УДК 512.554

Б. З. Гузнер, асп. (Киев. ун-т)

ТЕОРЕМА ХАРИШ-ЧАНДРЫ ДЛЯ КВАНТОВОЙ АЛГЕБРЫ $U_q(\mathrm{sl}(3))$

Построен базис квантовой универсальной обертывающей алгебры U, с помощью которого доказана теорема: для любого ненулевого элемента $u \in U$ существует конечномерное представление π такое, что $\pi(u) \neq 0$.

Побудовано базис квантової універсальної обгортуючої алгебри U, за допомогою якого доведена теорема: для будь-якого ненульового елемента $u \in U$ існує скінченновимірне зображення π таке, що $\pi(u) \neq 0$.

При решении задачи теории представлений обычно классифицируют конечномерные представления, а затем переходят к бесконечномерным. Возникает вопрос: как использовать информацию обо всех конечномерных представлениях для классификации бесконечномерных? Один из возможных путей [1] дает теорема Хариш-Чандры. В настоящей работе изложено ее доказательство для квантовой [2, 3] универсальной обертывающей алгебры $U_q(\mathrm{sl}(3))$.

Для $q \in \{z \in \mathbb{C}: \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; z(z^n - 1) \neq 0\}$ определим $U = U_q(\mathrm{sl}(3))$ как ассоциативную алгебру, порожденную над $K = \mathbb{C}\left[k_i, k_i^{-1} \mid i = 1, 2\right]$ элементами e_i, f_i, $i = 1, 2$, с соотношениями

$$k_i e_j k_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_j; \;\; k_i f_j k_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_j, \tag{1}$$

$$e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij}(k_i^2 - k_i^{-2}) \big/ (q - q^{-1}), \tag{2}$$

$$e_i^2 e_j - (q + q^{-1})\, e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0, \; i \neq j, \tag{3}$$

$$f_i^2 f_j - (q + q^{-1})\, f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0, \; i \neq j, \tag{4}$$

где $a_{ij} = \begin{cases} -1/2, & i \neq j, \\ \;\;1, & i = j \end{cases}$ и $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$.

Для целых неотрицательных m, n и $j = 0, \ldots, \min\{m, n\}$ определим элементы E_j^{mn}, F_j^{mn} алгебры U с помощью формул

$$E_j^{mn} = e_2^{n-j}(e_1 e_2)^j e_1^{m-j},$$

$$F_j^{mn} = f_1^{m-j}(f_2 f_1)^j f_2^{n-j}.$$

Элементы $W_{jj'}^{mnm'n'} = E_j^{mn} F_{j'}^{m'n'}$ назовем *стандартными одночленами. Рангом* стандартного одночлена назовем число $rn\left(W_{jj'}^{mnm'n'}\right) = m + n + m' + n'$.

Лемма 1. *Любой элемент $u \in U$ можно представить в виде*

$$u = \sum_{i=1}^{s} L_i W^{(i)},$$

где $s \in \mathbb{N}$, $L_i \in K$, $W^{(i)} = W_{j_i j_i'}^{m_i n_i m_i' n_i'}$ и $rn(W^{(i)}) \geq rn(W^{(i+1)})$.

Доказательство следует из соотношений (1) – (4).

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $M_n = M(n, \mathbb{C})$ ассоциативную алгебру матриц размера $n \times n$ с элементами из поля $\mathbb{C}$. Отметим, что $(M_m)^{\otimes n} \cong M_s$ для $s = m^n$. *Конечномерным представлением* U назовем гомоморфизм алгебр $\pi : U \to M_n$.

Пример. „Фундаментальное" [3] представление $\sigma: U \to M_3$.

$$\sigma(k_1) = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma(k_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix},$$

$$\sigma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение [3]. *Для любого натурального* n *существует гомоморфизм алгебр* $\delta_n: U \to U^{\otimes n}$ *такой, что для* $i = 1, 2$

$$\delta_n\left(k_i^{\pm 1}\right) = \underbrace{k_i^{\pm 1} \otimes \ldots \otimes k_i^{\pm 1}}_{n},$$

$$\delta_n(e_i) = \sum_{t=1}^{n} \underbrace{k_i \otimes \ldots \otimes k_i}_{n-t} \otimes e_i \otimes \underbrace{k_i^{-1} \otimes \ldots \otimes k_i^{-1}}_{t-1},$$

$$\delta_n(f_i) = \sum_{t=1}^{n} \underbrace{k_i \otimes \ldots \otimes k_i}_{n-t} \otimes f_i \otimes \underbrace{k_i^{-1} \otimes \ldots \otimes k_i^{-1}}_{t-1}.$$

С помощью δ_n и σ можно строить новые конечномерные представления: $\rho_n = (\sigma \otimes \ldots \otimes \sigma) \circ \delta_n: U \to U^{\otimes n} \to M^n = M_3^{\otimes n}$.

Обозначим через D^n подпространство в M^n, порожденное элементами вида $w_1 \otimes \ldots \otimes w_n$, где $w_1, \ldots, w_n \in M_3$ и для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ w_i — диагональна.

Очевидно, что если W — стандартный одночлен ранга, меньшего n, то $\rho_n(W) = 0 \pmod{D^n}$.

Пусть $L \in K$, т. е. $L = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i k_1^{m_i} k_2^{n_i}$, где $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$. Обозначим для $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ $L(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_1^{m_i} x_2^{n_i}$.

Лемма 2. *Пусть* $W = W_{jj'}^{mnm'n'}$, $m + n + m' + n' = r$, $L \in K$. *Тогда*

$$\rho_r(LW) = L\left(q^{(m-n-m')/2}, q^{(n+m'-n')/2}\right) \rho_r(W) \pmod{D^r}.$$

Доказательство следует из определения δ_r и σ.

Лемма 3. *Для любого* $r \in \mathbb{N}$ *образы различных стандартных одночленов ранга* r *при отображении* ρ_r *линейно независимы по модулю* D^r *в* M^r.

Таким образом, из лемм 1 – 3 следует, что элементы $W_{jj'}^{mnm'n'}$ при всех возможных m, n, j, m', n', j' образуют базис U над K, а элементы $k_1^i k_2^{i'} W_{jj'}^{mnm'n'}$, $i, i' \in \mathbb{Z}$, образуют базис U над $\mathbb{C}$.

Обозначим через $\hat{E}_j^{mn}$ (соответственно $\check{E}_j^{mn}$) проекцию $\rho_{m+n}\left(E_j^{mn}\right)$ на подпространство в M^{m+n}, порожденное элементами

$$\hat{\tau}_i^{mn} = \underbrace{e_2 \otimes \ldots \otimes e_2}_{n-i} \otimes \underbrace{e_1 \otimes \ldots \otimes e_1}_{m} \otimes \underbrace{e_2 \otimes \ldots \otimes e_2}_{i},\ i = 0, \ldots, n$$

(соответственно

$$\check{\tau}_i^{mn} = \underbrace{e_1 \otimes \ldots \otimes e_1}_{i} \otimes \underbrace{e_2 \otimes \ldots \otimes e_2}_{n} \otimes \underbrace{e_1 \otimes \ldots \otimes e_1}_{m-i},\ i = 0, \ldots, m).$$

Аналогично $\hat{F}_j^{mn}$ (соответственно $\check{F}_j^{mn}$) обозначает проекцию $\rho_{m+n}(F_j^{mn})$ на подпространство в M^{m+n}, порожденное элементами

$$\hat{\theta}_i^{mn} = \underbrace{f_2 \otimes \ldots \otimes f_2}_{n-i} \otimes \underbrace{f_1 \otimes \ldots \otimes f_1}_{m} \otimes \underbrace{f_2 \otimes \ldots \otimes f_2}_{i},\ i = 0, \ldots, n$$

(соответственно

$$\check{\theta}_i^{mn} = \underbrace{f_1 \otimes \ldots \otimes f_1}_{i} \otimes \underbrace{f_2 \otimes \ldots \otimes f_2}_{n} \otimes \underbrace{f_1 \otimes \ldots \otimes f_1}_{m-i},\ i = 0, \ldots, m).$$

Пусть для $j = 0, \ldots, \min\{m, n\}$

$$\hat{E}_j^{mn} = \sum_{i=0}^{n} P_{ji}^{mn} \hat{\tau}_i^{mn}, \quad \hat{F}_j^{mn} = \sum_{i=0}^{n} Q_{ji}^{mn} \hat{\theta}_i^{mn}, \tag{5}$$

$$\check{E}_j^{mn} = \sum_{i=0}^{m} R_{ji}^{mn} \check{\tau}_i^{mn}, \quad \check{F}_j^{mn} = \sum_{i=0}^{m} S_{ji}^{mn} \check{\theta}_i^{mn}. \tag{6}$$

***Замечание* 1.** Поскольку $\hat{\tau}_i^{mn}$ (соответственно $\hat{\theta}_i^{mn}$), $i = 0, \ldots, n$, а также $\check{\tau}_i^{mn}$ (соответственно $\check{\theta}_i^{mn}$), $i = 0, \ldots, m$, линейно независимы, числа P_{ji}^{mn} (соответственно Q_{ji}^{mn}, R_{ji}^{mn}, S_{ji}^{mn}) определены равенствами (5) (соответственно (6)) однозначно.

Утверждение 1. I. *Если* $m \geq n$, *то матрицы* $P^{mn} = (P_{ji}^{mn})_{j,i=0}^{n}$ *и* $Q^{mn} = (Q_{ji}^{mn})_{j,i=0}^{n}$ *невырождены.*

II. *Если* $m \leq n$, *то матрицы* $R^{mn} = (R_{ji}^{mn})_{j,i=0}^{m}$ *и* $S^{mn} = (S_{ji}^{mn})_{j,i=0}^{m}$ *невырождены.*

Доказательство леммы 3. Заметим, что лемму достаточно доказать при фиксированных m, n, m', n' для элементов $W_{jj'} = W_{jj'}^{mnm'n'}$, где $j = 0, \ldots$ $\ldots, \min\{m, n\}$, $j' = 0, \ldots, \min\{m', n'\}$ $m + n + m' + n' = r$. Пусть $m \geq n$ и $m' \geq n'$. Обозначим через $\tilde{W}_{jj'}$ проекции элементов $\rho_r(W_{jj'})$ на подпространство в M^r порожденное элементами $\hat{\tau}_i^{mn} \otimes \hat{\theta}_{i'}^{m'n'}$, $i = 0, \ldots, n$, $i' = 0, \ldots, n'$. Тогда

$$\tilde{W}_{jj'} = q^{(mn'-m'n)/2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{i'=0}^{n'} P_{ji}^{mn} Q_{j'i'}^{m'n'} \hat{\tau}_i^{mn} \otimes \hat{\theta}_{i'}^{m'n'}.$$

Линейная независимость $\tilde{W}_{jj'}$ следует теперь из утверждения 1, поскольку числа $P_{ji}^{mn} Q_{j'i'}^{m'n'}$ являются элементами матрицы $P^{mn} \otimes Q^{m'n'}$, которая, очевидно, невырождена. Но тогда сами $\rho_r(W_{jj'})$ линейно независимы по модулю D^r.

***Замечание* 2.** В случае $m \leq n$ $(m' \leq n')$ доказательство аналогично, но вместо $P^{mn}(Q^{m'n'})$ используется матрица $R^{mn}(S^{m'n'})$.

Множество всех конечномерных представлений U обозначим через $\mathrm{Rep}\,U$. Пусть $I = \{u \in U \mid \forall\ \pi \in \mathrm{Rep}\,U\colon \pi(u) = 0\}$. Очевидно, I — идеал в U.

Теорема. $I = \{0\}$, *т. е. для любого элемента* $u \in U$, $u \neq 0$ *существует конечномерное представление* π *такое, что* $\pi(u) \neq 0$.

Доказательство. Допустим, что в I существует элемент $u \neq 0$. По лемме 1 $u = \sum_{i=1}^{N} L_i W^{(i)}$, где $W^{(i)} = W_{j_i j_i'}^{m_i n_i m_i' n_i'}$, $L_1 \neq 0$ (так как $(u) \neq 0$), $\mathrm{rn}\,(W^{(i)}) = r$ для $i = 1, \ldots, i_0$; $\mathrm{rn}\,(W^{(i)}) < r$, для $i > i_0$. Поскольку I — идеал, можно считать, что L_1 не содержит отрицательных степеней k_1 и k_2, т. е. $L_1(x_1, x_2)$ является многочленом от двух переменных.

Рассмотрим элементы $u_{st} = ue^s f^t$, $s, t \in \mathbb{N}$. Из соотношения (2) следует

$$u_{st} = \sum_{i=1}^{i_0} L_i W_{st}^{(i)} + u'_{st}, \text{ где } W_{st}^{(i)} = W_{j_i j_i'}^{(s+m_i)\, n_i\, m_i' (n_i'+t)}$$

и u'_{st} — K-линейная комбинация стандартных одночленов ранга, меньшего $p = r + s + t$. По лемме 2

$$\rho_p(u_{st}) = \sum_{i=1}^{i_0} L_i (q^{(s+b_i)/2}, q^{(c_i-t)/2}) \rho_p(W_{st}^{(i)}) \pmod{D^p},$$

где $b_i = m_i - n_i - m_i'$ и $b_i = n_i - m_i' - n_i'$.

Поскольку $u_{st} \in I$, $\rho_p(u_{st}) = 0$. Элементы $\rho_p(W_{st}^{(i)})$, $i = 0, \ldots, i_0$, линейно независимы по лемме 3, значит, коэффициенты при них равны 0. В частности, для любых $s, t \in \mathbb{N}$ $L_i(q^{(s+b_1)/2}, q^{(c_1-t)/2}) = 0$. Поскольку q — не корень из 1 и не 0, то числа $q^{(s+b_1)/2}$ (соответственно $q^{(c_1-t)/2}$) различны для разных s (соответственно t) и пары $(q^{(s+b_1)/2}, q^{(c_1-t)/2})$ все одновременно не могут быть нулями многочлена L_1. Полученное противоречие доказывает теорему.

1. *Drozd Yu. A., Ovsienko S. A., Futorny V. M.* On Gelfand – Zetlin Modules // Suppl. Rend. Circolo Mat. Palermo, Ser. 2. – 1991. – **26**. – P. 143 – 147.
2. *Drinfeld V. G.* Quantum Groups // Proc. Int. Cong. Math. – Berkeley, California: Acad. press, 1986. – **1**. – P. 798 – 820.
3. *Jimbo M.* A q-analogue of $U(gl\,(N+1))$, Hecke Algebras, and the Yang – Baxter Equation // Let. Math. Phys. – 1986. – **11**. – P. 247 – 252.

Получено 20. 01. 92