УДК 517.9

Г. Я. Попов (Ин-т математики, экономики и механики Одес. нац. ун-та)

НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ К НЕКОТОРЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

We construct new integral transforms and present their applications to the construction of exact solutions of some boundary-value problems in the mathematical physics. We solve the problem of the diffraction of acoustic waves in a circular cone truncated by two spherical surfaces. We also solve the initial boundary-value problem of heat conduction theory for the same truncated cone under a nonzero initial condition. In the construction of a solution of this problem, we do not use the integral transform with respect to time. Instead, the time derivative is replaced by a finite difference.

Побудовано нові інтегральні перетворення та наведено їх застосування до одержання точних розв'язків деяких крайових задач математичної фізики. Розв'язано задачу дифракції акустичних хвиль у круговому зрізаному двома сферичними поверхнями конусі. Розв'язано також початково-крайову задачу теорії теплопровідності для цього ж зрізаного конуса за ненульової початкової умови.

При побудові розв'язку останньої задачі інтегральне перетворення за часом не застосовується. Замість цього похідна за часом замінюється скінченною різницею.

1. Будем рассматривать интегральные преобразования, вывод которых базируется на решении следующих регулярных [1] краевых задач Штурма – Лиувилля:

$$L_2 V_m(r, \nu_j) = \nu_j^2 V_m(r, \nu_j), \quad m = 1, 2, \quad a_0 < r < a_1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\tilde{l}_i^{(m)} V_m(r, \nu_j) = 0, \quad i = 0, 1, \quad m = 1, 2, \tag{1.1}$$

где

$$L_2 y(r) = -[r^2 y'(r)]' - \left(\frac{1}{4} + k^2 r^2\right) y(r),$$

$$\tilde{l}_i^{(m)} y(r) = \alpha_{i0}^{(m)} y(a_i) + \alpha_{i1}^{(m)} y'(a_i) = 0, \quad i = 0, 1, \quad m = 1, 2. \tag{1.2}$$

Здесь штрих означает производную по r, а числа k^2 и $\alpha_{ij}^{(m)}$ вещественны. При этом далее будем считать, что

$$\alpha_{i0}^1 = 1, \quad \alpha_{i1}^1 = 0; \quad \alpha_{i0}^2 = h_i, \quad \alpha_{i1}^2 = 1, \quad i = 0, 1. \tag{1.3}$$

Характерной особенностью дифференциального уравнения из (1.1) является то, что даже при вещественных коэффициентах оно имеет комплексные решения, содержащие функцию Бесселя и Неймана:

$$y(r) = r^{-1/2} J_{i\nu}(kr), \ r^{-1/2} N_{i\nu}(kr). \tag{1.4}$$

Следовательно, если ввести обозначения

$$A_\nu(x) = \operatorname{Re} J_{i\nu}(x), \quad B_\nu(x) = \operatorname{Im} J_{i\nu}(x),$$
$$\operatorname{Re} N_{i\nu}(x) = \operatorname{cth}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) B_\nu(x), \quad \operatorname{Im} N_{i\nu}(x) = -\operatorname{th}\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) A_\nu(x), \tag{1.5}$$

то можно показать, что вещественными линейно независимыми решениями дифференциального уравнения из (1.1) будут функции $r^{-1/2} A_\nu(kr)$, $r^{-1/2} B_\nu(kr)$. Здесь вместо ν_j записано ν, что будет встречаться и ниже.

Вронскиан введенных функций на основании формулы 7.11 (28) из [2], а также (1.5) будет определяться формулой

$$W(A_\nu(x), B_\nu(x)) = A_\nu(x)B'_\nu(x) - A'_\nu(x)B_\nu(x) = (\pi x)^{-1}\operatorname{sh}\nu\pi. \tag{1.6}$$

Для решения краевых задач (1.1) отправляемся от двух линейно независимых решений дифференциального уравнения из (1.1)

$$\varphi_0(r, \nu_j) = r^{-1/2}A_{\nu_j}(kr), \qquad \chi_0(r, \nu_j) = r^{1/2}B_{\nu_j}(kr)$$

и строим функции

$$\varphi_m(r, \nu_j) = \varphi_0(r, \nu_j)\tilde{l}_0^{(m)}\chi_0 - \chi_0(r, \nu_j)\tilde{l}_0^{(m)}\varphi_0, \qquad m = 1, 2,$$

которые будут удовлетворять дифференциальному уравнению из (1.1). Кроме того, легко проверить, что они будут удовлетворять и граничному условию из (1.1) при $i = 0$. Для удовлетворения второму граничному условию $(i = 1)$ задачи Штурма – Лиувилля (1.1) достаточно, чтобы числа ν_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, были корнями трансцендентных уравнений

$$\tilde{l}_0^{(m)}\varphi_0\tilde{l}_1^{(m)}\chi_0 - \tilde{l}_0^{(m)}\chi_0\varphi_0 = 0, \qquad m = 1, 2.$$

Эти уравнения, если учесть, что

$$\tilde{l}_i^{(m)}\left\|\begin{matrix}\varphi_0(r, \nu_j)\\ \chi_0(r, \nu_j)\end{matrix}\right\| = \frac{1}{\sqrt{a_i}}l_i^{(m)}\left\|\begin{matrix}A_{\nu_j}(kr)\\ B_{\nu_j}(kr)\end{matrix}\right\|,$$

где

$$\begin{gathered} l_i^{(1)}y(r) = \tilde{l}_i^{(1)}y(r) = y(a_i), \qquad i = 0, 1, \\ l_i^{(2)}y(r) = l_i^{(h)}y(r) \equiv \left[h_i - (2a_i)^{-1}\right]y(a_i) + y'(a_i), \qquad i = 0, 1, \end{gathered} \tag{1.7}$$

можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \Delta_\nu^{(m)}\Big|_{\nu=\nu_j} = 0, \qquad m = 1, 2, \\ \Delta_\nu^{(1)} = A_\nu(ka_0)B_\nu(ka_1) - A_\nu(ka_1)B_\nu(ka_0), \\ \Delta_\nu^{(2)} = l_0^{(h)}A_\nu(kr)l_1^{(h)}B_\nu(kr) - l_0^{(h)}B_\nu(kr)l_1^{(h)}A_\nu(kr). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Из изложенного следует, что собственные функции краевых задач Штурма – Лиувилля (1.1) могут быть определены формулами

$$V_m(r, \nu_j) = r^{-1/2}\left[A_{\nu_j}(kr)l_0^{(m)}B_{\nu_j}(kr) - B_{\nu_j}(kr)l_0^{(m)}A_{\nu_j}(kr)\right], \qquad m = 1, 2, \tag{1.9}$$

а собственные числа ν_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, будем находить из трансцендентных уравнений (1.8).

Для окончательного решения краевой задачи Штурма – Лиувилля (1.1) необходимо показать, что трансцендентные уравнения (1.8) имеют счетное множество вещественных корней и

$$\int_{a_0}^{a_1} V_m(r, \nu_j)V_m(r, \nu_k)\,dr = \begin{cases} 0, & j \neq k; \\ N^2 V_m, & j = k. \end{cases} \tag{1.10}$$

Но это следует из того, что решения краевой задачи (1.1) эквивалентны [3] решениям интегральных уравнений

$$V_m(r,\nu_j) = \nu_j^2 \int_{a_0}^{a_1} G_m(r,\rho) V_m(\rho,\nu_j)\,d\rho, \quad m = 1, 2, \tag{1.11}$$

где $G_m(r,\rho)$ — функции Грина следующих сопряженных краевых задач:

$$L_2 V_m(r) = f(r), \quad a_0 < r < a_1, \quad m = 1, 2,$$

$$\tilde{l}_1^{(m)} V_m(r) = 0, \quad i = 0, 1, \quad m = 1, 2,$$

и, следовательно [3], ядра интегральных уравнений (1.11) непрерывны по обеим переменным и симметричны. Отсутствие кратных собственных чисел краевых задач (1.1) доказывается, как и в работе [3].

Таким образом, собственные функции (1.9) задач Штурма – Лиувилля найдены и поэтому [3] любую функцию $f(r) \in C^2([a_0, a_1])$, удовлетворяющую граничным условиям из (1.1), можно разложить в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям, т. е.

$$f(r) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(m)} V_m(r,\nu_j), \quad C_j^{(m)} = \text{const}.$$

Если принять во внимание ортогональность собственных функций (1.10) и уточненную теорему разложения Стеклова [3], то полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Любая функция* $f(r)$ *при* $a_0 \le r \le a_1$ *с производной, претерпевающей разрыв непрерывности первого рода не более чем в конечном числе точек отрезка* $[a_0, a_1]$, *удовлетворяющая граничным условиям из* (1.1), *разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям* (1.9) *краевых задач* (1.1), *т. е. имеет место равномерно сходящееся разложение*

$$f(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V_m(r,\nu_j)}{\sigma_m(\nu_j)} f_j^{(m)}, \quad \sigma_m(\nu_j) = \int_{a_0}^{a_1} V_m^2(r,\nu_j)\,dr = N^2 V_m, \tag{1.12}$$

где

$$f_j^{(m)} = \int_{a_0}^{a_1} f(r) V_m(r,\nu_j)\,dr, \quad m = 1, 2. \tag{1.13}$$

Разложение (1.12) можно рассматривать как формулу обращения для нового интегрального преобразования (1.13).

Полученный результат применим и для граничных условий, отличных от случаев (1.3). Например, в случае граничных условий $V'(a_i,\nu) = 0$, $i = 0, 1$, остаются справедливыми формулы (1.9) и (1.7) при $m = 2$, если в них положить $h_i = 0$, $i = 0, 1$. Если же положить равным нулю только один из указанных параметров, то граничное условие $V'(a_i,\nu) = 0$, $i = 0, 1$, будет выполнено только на одном краю, на другом же останется прежнее.

Полученные формулы с очевидной модификацией можно применить и в случае, когда на одном из краев выполнено условие, соответствующее случаю $m = 1$, а на другом — случаю $m = 2$.

Более того, они оказываются справедливыми и в случае, когда дифференциальный оператор L_2 в краевых задачах (1.1) имеет вид

$$L_2 y(r) = -[r^2 y'(r)]' - \left(\frac{1}{4} - k^2 r^2\right) y(r). \tag{1.14}$$

Для этого следует в полученные формулы внести такие изменения. Содержащиеся в формуле (1.4) цилиндрические функции следует заменить на модифицированные функции $I_{i\nu}(kx)$ и $K_{i\nu}(kx)$ и во всех последующих формулах в качестве функций $A_\nu(x)$ и $B_\nu(x)$ будем использовать соответственно функции

$$A_\nu^*(x) = \operatorname{Re} I_{i\nu}(x), \qquad B_\nu^*(x) = \operatorname{Im} I_{i\nu}(x), \tag{1.15}$$

причем в силу того, что $K_{i\nu}(x)$ — вещественная функция от вещественного аргумента (согласно формулам 8.432 (1) и 8.432 (4) из [4]),

$$B_\nu^*(x) = -\pi^{-1}\operatorname{sh}\nu\pi K_{i\nu}(x).$$

Например, собственная функция краевой задачи для дифференциального уравнения (1.1), (1.14) при граничных условиях

$$\begin{gathered} V_*'(a_0, \nu_j) = 0, \\ V_*'(a_1, \nu_j) + h_1 V_*(a_1, \nu_j) = 0 \end{gathered} \tag{1.16}$$

имеет вид

$$V_*(r, \nu_j) = r^{-1/2}\left[A_{\nu_j}^*(kr)l_0^{(0)}B_{\nu_j}^*(kr) + B_{\nu_j}^*(kr)l_0^{(0)}A_{\nu_j}^*(kr)\right], \tag{1.17}$$

причем граничный функционал $l_0^{(0)}$ в силу (1.7) и (1.16) определяется формулой

$$l_0^{(0)}y(r) = y'(a_0) - (2a_0)^{-1}y(a_0). \tag{1.18}$$

Собственные числа ν_j согласно (1.8) и (1.7) при $m = 2$ следует находить из уравнения

$$\begin{gathered} \Delta_\nu^*\Big|_{\nu=\nu_j} = 0, \\ \Delta_\nu^* = l_0^{(0)}A_\nu^*(kr)l_1^{(h)}B_\nu^*(kr) - l_0^{(0)}B_\nu^*(kr)l_1^{(h)}A_\nu^*(kr), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{1.19}$$

а собственная функция (1.17) согласно (1.12), (1.13) и (1.15) является ядром интегрального преобразования

$$f_j^* = \int_{a_0}^{a_1} f(r)V_*(r, \nu_j)\,dr, \qquad f(r) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{V(r, \nu_j)}{\sigma^*(\nu_j)}f_j^*, \tag{1.20}$$

где

$$\sigma^*(\nu_j) = N^2 V_*(r, \nu_j) = \int_{a_0}^{a_1} V_*^2(r, \nu_j)\,dr. \tag{1.21}$$

2. Для применения полученных интегральных преобразований к краевым задачам математической физики необходимо упростить формулу (1.21), а также вторую формулу из (1.10).

Начнем с последней формулы. На основании (1.9) и (1.12) имеем

$$\sigma_m(\nu_j) = N^2 V_m(r, \nu_j) = b^2 J_{\nu_j}^{(1)} + a^2 J_{\nu_j}^{(2)} - 2abJ_{\nu_j}^{(0)}, \tag{2.1}$$

где

$$a = l_0^{(m)}A_{\nu_j}(kr), \qquad b = l_0^{(m)}B_{\nu_j}(kr), \qquad m = 1, 2, \tag{2.2}$$

$$J_\nu^{(1)} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{A_\nu^2(kr)}{r} dr, \qquad J_\nu^{(2)} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{B_\nu^2(kr)}{r} dr, \tag{2.3}$$

$$J_\nu^{(0)} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{A_\nu(kr) B_\nu(kr)}{r} dr.$$

Примем во внимание, что согласно (1.5) функции $A_\nu(kr)$ и $B_\nu(kr)$ являются решениями дифференциального уравнения Бесселя, т. е. $(u(r) = A_\nu(kr),$ $B_\nu(kr))$

$$r[ru'(r)]' + (k^2r^2 + \nu^2)u(r) = 0.$$

Поэтому для вычисления интеграла (2.3) будем использовать метод Ломмеля [5, с. 96]. С этой целью запишем еще второе уравнение Бесселя $(V(r) = A_\mu(kr),$ $B_\mu(kr))$

$$r[rV'(r)]' + (k^2r^2 + \mu^2)V(r) = 0.$$

Указанный метод позволяет получить формулу

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{u(r)V(r)}{r} dr = \frac{[\, ruV' - rVu' \,]_{a_0}^{a_1}}{\nu^2 - \mu^2}. \tag{2.4}$$

Для вычисления $J_\nu^{(1)}$ выполняем следующее.

Полагая в (2.4) $u(r) = A_\nu(kr)$, $V(r) = A_{\nu+\varepsilon}(kr)$, где ε — малое число, получаем

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{A_\nu(kr) B_{\nu+\varepsilon}(kr)}{r} dr = \frac{[\, krA_\nu(kr)A'_{\nu+\varepsilon}(kr) - krA_{\nu+\varepsilon}(kr)A'_\nu(kr) \,]_{a_0}^{a_1}}{-\varepsilon(2\nu + \varepsilon)}.$$

Устремляя здесь $\varepsilon \to 0$ и используя правило Лопиталя, имеем

$$J_\nu^{(1)} = -\frac{k}{2\nu}\left[rA_\nu(kr)\frac{\partial}{\partial\nu}A'_\nu(kr) - rA'_\nu(kr)\frac{\partial A_\nu(kr)}{\partial\nu} \right]_{a_0}^{a_1}. \tag{2.5}$$

Аналогично находим

$$J_\nu^{(2)} = -\frac{k}{2\nu}\left[rB_\nu(kr)\frac{\partial}{\partial\nu}B'_\nu(kr) - rB'_\nu(kr)\frac{\partial B_\nu(kr)}{\partial\nu} \right]_{a_0}^{a_1}. \tag{2.6}$$

Для интеграла $J_\nu^{(0)}$ можно получить две эквивалентные формулы

$$J_\nu^{(0)} = -\frac{k}{2\nu}\left[rA_\nu(kr)\frac{\partial}{\partial\nu}B'_\nu(kr) - rA'_\nu(kr)\frac{\partial B_\nu(kr)}{\partial\nu} \right]_{a_0}^{a_1} =$$

$$= -\frac{k}{2\nu}\left[rB_\nu(kr)\frac{\partial}{\partial\nu}A'_\nu(kr) - rB'_\nu(kr)\frac{\partial A_\nu(kr)}{\partial\nu} \right]_{a_0}^{a_1}. \tag{2.7}$$

Первую формулу получим, если в (2.4) примем $u(r) = A_\nu(kr)$, $V(r) = B_{\nu+\varepsilon}(kr)$, а вторую формулу получим, положив в (2.4) $u(r) = B_\nu(kr)$, $V(r) = A_{\nu+\varepsilon}(kr)$.

Дальнейшие выкладки проведем для случая $m = 1$, когда согласно (1.7)

$$a = A_\nu(ka_0), \; b = B_\nu(ka_0). \tag{2.8}$$

Подставим в (2.1) выражения (2.8), (2.5) и (2.6) и вместо $2J_\nu^{(0)}$ выражение

$$-\frac{k}{2\nu}\left\{\left[rA_\nu(kr)\frac{\partial}{\partial\nu}B'_\nu(kr) - rA'_\nu(kr)\frac{\partial B_\nu(kr)}{\partial\nu}\right]_{a_0}^{a_1} + \right.$$

$$\left. + \left[rB_\nu(kr)\frac{\partial}{\partial\nu}A'_\nu(kr) - rB'_\nu(kr)\frac{\partial A_\nu(kr)}{\partial\nu}\right]_{a_0}^{a_1}\right\}. \tag{2.9}$$

Поскольку в (2.5) – (2.9) $\nu = \nu_j$, воспользовавшись уравнением (1.8), которое можно записать при $m = 1$ и так:

$$A_{\nu_j}(ka_1)B_{\nu_j}(ka_0) = A_{\nu_j}(ka_0)B_{\nu_j}(ka_1), \tag{2.10}$$

а также (1.6), вместо (2.1) будем иметь

$$-2\nu N^2 V_1 = B_\nu(ka_0)ka_1\Omega_\nu\frac{\partial}{\partial\nu}A_\nu(ka_1) - B_\nu(ka_0)\frac{\operatorname{sh}\pi\nu}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}B_\nu(ka_0) -$$

$$- ka_1A_\nu(ka_0)\Omega_\nu\frac{\partial}{\partial\nu}B_\nu(ka_1), \tag{2.11}$$

где

$$\Omega_\nu = A_\nu(ka_0)B'_\nu(ka_1) - A'_\nu(ka_1)B_\nu(ka_0) \tag{2.12}$$

и всюду ν следует заменить на ν_j.

Учитывая, что на основании (2.10)

$$\frac{A_{\nu_j}(ka_1)}{B_{\nu_j}(ka_1)} = \frac{A_{\nu_j}(ka_0)}{B_{\nu_j}(ka_0)}, \qquad \frac{A_{\nu_j}(ka_0)}{A_{\nu_j}(ka_1)} = \frac{B_{\nu_j}(ka_0)}{B_{\nu_j}(ka_1)},$$

а также (1.6), выражение (2.12) можно привести к виду

$$\Omega_{\nu_j} = \operatorname{sh}\pi\nu_j\, A_{\nu_j}(ka_0)\left[\pi ka_1A_{\nu_j}(ka_1)\right]^{-1}.$$

Это позволяет окончательно получить формулу

$$N^2V_1 = \sigma_1(\nu_j) = \frac{\operatorname{sh}\pi\nu_j\, A_{\nu_j}(ka_0)\Lambda_j^{(1)}}{2\pi\nu_jA_{\nu_j}(ka_1)}, \qquad \Lambda_j^{(1)} = \left.\frac{\partial\Delta_j^{(1)}}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_j}. \tag{2.13}$$

С помощью аналогичных выкладок можно получить формулу

$$N^2V_2 = \sigma_2(\nu_j) = \frac{\operatorname{sh}\pi\nu_j\, h_a^{(0)}\Lambda_j^{(2)}l_0^{(h)}A_{\nu_j}(kr)}{2\pi\nu_jh_a^{(1)}l_1^{(h)}A_{\nu_j}(kr)}, \qquad \Lambda_j^{(2)} = \left.\frac{\partial\Delta_j^{(2)}}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_j}, \tag{2.14}$$

где

$$h_a^{(i)} = \left[1+\left(h_i - a_i^{-1}\right)^2\right]^{-1/2}, \qquad i = 0, 1.$$

С помощью аналогичных построений формулу (1.21) можно преобразовать к виду

$$\sigma^*(\nu_j) = N^2V_*(r,\nu_j) = \frac{\operatorname{sh}(\pi\nu_j)l_0^{(h)}A^*_{\nu_j}(kr)\Lambda^*_j}{2\pi\nu_jh_a^{(1)}l_1^{(h)}A^*_{\nu_j}(kr)\sqrt{1+a_0^{-2}}},$$

$$\Lambda^*_j = \left.\frac{\partial\Delta^*_j}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_j}. \tag{2.15}$$

Другим важным моментом при использовании полученных интегральных преобразований является получение асимптотической формулы для корней ν_j трансцендентных уравнений (1.8) и (1.19) для больших значений j.

Перейдем к получению таких формул. Начнем с уравнений (1.8). С этой целью, учитывая (1.5), воспользуемся асимптотической формулой 7.13.2 (17) из [2] для функции Бесселя при больших чисто мнимых порядках. Оставляя в указанной асимптотической формуле главный член, используя формулу 700.1 из [6], имеем

$$J_{i\nu}(x) = (2\pi\nu)^{-1/2} e^{\nu\pi/2} \exp\left[i\left(\nu + \nu\ln\frac{x}{2} - \nu\ln\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad \nu \to \infty.$$

Отделяя здесь мнимую часть от действительной, получаем асимптотические равенства при больших ν:

$$\begin{aligned} A_\nu(x) &= \operatorname{Re} J_{i\nu}(x) = (2\pi\nu)^{-1/2} e^{\nu\pi/2} \cos\left(\nu + \nu\ln\frac{x}{2} - \nu\ln\nu - \frac{\pi}{4}\right), \\ B_\nu(x) &= \operatorname{Im} J_{i\nu}(x) = (2\pi\nu)^{-1/2} e^{\nu\pi/2} \sin\left(\nu + \nu\ln\frac{x}{2} - \nu\ln\nu - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Полагая здесь $\nu = \nu_j$ и подставляя полученное выражение в первое уравнение из (1.8), приходим к асимптотическому при больших ν_j равенству

$$(2\pi\nu_j)^{-1/2} e^{\nu_j\pi} \sin\nu_j\gamma = 0, \quad \gamma = \ln\left(a_1 a_0^{-1}\right).$$

Отсюда и получаем требуемую асимптотическую формулу для корней первого трансцендентного уравнения из (1.8)

$$\nu_j = \gamma^{-1}\pi j, \quad j \to \infty. \tag{2.17}$$

Теперь будем искать асимптотическое решение для второго $(m = 2)$ трансцендентного уравнения (1.8). Поскольку в граничные функционалы $l_j^{(h)}$ входят производные и [6]

$$J'_{i\nu}(x) = x^{-1} i\nu J_{i\nu}(x) - x J_{i\nu+1}(x), \tag{2.18}$$

нам необходимо знать главный член в асимптотическом представлении функции Бесселя при больших значениях порядка. Его найдем, используя 7.13.2 (14) из [2] в виде

$$J_{i\nu+1}(x) = (2\pi\nu)^{-1/2} e^{-\nu\pi/2} \exp\left[i\left(\nu + \nu\ln\frac{x}{2} + \nu\ln\nu - \frac{\pi}{2}\right)\right], \quad \nu \to \infty. \tag{2.19}$$

Поскольку на основании (1.5) и (2.18)

$$\begin{aligned} A'_\nu(x) &= -\nu x^{-1} B_\nu(x) - x\operatorname{Re} J_{i\nu+1}(x), \\ B'_\nu(x) &= \nu x^{-1} A_\nu(x) - x\operatorname{Im} J_{i\nu+1}(x), \end{aligned} \tag{2.20}$$

с учетом (1.7), (2.20), (2.19) и (2.16) главные члены в асимптотических представлениях функционалов $l_j^{(h)}$ будут иметь вид

$$l_i^{(h)} A_{\nu_j}(kr) = -\nu_j\left(ka_i\sqrt{2\pi\nu_j}\right)^{-1} e^{\nu_j\pi/2} \sin\left(\nu_j + \nu_j\ln\frac{1}{2}a_i j - \nu_j\ln\nu_j - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\nu_j \to \infty, \quad i = 0, 1.$$

$$l_i^{(h)} B_{\nu_j}(kr) = \nu_j \left(k a_i \sqrt{2\pi\nu_j}\,\right)^{-1} e^{\nu_j \pi/2} \cos\left(\nu_j + \nu_j \ln\frac{1}{2} a_i j - \nu_j \ln \nu_j - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\nu_j \to \infty.$$

Подставляя полученные выражения во второе $(m = 2)$ трансцендентное уравнение (1.8), приходим к асимптотическому равенству

$$\nu_j^2 e^{\nu_j \pi} (j^2 a_0 a_1 2\pi\nu_j)^{-1} \sin\gamma\nu_j = 0.$$

Отсюда вытекает, что асимптотическая формула (2.17) справедлива и для второго $(m = 2)$ трансцендентного уравнения (1.8).

Для получения асимптотической формулы для корней трансцендентного уравнения (1.19) следует воспользоваться согласно (1.15) главным членом в асимптотическом разложении для больших порядков модифицированной функции Бесселя [5, с. 66]

$$I_{i\nu}(x) = \frac{x^{i\nu}}{2^{i\nu}\Gamma(i\nu + 1)}, \qquad \nu \to \infty.$$

Последующее использование асимптотической формулы 1.18 (2) из [7] для $\Gamma(z)$ и тех же выкладок, что и при асимптотическом решении уравнения (1.8), приводит к тому, что асимптотическая формула (2.17) справедлива и для корней уравнения (1.19).

3. Полученные интегральные преобразования (1.13) и (1.20) можно применять для решения задач дифракции волн на полом усеченном двумя сферическими поверхностями круговом конусе (параметр k будет волновым числом). Кроме того, они могут быть применены к задачам нестационарной теплопроводности для указанных областей. Покажем это на примере следующих двух осесимметричных краевых задач математической физики для указанного конуса, причем с целью сокращения формул рассмотрим случай осевой симметрии и отсутствия полости.

Начнем с задачи дифракции акустических волн в круговом усеченном конусе $a_0 \le r \le a_1$, $-\pi < \varphi \le \pi$, $0 \le \theta \le \omega$, возникающих за счет задания радиальных V_r скоростей точек $r = a_1$ акустической среды в виде

$$V_r\big|_{r=a_1} = e^{-i\omega_0 t} g(\theta), \qquad 0 \le \theta \le \omega.$$

Точная формулировка задачи для амплитуды потенциала скоростей $u(r, \theta)$ запишется так:

$$\Delta u(r,\theta) + k^2 r^2 u(r,\theta) = 0, \qquad a_0 < r < a_1, \qquad 0 < \theta < \pi, \qquad k^2 = \omega_0^2 c^{-2}, \tag{3.1}$$

$$u'(a_0, \theta) = 0, \qquad u'(a_1, \theta) = g(\theta), \qquad u^{\bullet}(r, \omega) = 0,$$

где

$$\Delta u \equiv (r^2 u')' + (\sin\theta)^{-1}(\sin\theta\, u^{\bullet})^{\bullet}.$$

Здесь и всюду ниже штрих означает дифференцирование по r, а точка — по θ. Для решения краевой задачи (3.1) применим интегральное преобразование ($P_\mu(z)$ — функция Лежандра)

$$u_n(r) = \int\limits_0^\omega \sin\theta\, P_{\mu_n}(\cos\theta) u(r,\theta)\, d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

формула обращения для которого получена в [8] и имеет вид

$$u(r,\theta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(r)P_{\mu_n}(\cos\theta)}{\sigma_n(\omega)}, \qquad \frac{1}{\sigma_n(\omega)} = \frac{(2\mu_n - 1)Q^1_{\mu_n}(\cos\omega)}{\left[dP^1_\mu(\cos\omega)/d\mu \right]_{\mu=\mu_n}},$$

где μ_n — корни уравнения $P^1_{\mu_n}(\cos\omega) = 0$, а $P^\nu_\mu(r)$, $Q^\nu_\mu(r)$ — присоединенные функции Лежандра. В результате краевая задача (3.1) перейдет в следующую одномерную краевую задачу:

$$\left(r^2 u_n'\right)' + r^2 k^2 u_n(r) - \mu_n(\mu_n + 1)u_n(r) = 0, \quad a_0 < r < a_1,$$
$$u'(a_0) = 0, \quad u'(a_1) = g_n. \tag{3.2}$$

Для решения последней применяем интегральное преобразование (1.13), (1.12) и (2.19) при $m = 2$, полагая в соответствующих формулах $h_i = 0$, $i = 0, 1$, т. е. трансформанта будет определяться формулой

$$u_{nj} = \int_{a_0}^{a_1} V_3(r, \nu_j) u_n(r)\, dr, \tag{3.3}$$

где

$$V_3(r, \nu_j) = V_2(r, \nu_j)\big|_{h_i=0} = r^{-1/2}\left\{ A_{\nu_j}(kr) l_0^{(0)} B_{\nu_j}(kr) - B_{\nu_j}(kr) l_0^{(0)} A_{\nu_j}(kr) \right\}.$$

Применение интегрального преобразования (3.3) к краевой задаче (3.2) позволяет получить ее решение в виде

$$u_{nj} = a_1^2 g_n V_3(r, \nu_j) \left[\nu_j^2 + \frac{1}{4} + \mu_n(\mu_n + 1) \right]^{-1}.$$

Для обращения полученной трансформанты воспользуемся формулами (1.12) и (2.14), заменив в них $\sigma_2(\nu_j)$ на $\sigma_3(\nu_j) = \sigma_2(\nu_j)\big|_{h_i=0}$. Последующее использование формулы (3.3) позволяет получить решение поставленной задачи в виде

$$u(r,\theta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_1^2 g_n V_3(a_1, \nu_j) P_{\mu_n}(\cos\theta)}{\sigma_n(\omega)\left[\nu_j^2 + 1/4 + \mu_n(\mu_n + 1) \right]\sigma_3(\nu_j)}.$$

Перейдем к решению осесимметричной нестационарной начально-краевой задачи теории теплопроводности для того же усеченного конуса:

$$\Delta u(r,\theta,t) = \kappa^{-1} r^2 \frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial t}, \quad a_0 < r < a_1, \quad 0 < \theta < \omega, \quad t > 0,$$
$$u(r,\theta,0) = f(r,\theta), \quad u(r,\omega,t) = 0, \quad u'(a_0,\theta,t) = 0, \tag{3.4}$$
$$u'(a_1,\theta,t) + h_1 u(a_1,\theta,t) = g(\theta,t).$$

Смысл положительных параметров κ, h в (3.4) объяснен в [9].

Для решения поставленной задачи естественно применить интегральное преобразование Лапласа по времени. Но в данном случае в параметр k, содержащийся в полученных интегральных преобразованиях, войдет, вообще говоря, комплексный параметр преобразования Лапласа, и полученными выше результатами можно будет воспользоваться, только если при обращении трансформант Лапласа подынтегральная функция в интеграле Бромвича не будет иметь других особых точек, кроме полюсов на вещественной оси. Чтобы избежать применения преобразования Лапласа и трудностей с его обращением, поступим следующим образом. Разобьем участок времени T, в котором исследуется процесс теплопроводности, на M интервалов длиной $h = TM^{-1}$, в качестве искомых величин возьмем

$$u(r,\theta,mh) = u_m(r,\theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \tag{3.5}$$

и заменим производную разностью

$$\frac{\partial u(r,\theta,t)}{\partial t} = \frac{u(r,\theta,t) - u(r,\theta,t-h)}{h}.$$

Тогда начально-краевую задачу (3.4) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \Delta u_m(r,\theta) - (\kappa h)^{-1} r^2 \left[u_m(r,\theta) - u_{m-1}(r,\theta) \right] = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \\ u_0(r,\theta) = f(r,\theta), \quad u_m(r,\omega) = 0, \quad a_0 \le r < a_1, \\ u'_m(a_0,\theta) = 0, \quad u'_m(a_1,\theta) + h_1 u_m(a_1,\theta) = g_m(\theta), \quad 0 \le \theta \le \omega. \end{gathered} \tag{3.6}$$

К записанным уравнениям применим интегральное преобразование

$$u_{m,n}(r) = \int_0^\infty \sin\theta P_{\mu_n}(\cos\theta) u_m(r,\theta) d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.7}$$

для которого справедлива формула обращения [8]

$$\begin{gathered} u_m(r,\theta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{m,n}(r) P_{\mu_n}(\cos\theta)}{\sigma_*(\mu_n)}, \\ \frac{1}{\sigma_*(\mu_n)} = \frac{(2\mu_n + 1) Q_{\mu_n}}{\Lambda(\mu_n)}, \quad \Lambda(\mu_n) = \left[\frac{dP_\mu(\cos\omega)}{d\mu} \right]_{\mu=\mu_n}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Здесь числа μ_n — корни уравнения $P_{\mu_n}(\cos\omega) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

В результате интегрального преобразования (3.7) вместо (3.6) будем иметь

$$\begin{gathered} \left[r^2 u'_{m,n}(r) \right]' + \mu_n(\mu_n + 1) u_{m,n}(r) - k^2 r^2 \left[u_{m,n}(r) - u_{m-1,n}(r) \right] = 0, \\ a_0 < r < a_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad u_{0,n}(r) = f_n(r), \\ k^2 = (\kappa h)^{-1}, \quad u'_{m,n}(a_0) = 0, \quad u'_{m,n}(a_1) + h_1 u_{m,n}(a_1) = g_{m,n}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

К полученным уравнениям применим интегральное преобразование (1.20), т. е.

$$u_{m,n,j} = \int_{a_0}^{a} u_{m,n}(r) V_*(r,\nu_j) dr. \tag{3.10}$$

В результате вместо (3.9) получим

$$\begin{gathered} \left[\mu_n(\mu_n + 1) - \left(\nu_j^2 + \frac{1}{4} \right) \right] u_{m,n,j} = -a_1^2 g_{m,n} V^*(a_1,\nu_j) - \\ - k^2 \int_{a_0}^{a_1} u_{m-1,n}(r) r^2 V^*(r,\nu_j) dr, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad u_{0,n,j} = f_{n,j}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Возвратившись здесь от трансформант (3.7), (3.10) к оригиналам с помощью формул обращения (3.8), (1.20) и (2.15), вместо (3.11) будем иметь

$$u_m(r,\theta) = a_1^2\int_0^\omega \sin\theta' g_m(\theta') F_1(r, a_1, \theta, \theta')d\theta' +$$

$$+ k^2\int_{a_0}^{a_1}\int_0^\omega u_{m-1}(\rho,\theta')\sin\theta' F_1(r,\rho,\theta,\theta')d\rho d\theta', \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{3.12}$$

$$u_0(r,\theta) = -\int_{a_0}^{a_1}\int_0^\omega f(\rho,\theta')\sin\theta' F_0(r,\rho,\theta,\theta')d\rho d\theta'. \tag{3.13}$$

Здесь введено обозначение

$$F_l(r,\rho,\theta,\theta') = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{V_*(r,\nu_j)V_*(\rho,\nu_j)P_{\mu_n}(\cos\theta)P_{\mu_n}(\cos\theta')}{\sigma^*(\nu_j)\sigma_*(\mu_n)\left[\mu_n(\mu_n+1)-\left(\nu_j^2+1/4\right)\right]^l}, \quad l = 0, 1.$$

Полученные рекуррентные соотношения (3.12), (3.13) позволяют последовательно найти все искомые функции (3.5) и полностью решить поставленную задачу.

1. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – Ч. 1. – 278 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966. – 295 с.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5 т. – М.: Гостехтеориздат, 1951. – Т. 4. – 804 с.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
5. *Грей Э., Метьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 386 с.
6. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1964. – 228 с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 294 с.
8. *Попов Г. Я.* Осесимметрическая смешанная задача теории упругости для усеченного кругового полого конуса // Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, № 3. – С. 431 – 443.
9. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.

Получено 18.01.2001