальных расширений и потому их взаимосвязь нас не интересует. Далее мы рассматриваем модули, которые можно задать в одной гиперплоскости.

**Теорема 3.** *Модули $M(\xi)$ и $M(\xi')$ имеют один и тот же центральный характер тогда и только тогда, когда $\xi$ и $\xi'$ расположены на одной орбите группы $W_\alpha$.*

***Доказательство.*** *Достаточность.* Утверждение достаточно доказать для образующих $W_\alpha$. Пусть $z$ — произвольный центральный элемент, $u(\eta)$ — многочлен, задающий собственное значение оператора $z$ как функцию от $\eta$. Определим $v(\eta) = u(\oplus\eta) - u(\eta)$. Из теоремы Футорного следует, что существует бесконечно много $\eta$ таких, что $M(\oplus\eta) \subset M(\eta)$, а значит, $v(\eta) \equiv 0$. В силу произвольности выбора $z$ получаем, что $\oplus$ сохраняет центральный характер. Для $\ominus$ доказательство аналогично.

Пусть теперь $v(\eta) = u(S_i\eta) - u(\eta)$, $i = 3, \ldots, n-1$. Из теории модулей Верма аналогично следует существование бесконечного числа кортежей $\eta$ таких, что $M(S_i\eta) \subset M(\eta)$, а значит, $v(\eta) \equiv 0$ и $S_i$ также сохраняет центральный характер. Достаточность доказана.

*Необходимость.* Из работы [3] следует, что в рассматриваемой гиперплоскости не может лежать более $n!/2$ модулей с одним и тем же центральным характером. Множество точек, для которых орбита $W_\alpha$ состоит из $n!/2$ точек, открыто и всюду плотно в гиперплоскости, для них утверждение очевидно. Пусть $\xi$ и $\eta$ — точки такие, что их орбиты на $W_\alpha$ состоят менее чем из $n!/2$ точек и центральные характеры модулей $M(\xi)$ и $M(\eta)$ совпадают. Пусть $\vec{f}(\zeta) = (c_1, \ldots, c_{n-1})$ — собственные значения базисных элементов $Z(\mathfrak{G})$. Функция $\vec{f}$ непрерывна и $\vec{f}(\zeta) = \vec{f}(\eta)$. $\forall\, \varepsilon' > 0$ множество "плохих" точек нигде не плотно в окрестностях $B(\xi, \varepsilon')$ и $B(\eta, \varepsilon')$. Из-за непрерывности $\vec{f}$, конечности ее одинаковых значений и конечности $W_\alpha$ следует, что существует $w \in W_\alpha$ такое, что $\forall\, \varepsilon' > 0\ \exists\, \xi_{\varepsilon'} \in B(\xi, \varepsilon')$ и $\eta_{\varepsilon'} \in B(\eta, \varepsilon')$: $w\xi_{\varepsilon'} = \eta_{\varepsilon'}$. Переходя к пределу при $\varepsilon' \to 0$, получаем $w\xi = \eta$, что и требовалось доказать.

**3. Подмодули модуля $M(\lambda, p)$.** Заметим, что если в некоторой точке $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ фиксировано значение $p$, то можно говорить о согласованном с $W_\alpha^+$ сопоставлении каждому элементу $\mu$ из рассматриваемой гиперплоскости некоторого значения $p_\mu$. При этом $p_\lambda = p$ и если для $w \in W_\alpha$ имеем $w(\mu, p_\mu) =$

$= (\mu', p')$, то $p' = p_{\mu'}$.

**Лемма 3.** *Множество* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *таких, что* $M(\lambda - \mu, p_{\lambda-\mu}) \subset M(\lambda, p_\lambda)$, *есть алгебраическое подмножество в* $\mathfrak{h}^*$.

*Доказательство.* Определим

$$X_n = [X_1, X_2], \;\; K = \mathfrak{n}_- \oplus \langle H_1 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle.$$

Для $i \geq 2$ имеем

$$[X_i, U(K)] \subset U(K) \oplus U(K) H_1 \oplus \ldots \oplus U(K) H_{n-1} \oplus U(K) X_n.$$

Таким образом, для любого $u \in U(K)$ существует единственный набор $(u_{i,0}, \ldots$ $\ldots, u_{i,n-1})$, линейно зависящий от $u$ такой, что

$$[X_i, u] = u_{i,0} + u_{i,1} X_n + u_{i,2} H_2 + \ldots + u_{i,n-1} H_{n-1}.$$

Пусть для произвольного $\lambda \in \mathfrak{h}^*$

$$f_i^\lambda = u_{i,0} + (\lambda - \rho)(H_2) u_{i,2} + \ldots + (\lambda - \rho)(H_{n-1}) u_{i,n-1},$$
$$g^\lambda : u \to (f_2^\lambda(u), \ldots, f_n^\lambda(u)),$$

$g^\lambda$ — линейное отображение $U(K) \to U(K)^{n-1}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — подмножество $U(K)$ такое, что для всех $h \in \mathfrak{h}$: $[h, u] = -\mu(h) u$, а также элемент $u$ содержит либо $X_1$ либо $Y_1$, но ни то и другое одновременно. Очевидно, $\dim(\mathfrak{X}) < \infty$. Обозначим через $v_\lambda$ канонический образующий модуля $M(\lambda, p_\lambda)$. Справедливы следующие утверждения:

$$M(\lambda - \mu, p_{\lambda-\mu}) \subset M(\lambda, p_\lambda) \;\; \Leftrightarrow$$
$$\exists e \in M(\lambda, p_\lambda)_{\lambda-\rho-\mu}: \;\; e \neq 0 \text{ и } \mathfrak{n} e = 0 \;\; \Leftrightarrow$$
$$\exists u \in \mathfrak{X} \setminus \{0\}: \;\; \mathfrak{n} u v_\lambda = 0 \;\; \Leftrightarrow$$
$$\exists u \in \mathfrak{X} \setminus \{0\}: \;\; X_2 u v_\lambda = \ldots = X_n u v_\lambda = 0 \;\; \Leftrightarrow$$
$$\exists u \in \mathfrak{X} \setminus \{0\}: \;\; [X_2, u] v_\lambda = \ldots = [X_n, u] v_\lambda = 0 \;\; \Leftrightarrow$$
$$\exists u \in \mathfrak{X} \setminus \{0\}: \;\; f_2^\lambda(u) v_\lambda = \ldots = f_n^\lambda(u) v_\lambda = 0 \;\; \Leftrightarrow$$
$$\exists u \in \mathfrak{X} \setminus \{0\}: \;\; f_2^\lambda(u) = \ldots = f_n^\lambda(u) = 0 \;\; \Leftrightarrow$$
$$g^\lambda|_{\mathfrak{X}} \text{ имеет ранг меньше } \dim(\mathfrak{X}) \;\; \Rightarrow$$

$M(\lambda - \mu, p_{\lambda-\mu}) \subset M(\lambda, p_\lambda)$ эквивалентно равенству нулю определителя, элементы которого линейно зависят от $\lambda$, что и требовалось доказать.

Положим

$$W_\alpha^+ = \langle \oplus, S_3, \ldots, S_{n-1} \rangle, \qquad W_\alpha^- = \langle \ominus, S_3, \ldots, S_{n-1} \rangle.$$

Эти группы можно трактовать, как группы Вейля систем корней типа $A_{n-2}$ (далее мы это подразумеваем). Пусть $P$ — решетка чисел $(\lambda, p_\lambda)$ таких, что для всех $w \in W_\alpha(\lambda, p_\lambda) = w(\lambda', p_{\lambda'}) \leq (\lambda', p_{\lambda'})$, где $(\lambda', p_{\lambda'})$ — аналог "доминантного веса".

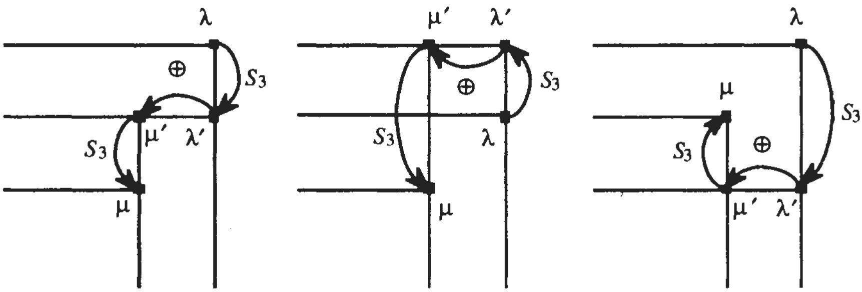
**Теорема 4.** *Пусть* $S_\gamma$ — *отражение в* $W_\alpha^+$, $(\lambda, p_\lambda) \in P$ *и*

$$S_\gamma(\lambda, p_\lambda) = (\mu, p_\mu) \leq (\lambda, p_\lambda).$$

*Тогда* $M(\mu, p_\mu) \subset M(\lambda, p_\lambda)$.

***Доказательство.*** Если $S_\gamma \in \{\oplus, S_3, \ldots, S_{n-1}\}$, то это очевидно. В случае, когда разложение $S_\gamma$ не содержит $\oplus$, это следует из теории модулей Верма.

В оставшемся случае проведем доказательство индукцией по длине $\gamma$. Докажем первый шаг индукции. В этом случае $S_\gamma = S_3 \oplus S_3$. Возможны три варианта (рис. 1):




1 2 3

Рис. 1.

1. Это очевидный случай.

2. В этом случае существует образующий модуля $M(\lambda', p_{\lambda'})$ такой, что для некоторого $u \in U(\mathfrak{n}_-)$: $v = uv'$ где $v'$ — канонический образующий модуля $M(\mu', p_{\mu'})$. Согласно лемме 7.6.9 из [4] существует целое $l$ такое, что $Y_3^l u \in U(\mathfrak{n}_- Y_3^k)$, где $Y_3^k v'$ — канонический образующий модуля $M(\lambda, p_\lambda)$. Отсюда легко получаем, что образующий элемент модуля $M(\mu, p_\mu)$ лежит в модуле $M(\lambda, p_\lambda)$.

3. Докажем, что любой элемент, который может быть получен в $\mu'$ из $\lambda$ через $\lambda'$, может быть получен через $\mu$. Из этого следует, что в модуле $M(\lambda, p_\lambda)$ в точке $\mu$ есть $\alpha$-примитивный элемент. Воспользуемся коммутационными соотношениями $\mathfrak{G}$. Например, пусть $Y_i^{k_1} Y_3^k v'$ лежит в точке $\mu'$, тогда

$$Y_i^{k_1} Y_3^k = Y_3^{k-k_1} Y_{3+i}^{k_1} + Y_3^{k-k_1+1} Y_i Y_{3+i}^{k_1-1} + \ldots + Y_3^k Y_i^{k_1} =: \sigma$$

($3 + i$ обозначает сумму корней.) Осюда следует, что $\sigma v'$ получен из $\mu$. Последующие индукционные шаги аналогичны.

**Теорема 5.** *Если*

$$(\lambda', p_{\lambda'}) \geq S_{\gamma_1}(\lambda', p_{\lambda'}) \geq \ldots \geq S_{\gamma_k} \ldots S_{\gamma_1}(\lambda', p_{\lambda'}) = (\lambda, p_\lambda)$$

*для* $S_{\gamma_i} \in W_\alpha^+ (W_\alpha^-)$, *то* $M(\lambda, p_\lambda) \subset M(\lambda', p_{\lambda'})$.

***Доказательство*** проводится аналогично доказательству теоремы 7.6.13 в [4] на основании предыдущих утверждений.

**Лемма 4.** *Пусть* $\xi = w\eta < \eta$ *для* $w \notin W_\alpha^+ (W_\alpha^-)$, *тогда существует* $w' \in W_\alpha^+ (W_\alpha^-)$ *такой, что* $w'\eta < \eta$.

***Доказательство*** проводится индукцией по $n$ — рангу алгебры. При $n = 3$ это очевидно. $k \Rightarrow k + 1$. Рассмотрим гиперплоскости:

$$\mathcal{H}_1 = \eta + x_2\alpha_2 + \ldots + x_{n-2}\alpha_{n-2},$$

$$\mathcal{H}_2 = \xi + x_2\alpha_2 + \ldots + x_{n-2}\alpha_{n-2}.$$

Если $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, то все следует из предположения индукции. Пусть $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$. Тогда существует

$$w \in \langle \oplus, S_3, \ldots, S_{n-2} \rangle \ (\langle \Theta, S_3, \ldots, S_{n-2} \rangle)$$

такое, что $S_{n-1}w\eta \in \mathcal{H}_2$. Положим $\mu = w^{-1}S_{n-1}w\eta$. Очевидно, $w' = w^{-1}S_{n-1}w \in \in W_\alpha^+(W_\alpha^-)$. Так как $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 + l\alpha_{n-1}$ для некоторого неотрицательного $l$, то $S_{n-1}w\eta = w\eta - l\alpha_{n-1}$. Заметим, что $w^{-1}(\alpha_{n-1})$ — корень, причем положительный. Тогда $\mu = \eta - lw^{-1}(\alpha_{n-1}) < \eta$.

**Лемма 5.** *Пусть $\Delta$ — система корней типа $A_n$, $W$ — ее группа Вейля. Если для некоторого $w \in W$ имеем $w\lambda < \lambda$, то существует $\gamma \in \Delta_+$ такое, что $S_\gamma\lambda < \lambda$.*

***Доказательство*** проводится индукцией по рангу алгебры. При $n = 2$ это очевидно. $k \Rightarrow k+1$. Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — простые корни. Определим

$$\mathcal{H}_\mu = \mu + x_1\alpha_1 + \ldots + x_{n-1}\alpha_{n-1}.$$

Из условия следует, что для некоторого неотрицательного $l$: $\mathcal{H}_{w\lambda} = \mathcal{H}_\lambda - l\alpha_n$. При $l = 0$ все следует из предположения индукции. Пусть $l \neq 0$. Тогда существует

$$\gamma \in \{\alpha_n, \alpha_n + \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_n + \ldots + \alpha_1\}$$

такое, что $S_\gamma\lambda \in \mathcal{H}_{w\lambda}$. Далее легко видеть, что $S_\gamma\lambda < \lambda$.

Из полученных результатов немедленно вытекает следующая теорема.

**Теорема 6 (критерий неприводимости модуля $M(\lambda, p)$).** *В обозначениях настоящего пункта модуль $M(\lambda, p)$ неприводим тогда и только тогда, когда*:

1. *Для любого корня $\gamma$, представимого в виде суммы корней из $\{\alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}\}$, $\langle X_\gamma, Y_\gamma, H_\gamma \rangle$-модуль, порожденный $\alpha$-примитивным элементом, неприводим.*

2. *Для любого корня $\gamma$, представимого в виде суммы корней из $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ и содержащего $\alpha_2$, $\langle X_\gamma, Y_\gamma, H_\gamma, X_{\gamma+\alpha_1}, Y_{\gamma+\alpha_1}, H_{\gamma+\alpha_1} \rangle$-модуль, порожденный $\alpha$-примитивным элементом, неприводим.*

**4. Случай среднего корня $\alpha$.** Пусть теперь $H_\alpha = H_i$ для $i \neq 1, n-1$. Аналогично предыдущей части введем в $\mathbb{C}^n$ следующие линейные преобразования:

$$\oplus' : h_i \to h_i + N'^{+} \qquad \Theta' : h_i \to h_i + N'^{-}$$

$$h_{i-1} \to h_{i-1} - 2N'^{+} \qquad h_{i-1} \to h_{i-1} - 2N'^{-}$$

$$h_{i-2} \to h_{i-2} + N'^{+} \qquad h_{i-2} \to h_{i-2} + N'^{-}$$

$$p \to p - N'^{+}, \qquad p \to p + N'^{-},$$

$$\oplus'' : h_i \to h_i + N''^{+} \qquad \Theta'' : h_i \to h_i + N''^{-}$$

$$h_{i+1} \to h_{i+1} - 2N''^{+} \quad h_{i+1} \to h_{i+1} - 2N''^{-}$$

$$h_{i+2} \to h_{i+2} + N''^{+} \quad h_{i+2} \to h'_{i+2} + N''^{-}$$

$$p \to p - N''^{+}, \quad p \to p + N''^{-},$$

где

$$N'^{\pm} = (h_i + 2h_{i-1} \pm p)/2$$

и

$$N''^{\pm} = (h_i + 2h_{i+1} \pm p)/2.$$

(Оставшиеся координаты не изменяются.)

**Определение 3.** *Группа*

$$W_\alpha = \langle \oplus', \ominus', \oplus'', \ominus'', S_1, \ldots, S_{i-3}, S_{i+3}, \ldots, S_{n-1} \rangle$$

*называется обобщенной группой Вейля алгебры* $\mathfrak{G}$ *для представлений, порожденных* $\alpha$*-примитивным элементом.*

Положим

$$W_\alpha^{++} = \langle \oplus', \oplus'', S_1, \ldots, S_{i-3}, S_{i+3}, \ldots, S_{n-1} \rangle,$$

$$W_\alpha^{-+} = \langle \ominus', \oplus'', S_1, \ldots, S_{i-3}, S_{i+3}, \ldots, S_{n-1} \rangle,$$

$$W_\alpha^{+-} = \langle \oplus', \ominus'', S_1, \ldots, S_{i-3}, S_{i+3}, \ldots, S_{n-1} \rangle,$$

$$W_\alpha^{--} = \langle \ominus', \ominus'', S_1, \ldots, S_{i-3}, S_{i+3}, \ldots, S_{n-1} \rangle.$$

Аналогично предыдущей части можно получить следующие результаты:

**Теорема 7.** *Модули* $M(\lambda, p)$ *и* $M(\lambda', p')$ *имеют один и тот же центральный характер тогда и только тогда, когда* $(\lambda, p)$ *и* $(\lambda', p')$ *расположены на одной орбите группы* $W_\alpha$.

**Теорема 8.** *Если*

$$(\lambda', p_{\lambda'}) \geq S_{\gamma_1}(\lambda', p_{\lambda'}) \geq \ldots \geq S_{\gamma_k} \ldots S_{\gamma_1}(\lambda', p_{\lambda'}) = (\lambda, p_\lambda)$$

*для* $S_{\gamma_i} \in W_\alpha^{++}(W_\alpha^{--})$, *то* $M(\lambda, p_\lambda) \subset M(\lambda', p_{\lambda'})$.

**Теорема 9.** *Модуль* $M(\lambda, p)$ *неприводим тогда и только тогда, когда для любого элемента* $w$ *групп* $W_\alpha^{++}$, $W_\alpha^{+-}$, $W_\alpha^{-+}$, $W_\alpha^{--}$ *выполнено:* $w(\lambda, p) \not\leq$ $\not\leq (\lambda, p)$. *(Частичный порядок индуцируется с* $\mathfrak{h}^*$.)

**5. БГГ-резольвента обобщенных модулей Верма.** Выберем $(\lambda, p)$ так, чтобы для любого $w \in W_\alpha$, $w(\lambda, p) < (\lambda, p)$, и обозначим множество таких кортежей через $P_{++}^\alpha$. Пусть $\ominus(\lambda, p) < \oplus(\lambda, p)$ и будем считать, что $\alpha$ — крайний корень.

**Лемма 6.** *Для любого* $w \in W_\alpha$ *существует* $w' \in W_\alpha^+$ *такое, что* $M(w(\lambda, p)) \subset M(w'(\lambda, p))$, *причем* $l(w) = l(w')$.

***Доказательство*** проводится индукцией по длине элемента $w(l(w))$. $l(w) =$ $= 1$ следует из выбранной параметризации. $k \Rightarrow k+1$. Выпишем приведенное разложение $w : w = S_{\gamma_1} \ldots S_{\gamma_{k+1}}$. Тогда по предположению индукции $S_{\gamma_2} \ldots S_{\gamma_{k+1}}(\lambda, p) < S'_{\gamma_2} \ldots S'_{\gamma_{k+1}}(\lambda, p)$, где

$$S'_{\gamma_i} = \begin{cases} S_{\gamma_i}, & S_{\gamma_i} \neq \Theta, \\ \oplus, & S_{\gamma_i} = \Theta. \end{cases}$$

Теперь, заменив $S_{\gamma_1}$ на $S'_{\gamma_1}$ и использовав выбранную нами параметризацию и приведенность разложения $w$, получим требуемое утверждение.

Мы получили, что орбита группы $W_\alpha^+$ не содержит "внутри" себя других точек орбиты группы $W_\alpha$. Обозначим через $L(\lambda, p)$ единственный простой фактор модуля $M(\lambda, p)$. Теперь, используя результаты [5], получим следующую теорему.

**Теорема 10.** *Пусть $n_0$ — наибольшая длина элемента в группе $W_\alpha^+$. Следующая последовательность точна*:

$$0 \to \bigoplus_{\substack{w \in W_\alpha^+ \\ l(w) = n_0}} M(w(\lambda, p)) \to \ldots$$

$$\ldots \to \bigoplus_{\substack{w \in W_\alpha^+ \\ l(w) = 1}} M(w(\lambda, p)) \to M(\lambda, p) \to L(\lambda, p) \to 0.$$

***Доказательство.*** Принимая во внимание предыдущую лемму и [5], достаточно доказать, что максимальный подмодуль $M(\lambda, p)$ накрывается следующим модулем:

$$K = \bigoplus_{\substack{w \in W_\alpha^+ \\ l(w) = 1}} M(w(\lambda, p)).$$

Покажем, что $K$ содержит все $\alpha$-примитивные элементы модуля $M(\lambda, p)$. Любой $\alpha$-примитивный элемент в $M(\lambda, p)$ определяется элементом $w \in W_\alpha$. Пусть $w = S_{\gamma_1} \ldots S_{\gamma_k}$ — приведенное разложение $w$, но тогда соответствующий $\alpha$-примитивный элемент лежит в $M(S_{\gamma_k}(\lambda, p))$. Если $S_{\gamma_k} = \Theta$, то элемент лежит в $M(\oplus(\lambda, p))$.

Аналогично для случая среднего $\alpha$ получим следующую теорему.

**Теорема 11.** *Пусть $n_0$ — наибольшая длина элемента в группе $W_\alpha^{++}$. Следующая последовательность точна*:

$$0 \to \bigoplus_{\substack{w \in W_\alpha^{++} \\ l(w) = n_0}} M(w(\lambda, p)) \to \ldots \to \bigoplus_{\substack{w \in W_\alpha^{++} \\ l(w) = 1}} M(w(\lambda, p)) \to M(\lambda, p) \to L(\lambda, p) \to 0.$$

Пусть $w'(w'')$ — самый длинный элемент $W_\alpha(W_\alpha^+)$. Используя то, что $|W_\alpha| < |W_\alpha^+|$, получаем такие теоремы.

**Теорема 12.** *Пусть $n_0$ — наибольшая длина элемента в группе $W_\alpha^+$. Следующая последовательность точна*:

$$0 \to M(w'(\lambda, p)) \to \bigoplus_{\substack{w \in W_\alpha^+ \\ l(w) = 1}} M(ww'(\lambda, p)) \to \ldots$$

$$\ldots \to \bigoplus_{\substack{w \in W_\alpha^+ \\ l(w) = n_0 - 1}} M(ww'(\lambda, p)) \to M(w''w'(\lambda, p)) \to L(w''w'(\lambda, p)) \to 0.$$

**Теорема 13.** *Пусть $n_0$ — наибольшая длина элемента в группе $W_\alpha^{++}$. Следующая последовательность точна:*

$$0 \to \oplus M(w'(\lambda, p)) \to \bigoplus_{\substack{w \in W_\alpha^{++} \\ l(w)=1}} M(ww'(\lambda, p)) \to \dots$$

$$\dots \to \bigoplus_{\substack{w \in W_\alpha^{++} \\ l(w)=n_0-1}} M(ww'(\lambda, p)) \to M(w''w'(\lambda, p)) \to L(w''w'(\lambda, p)) \to 0.$$

Все упомянутые выше последовательности естественно называть БГГ-резольвентами соответствующих обобщенных модулей Верма, порожденных $\alpha$-примитивным элементом.

***Замечание* 4.** В отличие от классического случая БГГ-резольвенту можно написать для двух $\alpha$-расслоенных обобщенных модулей Верма из одной орбиты обобщенной группы Вейля.

***Пример* 1.** Рассмотрим $\mathfrak{G} = \mathrm{sl}(4, \mathbb{C})$. Пусть для первого случая $H_\alpha = H_1$, а для второго $H_\alpha = H_2$. Тогда орбита группы $W_\alpha$ на $\mathfrak{h}^*$ будет иметь вид, показанный на рис. 2.

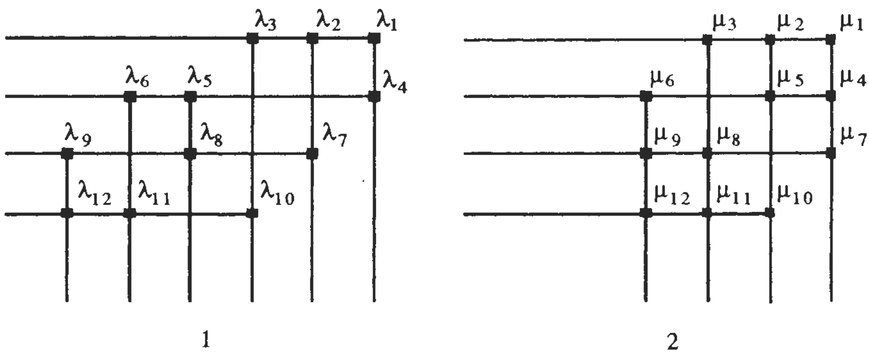



Рис. 2.

Если выписать соответствующие БГГ-розольвенты, то получим

1. $0 \to M(\lambda_8, p_8) \to M(\lambda_5, p_5) \oplus M(\lambda_7, p_7) \to M(\lambda_2, p_2) \oplus M(\lambda_4, p_4) \to M(\lambda_1, p_1) \to$ $\to L(\lambda_1, p_1) \to 0.$

2. $0 \to M(\lambda_{12}, p_{12}) \to M(\lambda_9, p_9) \oplus M(\lambda_{11}, p_{11}) \to M(\lambda_6, p_6) \oplus M(\lambda_8, p_8) \to M(\lambda_5, p_5) \to$ $\to L(\lambda_5, p_5) \to 0.$

3. $0 \to M(\mu_5, p'_5) \to M(\mu_2, p'_2) \oplus M(\mu_4, p'_4) \to M(\mu_1, p'_1) \to L(\mu_1, p'_1) \to 0.$

4. $0 \to M(\mu_{12}, p'_{12}) \to M(\mu_9, p'_9) \oplus M(\mu_{11}, p'_{11}) \to M(\mu_8, p'_8) \to L(\mu_8, p'_8) \to 0.$


1. *Футорный В. М.* Некоторое обобщение модулей Верма и неприводимые представления алгебры Ли sl(3, $\mathbb{C}$) // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №8. – С. 1031 – 1037.
2. *Футорный В. М.* Весовые sl(3)-модули, порожденные полупримитивными элементами // Там же. – 1991. – **48**, №2. – С. 281 – 285.
3. *Дрозд Ю. А., Овсиенко С. А., Футорный В. М.* $S$-гомоморфизм Хариш-Чандры и $\mathfrak{G}$-модули, порожденные полупримитивными элементами // Там же. – 1990. – **42**, №8. – С. 1031 – 1037.
4. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры. – М. : Мир, 1978. – 407 с.
5. *Bernstein I. N., Gelfand I. M., Gelfand S. I.* Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{G}$-modules // Publ. of 1971 Summer School in Math., Janos Bolyai Math Soc. – Budapest. – P. 21 – 64.


Получено 16. 06. 92