УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Акад. таможен. службы Украины, Днепропетровск)

О НАИЛУЧШИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ n-ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

To solve extremal problems in approximation theory in L_2 we use τ-moduli introduced by K. G. Ivanov. We obtain the exact values of constants in Jackson-type inequalities and find the exact values of n-widths of functional classes determined by these moduli.

Для розв'язку екстремальних задач теорії апроксимації у просторі L_2 застосовано τ-модулі, введені К. Г. Івановим. Одержано точні значення констант в нерівностях типу Джексона та знайдено точні значення n-поперечників функціональних класів, визначених за допомогою даних модулів.

1. Пусть L_2 — пространство измеримых 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\|_2 = \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx\right\}^{1/2} < \infty,$$

а L_2^r, $r \in \mathbb{N}$, — множество всех 2π-периодических функций, у которых производная $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ $(f^{(0)}(x) \equiv f(x))$ является абсолютно непрерывной, и $f^{(r)}(x) \in L_2$. Известно, что если $f(x) \in L_2$ и $f(x) \sim a_0/2 + \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j \cos(jx+\varphi_j)$ — разложение функции в ряд Фурье, то ее наилучшее приближение подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов порядка $\le n-1$ равно

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}\right\} = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{\sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2\right\}^{1/2},$$

где $S_{n-1}(f,x) = a_0/2 + \sum_{j=1}^{n-1} \rho_j \cos(jx+\varphi_j)$ — частичная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье функции $f(x)$.

Для $f(x) \in L_2$ обычным образом определим модуль непрерывности k-го порядка

$$\omega_k(f,t)_2 = \sup\left\{\left\|\Delta_h^k f(x)\right\|_2 : |h| \le t\right\},$$

где $\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j} f(x+jh)$ — конечная разность k-го порядка функции $f(x)$.

При решении задач теории аппроксимации в пространстве L_2 константы

$$\chi_{n,r,k}(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\omega_k(f^{(r)}, t/n)_2} : f(x) \in L_2^r,\ f(x) \ne \mathrm{const}\right\} \qquad (1)$$

в неравенстве типа Джексона

$$E_{n-1}(f)_2 \le \chi n^{-r} \omega_k(f^{(r)}, t/n)_2$$

изучали Н. И. Черных, А. А. Лигун, В. А. Юдин, В. В. Арестов, А. Г. Бабенко и другие авторы (см., например, [1 – 6]). Здесь и далее отношение $0/0$ полагаем равным 0.

Характеристики

$$\Omega_{n,r,k}(\varphi, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup\left\{ \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)_2}{\int_0^t \omega_k^2(f^{(r)}, x)_2 \varphi(x)\,dx} : f(x) \in L_2^r,\ f(x) \neq \mathrm{const} \right\}, \qquad (2)$$

где $\varphi(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq t$, приводящие к уточнению оценки сверху константы χ в неравенстве типа Джексона, рассматривали Н. И. Черных [1] ($\Omega_{n,0,k}(\varphi, 2\pi/n)$, где $\varphi(x) = \sin(nx/2) + (\sin nx)/2$), Л. В. Тайков [7] ($\Omega_{n,r,1}(\varphi, t)$, где $0 < t \leq \pi/(2n)$, $\varphi(x) \equiv 1$), [8] ($\Omega_{n,r,k}(\varphi, t)$, где $0 < t \leq \pi/n$, $\varphi(x) \equiv 1$), А. А. Лигун [9] ($\Omega_{n,r,k}(\varphi, t)$, где $0 < t \leq \pi/n$, $\varphi(x) \geq 0$) и другие (см., например, [10, 11]).

Всюду далее под $\Phi(u)$, $0 \leq u < \infty$, понимаем непрерывную монотонно возрастающую функцию, обращающуюся в нуль в точке $u = 0$. Пусть $r, m \in \mathbb{N}$, $H > 0$. Для классов функций (см. соответственно [7, 8, 10, 11])

$$K(r, H) = \left\{ f(x) \in L_2^r : \int_0^H \omega_1^2(f^{(r)}, x)_2\,dx \leq 1 \right\},$$

$$K(m, r, \Phi) = \left\{ f(x) \in L_2^r : \int_0^u \omega_m^2(f^{(r)}, x)_2\,dx \leq \Phi^2(u),\ 0 < u \leq 2\pi \right\},$$

$$\tilde{K}(1, r, \Phi) = \left\{ f(x) \in L_2^r : \frac{\pi}{2u}\int_0^u \omega_1^2(f^{(r)}, x)_2 \sin\frac{\pi x}{u}\,dx \leq \Phi^2(u),\ 0 < u \leq 2\pi \right\},$$

$$K^*(1, r, \Phi) = \left\{ f(x) \in L_2^r : \int_0^u \omega_1^2(f^{(r)}, x)_2 \left(\sin\frac{\pi x}{u} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{u} \right) dx \leq \Phi^2(u),\ 0 < u \leq \pi \right\},$$

определенных с помощью усредненных модулей непрерывности, были найдены точные значения колмогоровских n-поперечников в случаях, когда мажоранты удовлетворяют некоторым естественным ограничениям.

2. Для исследования поведения наилучшего приближения функции алгебраическими полиномами в пространствах $L_p[a, b]$, $p \geq 1$, и $C[a, b]$ К. Г. Иванов ввел в рассмотрение новые модули непрерывности и гладкости и изучил их свойства и связи с известными дифференциально-разностными характеристиками функций [12, 13]. Приведем с учетом рассматриваемого в данной статье случая 2π-периодичности функций необходимые сведения из указанных публикаций, полагая $\|f\|_p = \|f\|_{L_p[0,2\pi]}$.

Пусть $\lambda(x)$ — произвольная положительная 2π-периодическая функция, $w(x)$ — непрерывная неотрицательная 2π-периодическая функция. Величину

$$\tau_k(f, w, \lambda)_{p', p} = \left\| w(\cdot)\omega_k(f, \cdot; \lambda(\cdot))_{p'} \right\|_p, \qquad p', p \geq 1,$$

где

$$\omega_k(f, x; \lambda(x))_{p'} = \left\{ \frac{1}{2\lambda(x)} \int_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} \left| \Delta_h^k f(x) \right|^{p'} dh \right\}^{1/p'}.$$

называют τ-модулем гладкости k-го порядка функции $f(x)$, принадлежащей пространству $L_{\max(p,p')}[0, 2\pi]$.

Если $\lambda(x) \equiv u = \mathrm{const} > 0$, $f(x) \in L_p[0, 2\pi]$, $w(x) \equiv 1$ и $p' \in [1, p]$, то

$$\tau_k(f, 1; u)_{p'; p} \asymp \omega_k(f, u)_p, \tag{3}$$

где, как обычно, символ $\asymp$ означает отношение слабой эквивалентности.

Свойства $\tau_k(f, w; \lambda)_{p', p}$ приведены в [12, 13]. Всюду далее рассматриваем характеристику $\tau_1(f, 1; u)_{2,2}$.

3. Сформулируем для $\tau_1(f, 1; u)_{2,2}$ экстремальные задачи, сходные по содержанию с (1) и (2):

$$\mathcal{L}_{n,r,1}(t) = \sup\left\{\frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\tau_1(f^{(r)}, 1; t/n)_{2,2}} : f(x) \in L_2^r,\ f(x) \neq \mathrm{const}\right\}, \tag{4}$$

$$\mathcal{M}_{n,r,1}(\varphi, t) = \sup\left\{\frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)_2}{\int_0^t \tau_1^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2}\, \varphi(u)\, du} : f(x) \in L_2^r,\ f(x) \neq \mathrm{const}\right\}, \tag{5}$$

решение которых с точки зрения автора также представляет определенный интерес.

Одними из основных результатов данной статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любых чисел $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < t \leq \pi/2$ имеют место равенства*

$$\mathcal{L}_{n,r,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2(1 - (\sin t)/t)}}. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть в формуле (5) $\varphi_*(u) = u$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < t \leq \pi/n$ — произвольные числа. Тогда справедливы равенства*

$$\mathcal{M}_{n,r,1}(\varphi_*, t) = \frac{n^2}{n^2 t^2 - 4\sin^2(nt/2)}. \tag{7}$$

4. На основании результатов [6, 7] в приведенных ниже теоремах 3, 4 в пространстве L_2 получены точные значения n-поперечников некоторых функциональных классов, определенных с помощью τ-модулей. Прежде чем сформулировать эти утверждения, приведем ряд понятий и определений.

Пусть B — единичный шар в L_2; K — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $Q : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n; $Q^{\perp} : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования L_2 на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(\mathrm{K}, L_2) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon B \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathrm{K}\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\},$$

$$d_n(\mathrm{K}, L_2) = \inf\{\sup\{\inf\{\|f - \varphi\|_2 : \varphi \in \Lambda_n\} : f \in \mathrm{K}\} : \Lambda_n \subset L_2\},$$

$$\delta_n(\mathrm{K}, L_2) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f - Qf\|_2 : f \in \mathrm{K}\} : QL_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\},$$

$$d^n(\mathrm{K}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_2 : f \in \mathrm{K}\cap\Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathrm{K}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\left\|f - Q^{\perp}f\right\|_2 : f \in \mathrm{K}\right\} : Q^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками. Поскольку L_2 является гильбертовым пространством, имеют место следующие соотношения (см., например, [14]):

$$b_n(\mathrm{K}, L_2) \leq d^n(\mathrm{K}, L_2) \leq d_n(\mathrm{K}, L_2) = \delta_n(\mathrm{K}, L_2) = \Pi_n(\mathrm{K}, L_2). \tag{8}$$

При изменении u величина $\tau_1(f, 1; u)_{2,2}$ также будет меняться. Поэтому, учитывая соотношение (3), указанный τ-модуль можно использовать для определения классов функций в L_2. Обозначим через $W_1^r(\Phi, L_2)$ $(r \in \mathrm{Z}_+;$ $W_1^0(\Phi, L_2) = W_1(\Phi, L_2))$ класс функций $f(x) \in L_2^r$, которые при любых $0 < u \leq$ $\leq \pi$ удовлетворяют условию $\tau_1(f^{(r)}, 1; u)_{2,2} \leq \Phi(u)$.

Теорема 3. *Если мажорирующая функция $\Phi(u)$ при некотором $n \in \mathrm{N}$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^2(\pi t/(2n))}{\Phi^2(\pi/(2n))} \geq \frac{\pi}{\pi - 2}\begin{cases} 1 - \dfrac{2\sin(\pi t/2)}{\pi t}, & \text{если} \quad 0 < t \leq 2; \\ 2(1 - 1/t), & \text{если} \quad t \geq 2, \end{cases} \tag{9}$$

то

$$p_n(W_1^r(\Phi, L_2);\, L_2) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}\right\}^{1/2} \left[\!\left[\frac{n+1}{2}\right]\!\right]^{-r} \Phi\left(\frac{\pi}{2[\![(n+1)/2]\!]}\right), \tag{10}$$

где $p_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников, перечисленных выше; $[\![\beta]\!]$ — целая часть числа $\beta > 0$.

Далее будет приведен пример мажоранты, для которой неравенство (9) выполняется при любом $n \in \mathrm{N}$.

Под $\tilde{W}_1^r(\Phi, L_2)$ будем понимать класс функций $f(x) \in L_2^r$, которые удовлетворяют условию

$$m^2 \int_0^{\pi/(2m)} u\,\tau_1^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2}\,du \leq \Phi^2\left(\frac{\pi}{2m}\right) \quad \forall\, m \in \mathrm{N}.$$

Теорема 4. *Пусть мажорирующая функция $\Phi(u)$ при $0 < u \leq \pi$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^2(\lambda u)}{\Phi^2(u)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2 - 8}\begin{cases} 1 - \dfrac{16\sin^2(\pi\lambda/4)}{\pi^2\lambda^2}, & \text{если} \quad 0 < \lambda \leq 2; \\ 2 - \dfrac{4}{\lambda} + \left(1 - \dfrac{4}{\pi^2}\right)\dfrac{4}{\lambda^2}, & \text{если} \quad \lambda \geq 2. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда для любых $n \in \mathrm{N}$ справедливы следующие равенства:

$$p_n(\tilde{W}_1^r(\Phi, L_2);\, L_2) = \frac{2}{\sqrt{\pi^2 - 8}} \left[\!\left[\frac{n+1}{2}\right]\!\right]^{-r} \Phi\left(\frac{\pi}{2[\![(n+1)/2]\!]}\right). \tag{12}$$

Здесь $p_n(\cdot)$ — любой из рассмотренных ранее n-поперечников.

Для классов

$$K(r, m, H)_q = \left\{ f(x) \in L_2^r : \int_0^H \omega_m^q(f^{(r)}, u)_2 \, du \le 1 \right\}, \ r \in \mathbb{Z}_+, \ H > 0,$$

точные значения колмогоровских n-поперечников в L_2 были найдены Л. В. Тайковым [7] $(m = 1, \ q = 2)$ и А. Пинкусом [15, с. 102], обобщившим результат [7] на случай $m \in \mathbb{N}, \ 1 < q \le 2$. Используя понятие τ-модуля, введем класс, заданный в некотором смысле сходным с $K(r, 1, H)_2$ образом. Для этого обозначим через $\mathcal{N}(r, H)_2, \ r \in \mathbb{N}, \ H > 0$, множество функций $f(x) \in L_2^r$, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^H u \tau_1^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2} \, du \le 1.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет неравенству $nH \le \pi$. Тогда*

$$p_n(\mathcal{N}(r, H)_2; L_2) = \left\{ \left[\!\left[\frac{n+1}{2} \right]\!\right]^2 H^2 - 4 \sin^2\left(\left[\!\left[\frac{n+1}{2} \right]\!\right] \frac{H}{2} \right) \right\}^{-1/2} \left[\!\left[\frac{n+1}{2} \right]\!\right]^{1-r},$$

где $p_n(\cdot)$ — любой из перечисленных ранее n-поперечников.

Определенным „несовершенством" данного результата, как и упомянутых выше результатов из [7, 15], является то, что для заданного класса подсчитываются не все поперечники, а только конечное их число $n \le \pi / H$.

5. *Доказательство теоремы* 1. Пусть $u > 0$ — произвольное фиксированное число. Тогда для любой функции $f(x) \in L_2$ $(f(x) \ne \text{const})$ запишем

$$\tau_1^2(f, 1; u)_{2,2} = \frac{1}{2\pi u} \int_0^{2\pi} dx \int_{-u}^{u} \left| \Delta_h^1 f(x) \right|^2 dh = \frac{1}{2u} \int_{-u}^{u} \left\| \Delta_h^1 f \right\|_2^2 dh.$$

Поскольку

$$\left\| \Delta_h^1 f \right\|_2^2 = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2 (1 - \cos jh),$$

отсюда следует

$$\tau_1^2(f, 1; u)_{2,2} = \frac{2}{u} \int_0^u \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2 (1 - \cos jh) \, dh \ge 2 \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2 \left(1 - \frac{\sin ju}{ju} \right).$$

Учитывая, что $E_{n-1}^2(f)_2 = \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2$, имеем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{1}{2} \tau_1^2(f, 1; u)_{2,2} + \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2 \frac{\sin ju}{ju}. \tag{13}$$

Пусть $u > 0$ удовлетворяет дополнительному условию $nu \le \pi / 2$. Поскольку в этом случае [7, с. 435]

$$\max \left\{ \left| \frac{\sin v}{v} \right| : v \ge nu \right\} = \frac{\sin nu}{nu}, \tag{14}$$

то в силу (13) имеем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{1}{2}\tau_1^2(f, 1; u)_{2,2} + \frac{\sin nu}{nu} E_{n-1}^2(f)_2.$$

Отсюда следует

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{1}{2\left(1 - \frac{\sin nu}{nu}\right)} \tau_1^2(f, 1; u)_{2,2}. \tag{15}$$

Рассмотрим далее произвольную функцию $f(x) \in L_2^r$. Используя известное неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \le \frac{1}{n^r} E_{n-1}(f^{(r)})_2 \tag{16}$$

и (15), получаем оценку сверху величины наилучшего полиномиального приближения

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{\tau_1^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2}}{2n^{2r}\left(1 - \frac{\sin nu}{nu}\right)}. \tag{17}$$

Полагая $t = nu$, из (17) и определения (4) характеристики $\mathcal{L}_{n,r,1}(t)$ имеем

$$\mathcal{L}_{n,r,1}(t) \le \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)}}. \tag{18}$$

Для получения оценки снизу величины $\mathcal{L}_{n,r,1}(t)$ рассмотрим, например, функцию $f_0(x) = \cos nx$, являющуюся элементом множества L_2^r. Поскольку $E_{n-1}(f_0)_2 = 1$ и $\tau_1(f_0^{(r)}, 1; t/n)_{2,2} = n^r\sqrt{2(1 - (\sin t)/t)}$, то

$$\mathcal{L}_{n,r,1}(t) \ge \frac{n^r E_{n-1}(f_0)_2}{\tau_1(f_0^{(r)}, 1; t/n)_{2,2}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)}}.$$

Сравнивая последнюю формулу с (18), получаем требуемое равенство (6). Теорема 1 доказана.

6. *Доказательство теоремы 2.* Умножив обе части (13) на число $u > 0$ и проинтегрировав полученное неравенство по u от 0 до t, где $t \le \pi/n$, запишем

$$\frac{t^2}{2} E_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{1}{2}\int_0^t u\tau_1^2(f, 1; u)_{2,2}du + 2\sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2 j^{-2} \sin^2 \frac{jt}{2}.$$

Разделив обе части данного неравенства на $t^2/2$ и использовав (14), будем иметь

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{1}{t^2}\int_0^t u\tau_1^2(f, 1; u)_{2,2}du + 4\frac{\sin^2(nt/2)}{n^2t^2} E_{n-1}^2(f)_2.$$

Отсюда получим

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1}{t^2(1-4n^{-2}t^{-2}\sin^2(nt/2))}\int_0^t u\tau_1^2(f, 1; u)_{2,2}du.$$

Использовав (16) и данное неравенство, для произвольной функции $f(x) \in L_2^r$ ($f(x) \neq \text{const}$) запишем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1}{(n^2t^2 - 4\sin^2(nt/2))n^{2(r-1)}}\int_0^t u\tau_1^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2}du. \tag{19}$$

Из (19) и (5) будет следовать

$$\mathcal{M}_{n,r,1}(\varphi_*, t) \leq \frac{n^2}{n^2t^2 - 4\sin^2(nt/2)} \qquad \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right]. \tag{20}$$

Рассмотрим снова функцию $f_0(x) = \cos nx$, для которой, как нетрудно подсчитать,

$$\tau_1^2(f_0^{(r)}, 1; u)_{2,2} = 2\left(1 - \frac{\sin nu}{nu}\right)n^{2r}.$$

Тогда при $0 < t \leq \pi/n$ получим

$$\mathcal{M}_{n,r,1}(\varphi_*, t) \geq \frac{n^{2r}E_{n-1}^2(f_0)_2}{\int_0^t u\tau_1^2(f_0^{(r)}, 1; u)_{2,2}du} = \frac{n^2}{n^2t^2 - 4\sin^2(nt/2)}.$$

Равенство (7) непосредственно следует из сопоставления данной оценки снизу и формулы (20).

Теорема 2 доказана.

7. *Доказательство теоремы* 3. Оценку сверху колмогоровского $(2n-1)$-поперечника получим исходя из определения класса $W_1^r(\Phi, L_2)$ и неравенства (17), где $u = \pi/(2n)$:

$$d_{2n-1}(W_1^r(\Phi, L_2); L_2) \leq$$

$$\leq \sup\left\{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_1^r(\Phi, L_2)\right\} \leq \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{21}$$

Получим оценку снизу бернштейновского поперечника класса $W_1^r(\Phi, L_2)$. Для этого понадобится следующее неравенство:

$$\left\|\Delta_h^1 T_n^{(r)}\right\|_2^2 \leq 2\gamma_n(h)n^{2r}\|T_n\|_2^2, \tag{22}$$

где $T_n(x) \in \mathcal{T}_n$ — произвольный тригонометрический полином n-го порядка; $\gamma_n(h) = \{1 - \cos nh,$ если $n|h| \leq \pi$; $2,$ если $n|h| \geq \pi\}$ (см., например, [8, с. 221]).

Рассмотрим в L_2 шар

$$B_* = \varepsilon_* B \cap \mathcal{T}_n = \left\{T_n(x) \in \mathcal{T}_n : \|T_n\|_2 \leq \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_1^r(\Phi, L_2)$. Очевидно, что для этого нужно доказать неравенство

$$\tau_1(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} \le \Phi(u) \qquad \forall T_n(x) \in B_*,$$

где $0 < u \le \pi$.

Пусть вначале $0 < u \le \pi/n$. Тогда с учетом (22) для произвольного полинома $T_n(x) \in B_*$ записываем

$$\tau_1^2(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} = \frac{1}{2u}\int_{-u}^{u} \left\|\Delta_h^1 T_n^{(r)}\right\|_2^2 dh \le$$

$$\le 2n^{2r}\|T_n\|_2^2 \frac{1}{u}\int_0^u \gamma_n(h)dh \le \frac{\pi}{\pi-2}\left(1-\frac{\sin nu}{nu}\right)\Phi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (23)$$

Полагая $t = 2nu/\pi$ и учитывая, что в данном случае $0 < t \le 2$, из (9) и (23) получаем

$$\tau_1(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} \le \Phi(u), \qquad 0 < u \le \pi/n.$$

Пусть теперь $\pi/n \le u$. Используя проведенные выше рассуждения, после ряда простых вычислений записываем

$$\tau_1^2(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} \le \frac{\pi}{\pi-2}\left(2-\frac{\pi}{nu}\right)\Phi^2\left(\frac{\pi}{nu}\right). \qquad (24)$$

Снова полагая $t = 2nu/\pi$, из (9) и (24) имеем

$$\tau_1(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} \le \Phi(u), \qquad \pi/n \le u \le \pi.$$

Отсюда на основании определения бернштейновского $2n$-поперечника следует

$$b_{2n}(W_1^r(\Phi, L_2); L_2) \ge b_{2n}(B_*, L_2) \ge \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (25)$$

Учитывая свойство монотонности поперечников по n, требуемые оценки (10) получаем из (21), (25) и (8).

Теорема 3 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда справедливы равенства*

$$\sup\left\{\begin{matrix}|a_n(f)| \\ |b_n(f)|\end{matrix} : f \in W_1^r(\Phi, L_2)\right\} = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{1/2}\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \qquad (26)$$

где $a_n(f)$ *и* $b_n(f)$ — *коэффициенты Фурье функции* $f(x)$.

Доказательство. Не уменьшая общности, проведем рассуждения для случая $b_n(f)$. Очевидно, что

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [f(x) - S_{n-1}(f, x)]\sin nx\, dx.$$

Используя неравенство Гельдера и (21), для произвольной функции $f(x) \in W_1^r(\Phi, L_2)$ отсюда получаем

$$|b_n(f)| \le E_{n-1}(f)_2 \le \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{1/2} \frac{1}{n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{27}$$

Рассмотрим далее функцию $\varphi(x) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{1/2} \frac{1}{n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin nx$, которая, как легко видеть, принадлежит шару B_*, а значит, и классу $W_1^r(\Phi, L_2)$. Тогда

$$\sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_1^r(\Phi, L_2)\right\} \ge |b_n(\varphi)| = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{1/2} \frac{1}{n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \tag{28}$$

и экстремальное соотношение (26) для коэффициентов $b_n(f)$ непосредственно следует из (27) и (28), что и завершает доказательство следствия 1.

Приведем пример мажоранты, которая удовлетворяет ограничению (9) при любых $n \in \mathbb{N}$. Для этого рассмотрим функцию $\Phi(u) = u^{1/(\pi-2)}$. Запишем при $0 < t \le 2$ следующее выражение:

$$\frac{\Phi^2(\pi t/(2n))}{\Phi^2(\pi/(2n))} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\frac{\sin(\pi t/2)}{t}\right) = \frac{1}{t}\left\{t^{\pi/(\pi-2)} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(t - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\right\}.$$

В работе [7, с. 437, 438] показано, что функция, заключенная в фигурных скобках, является неотрицательной. Следовательно, первое неравенство в условии (9) выполнено.

При $t \ge 2$ запишем

$$\frac{\Phi^2(\pi t/(2n))}{\Phi^2(\pi/(2n))} - \frac{2\pi}{\pi-2}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left\{t^{\pi/(\pi-2)} - \frac{2\pi}{\pi-2}(t-1)\right\}.$$

Нетрудно показать, что содержащееся в фигурных скобках выражение является положительной и монотонно возрастающей функцией, а это означает, что и второе неравенство в ограничении (9) выполнено.

8. ***Доказательство теоремы*** **4.** Исходя из определения класса $\tilde{W}_1^r(\Phi, L_2)$ и неравенства (19), где $t = \pi/(2n)$, запишем оценку сверху для колмогоровского $(2n-1)$-поперечника

$$d_{2n-1}(\tilde{W}_1^r(\Phi, L_2); L_2) \le \sup\left\{E_{n-1}(f)_2 : f \in \tilde{W}_1^r(\Phi, L_2)\right\} \le \frac{2}{n^r\sqrt{\pi^2-8}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{29}$$

Аналогично доказательству предыдущей теоремы оценим снизу бернштейновский $2n$-поперечник данного класса. Для этого в L_2 рассмотрим шар

$$\tilde{B} = \tilde{\varepsilon} B \cap \mathcal{T}_n = \left\{T_n(x) \in \mathcal{T}_n : \|T_n\|_2 \le \frac{2}{n^r\sqrt{\pi^2-8}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}$$

и докажем его принадлежность классу $\tilde{W}_1^r(\Phi, L_2)$, т. е. покажем, что для произвольного полинома $T_n(x) \in \tilde{B}$ выполнены неравенства

$$m^2 \int_0^{\pi/(2m)} u\tau_1^2(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} du \le \Phi^2\left(\frac{\pi}{2m}\right) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Пусть вначале $m \ge n/2$. Тогда для любого полинома $T_n(x) \in \tilde{B}$ с учетом (22) и (11), где $\lambda = n/m$, $x = \pi/(2n)$, получаем

$$m^2 \int\limits_0^{\pi/(2m)} u\tau_1^2(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} du = \frac{m^2}{2} \int\limits_0^{\pi/(2m)} du \int\limits_{-u}^{u} \|\Delta_h^1 T_n^{(r)}\|_2^2 dh \le$$

$$\le 2m^2 n^{2r} \|T_n\|_2^2 \int\limits_0^{\pi/(2m)} du \int\limits_0^u \gamma_n(h) dh \le$$

$$\le \frac{\pi^2}{\pi^2 - 8}\left\{1 - \frac{16m^2 \sin^2(\pi n/(4m))}{\pi^2 n^2}\right\}\Phi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \le \Phi^2\left(\frac{\pi}{2m}\right).$$

В случае $m \le n/2$ на основании аналогичных рассуждений записываем

$$m^2 \int\limits_0^{\pi/(2m)} u\tau_1^2(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} du \le$$

$$\le 2m^2 n^{2r} \|T_n\|_2^2 \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} du \int\limits_0^u \gamma_n(h) dh + \int\limits_{\pi/n}^{\pi/(2m)} du \int\limits_0^u \gamma_n(h) dh \right\} \le$$

$$\le \frac{\pi^2}{\pi^2 - 8}\left\{2 - \frac{4m}{n} + \frac{4m^2}{n^2}\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\right\}\Phi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \le \Phi^2\left(\frac{\pi}{2m}\right).$$

Исходя из полученных неравенств и определения бернштейновского поперечника, имеем

$$b_{2n}(\tilde{W}_1^r(\Phi, L_2); L_2) \ge b_{2n}(\tilde{B}, L_2) \ge \frac{2}{n^r\sqrt{\pi^2 - 8}}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{30}$$

Сопоставляя оценки (29) и (30), получаем требуемые равенства (12).

Теорема 4 доказана.

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 4. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\sup\left\{\begin{matrix}|a_n(f)| \\ |b_n(f)|\end{matrix} : f \in \tilde{W}_1^r(\Phi, L_2)\right\} = \frac{2}{n^r\sqrt{\pi^2 - 8}}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству следствия 1 и поэтому не приводится.

9. Покажем, что степенная функция $\Phi(u) = u^\alpha$, $\alpha = 2(4 - \pi)/(\pi^2 - 8)$, $\{\alpha \in \in (0{,}91; 0{,}92)\}$, удовлетворяет ограничению (11). Для этого вначале докажем справедливость соотношения

$$F_1(\lambda) \overset{\text{df}}{=} \lambda^{2(\alpha+1)} - \frac{\pi^2}{\pi^2 - 8}\left(\lambda^2 - \frac{16}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi\lambda}{4}\right) \ge 0, \quad 0 < \lambda \le 2,$$

которое эквивалентно первому неравенству из (11). Доопределим $F_1(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$ значением $F_1(0) = 0$ и исследуем поведение полученной непрерывной функции вначале на отрезке $[0, 1]$, а затем на отрезке $[1, 2]$.

Пусть $0 \le \lambda \le 1$. Подставляя в выражение для $F_1(\lambda)$ разложение функции $\sin^2\dfrac{\pi\lambda}{4}$ в ряд Маклорена, при $\lambda \to 0$ имеем $F_1(\lambda) = \lambda^{2(\alpha+1)} - O(\lambda^4) = O(\lambda^{2(\alpha+1)})$. В силу выбора числа α в достаточно малой окрестности нуля $F_1(\lambda) > 0$. Рассуждая от противного, покажем, что при $0 < \lambda < 1$ функция $F_1(\lambda)$ будет знакопостоянной. Для этого полагаем, что на интервале $(0, 1)$ существует по крайней мере одна точка, в которой $F_1(\lambda)$ обращается в нуль. Учитывая, что $F_1(0) = F_1(1) = 0$, на основании теоремы Ролля заключаем, что первая производная

$$F_1^{(1)}(\lambda) = 2(\alpha+1)\lambda^{2\alpha+1} - \frac{2\pi^2}{\pi^2-8}\lambda + \frac{4\pi}{\pi^2-8}\sin\frac{\pi\lambda}{2} \tag{31}$$

должна иметь на интервале $(0, 1)$ не менее двух нулей. Поскольку $F_1^{(1)}(0) = 0$ и в силу выбора числа α $F_1^{(1)}(1) = 0$, на основании теоремы Ролля вторая производная

$$F_1^{(2)}(\lambda) = 4(\alpha+1)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\lambda^{2\alpha} - \frac{4\pi^2}{\pi^2-8}\sin^2\frac{\pi\lambda}{4} \tag{32}$$

должна иметь на интервале $(0, 1)$ не менее трех нулей. Из (32) следует $F_1^{(2)}(0) = 0$. Используя аналогичные соображения, убеждаемся, что третья производная

$$F_1^{(3)}(\lambda) = 8(\alpha+1)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\alpha\lambda^{2\alpha-1} - \frac{\pi^3}{\pi^2-8}\sin\frac{\pi\lambda}{2} \tag{33}$$

также должна обращаться в нуль на интервале $(0, 1)$ не менее трех раз. Поскольку $F_1^{(3)}(0) = 0$, то очевидно, что четвертая производная

$$F_1^{(4)}(\lambda) = 16(\alpha+1)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\lambda^{2(\alpha-1)} - \frac{\pi^4}{2(\pi^2-8)}\cos\frac{\pi\lambda}{2}$$

должна иметь на рассматриваемом интервале не менее трех нулей. Однако из геометрических соображений очевидно, что $F_1^{(4)}(\lambda)$, являющаяся разностью монотонно убывающих выпуклой вниз и выпуклой вверх функций, не может иметь на $(0, 1)$ более двух нулей. Из полученного противоречия следует, что $F_1(\lambda) > 0$ при $0 < \lambda < 1$.

Пусть $1 \le \lambda \le 2$. Из (33) заключаем, что функция $F_1^{(3)}(\lambda)$ монотонно возрастает, принимая наименьшее значение в точке $\lambda = 1$. Поскольку $F_1^{(3)}(1) > 0$, то $F_1^{(3)}(\lambda) > 0$ при $1 \le \lambda \le 2$. Значит, $F_1^{(2)}(\lambda)$ монотонно возрастает на отрезке $[1, 2]$. Используя (32), нетрудно подсчитать, что $F_1^{(2)}(1) > 0$. Следовательно, $F_1^{(2)}(\lambda) > 0$ при $\lambda \in [1, 2]$. Продолжая рассуждения аналогичным образом и используя (31), получаем $F_1^{(1)}(\lambda) > 0$ при $1 < \lambda \le 2$. Поскольку $F_1(1) = 0$, функция $F_1(\lambda)$ будет положительной и монотонно возрастающей при $1 < \lambda \le 2$.

Пусть $\lambda \ge 2$. Покажем справедливость второго неравенства в ограничении (11). Для этого достаточно убедиться в неотрицательности функции

$$F_2(\lambda) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \lambda^{2(\alpha+1)} - \frac{2\pi^2}{\pi^2-8}\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2 - \frac{8}{\pi^2}\right).$$

Поскольку вторая производная $F_2^{(2)}(\lambda) = 4(\alpha+1)(\alpha+1/2)\lambda^{2\alpha} - 4\pi^2/(\pi^2-8)$ является возрастающей функцией и, как нетрудно убедиться, $F_2^{(2)}(2) > 0$, первая производная $F_2^{(1)}(\lambda) = 2(\alpha+1)\lambda^{2\alpha+1} - 4\pi^2(\lambda-1)/(\pi^2-8)$ также будет монотонно возрастать. Легко проверить, что $F_2^{(1)}(2) > 0$, а это означает монотонное возрастание $F_2(\lambda)$ при $\lambda \ge 2$. Убеждаясь непосредственным образом в том, что $F_2(2) > 0$, получаем требуемое неравенство $F_2(\lambda) > 0$ при $\lambda \ge 2$.

Из теоремы 4 и результатов данного пункта получаем такое следствие.

Следствие 3. *Для произвольного натурального числа* n *и мажоранты* $\Phi_*(u) = u^\alpha$ *справедливы равенства*

$$p_n\left(\tilde{W}_1^r(\Phi_*, L_2); L_2\right) = \frac{2^{1-\alpha}\pi^\alpha}{\sqrt{\pi^2-8}} \left[\!\left[\frac{n+1}{2}\right]\!\right]^{-(r+\alpha)},$$

где $p_n(\cdot)$ *— любой из ранее рассмотренных* n*-поперечников.*

10. *Доказательство теоремы 5.* Используя соотношение (19), где $t = H$, и определение класса $\mathcal{N}(r, H)_2$, получаем оценку сверху

$$d_{2n-1}(\mathcal{N}(r,H)_2; L_2) \le \left\{n^2H^2 - 4\sin^2\frac{nH}{2}\right\}^{-1/2} n^{1-r}. \tag{34}$$

Для получения оценки снизу поперечника $b_{2n}(\mathcal{N}(r,H)_2; L_2)$ рассмотрим в L_2 шар

$$\hat{B} = \hat{\varepsilon}B \cap \mathcal{T}_n = \left\{T_n(x) \in \mathcal{T}_n : \|T_n\|_2 \le \left[n^2H^2 - 4\sin^2\frac{nH}{2}\right]^{-1/2} n^{1-r}\right\}$$

и покажем, что $\hat{B} \subset \mathcal{N}(r,H)_2$.

Действительно, для произвольного полинома $T_n(x) \in \hat{B}$ с учетом (22) имеем

$$\int_0^H u\tau_1^2(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2}\, du = \frac{1}{2}\int_0^H du \int_{-u}^{u} \left\|\Delta_h^1 T_n^{(r)}\right\|_2^2 dh \le$$

$$\le 2n^{2r}\|T_n\|_2^2 \int_0^H du \int_0^u \gamma_n(h)\,dh = n^{2(r-1)}\left[n^2H^2 - 4\sin^2\frac{nH}{2}\right]\|T_n\|_2^2 \le 1.$$

Тогда

$$b_{2n}(\mathcal{N}(r,H)_2; L_2) \ge b_{2n}(\hat{B}, L_2) \ge \left[n^2H^2 - 4\sin^2\frac{nH}{2}\right]^{-1/2} n^{1-r}.$$

Исходя из данного неравенства и (34), с учетом (8) получаем

$$p_n(\mathcal{N}(r,H)_2; L_2) = \left\{\left[\!\left[\frac{n+1}{2}\right]\!\right]^2 H^2 - 4\sin^2\left(\left[\!\left[\frac{n+1}{2}\right]\!\right]\frac{H}{2}\right)\right\}^{-1/2} \left[\!\left[\frac{n+1}{2}\right]\!\right]^{1-r},$$

что и завершает доказательство теоремы 5.

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда для всех* $n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющих неравенству* $nH \le \pi$, *имеют место равенства*

$$\sup\left\{\begin{matrix}|a_n(f)| \\ |b_n(f)|\end{matrix} : f \in \mathcal{N}(r,H)_2\right\} = \left\{n^2H^2 - 4\sin^2\frac{nH}{2}\right\}^{-1/2} n^{1-r}.$$

Доказательство данного следствия аналогично доказательству следствия 1.

1. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 5. – С. 513 – 522.
2. *Лигун А. А.* Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Там же. – 1988. – **43**, № 6. – С. 757 – 769.

3. *Юдин В. А.* Диофантовы приближения в экстремальных задачах // Докл. АН СССР. – 1980. – **251**, № 1. – С. 54 – 57.
4. *Бабенко А. Г.* О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 5. – С. 651 – 664.
5. *Arestov V. V., Chernykh N. I.* On the L_2-approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approximation and Functions Spaces: Proc. Conf. (Gdansk, 1979). – Amsterdam: North-Holland, 1981. – P. 25 – 43.
6. *Попов В. Ю.* Прямые и обратные неравенства для „φ-фейеровских" среднеквадратических приближений // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 3. – С. 353 – 364.
7. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности из L_2 // Там же. – **20**, № 3. – С. 433 – 438.
8. *Тайков Л. В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Там же. – 1979. – **25**, № 2. – С. 217 – 223.
9. *Лигун А. А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Там же. – 1978. – **24**, № 6. – С. 785 – 792.
10. *Айнуллоев Н.* Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН ТаджССР. – 1984. – **27**, № 8. – С. 415 – 418.
11. *Юссеф Х.* Поперечники классов функций в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ // Применение функцион. анализа в теории приближений: Сб. научн. тр. — Тверь: Твер. ун-т, 1990. – С. 167 – 175.
12. *Ivanov K. G.* On a new characteristic of functions. I // Сердика Бълг. мат. списание. – 1982. – **8**, № 3. – P. 262 – 279.
13. *Ivanov K. G.* Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in $C[-1, 1]$ and $L_p[-1, 1]$ // Compt. rend. Acad. Bulg. Sci. – 1980. – **33**, № 10. – P. 1309 – 1312.
14. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
15. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin: Springer, 1985. – 292 p.

Получено 24.04.2000,
после доработки — 11.07.2002