УДК 517.983

С. А. Плакса, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О ВОЗМУЩЕНИИ ПОЛУНЕТЕРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕПОЛНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. II

Рассматривается задача о возмущении полунетерового оператора при минимальных предположениях о заданных пространствах.

Розглядається задача про збурення напівнетерового оператора при мінімальних припущеннях про задані простори.

Данная статья является продолжением работы [1]. В ней продолжена нумерация пунктов, теорем, формул и использованы введенные в [1] обозначения.

2. В этом пункте задача о возмущении полунетерового оператора с конечным дефектом исследуется методами, имеющими алгебраический характер, т.е. нейтральными в главных своих чертах к топологическим свойствам заданных пространств и операторов.

Следующая теорема получена модификацией известного из теории сингулярных интегральных уравнений метода регуляризации Карлемана – Векуа (см. [2, 3]).

Теорема 8. *Пусть* X *и* Y — *в. п.*, $A : X \to Y$, $\operatorname{def} A < \infty$, *оператор* $T : X \to Y$ *такой, что при некотором обобщенно обратном к* A *операторе* A_{-1} *конечномерны* $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)$ *и* $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)^{\#}$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\operatorname{def}(A + T) < \infty$;

2) $\operatorname{Ind}(A + T) = \operatorname{Ind} A + \operatorname{Ind}(I + A_{-1}T)$;

3) $\operatorname{Ker}(A + T)^{\#} \subset (A_{-1}^{\#}(\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)^{\#} + \Gamma^{\#}T^{\#}(\operatorname{Ker} A^{\#})) + \operatorname{Ker} A^{\#})$, *где* Γ — *некоторый обобщенно обратный к* $I + A_{-1}T$ *оператор*;

4) *если* Y — *т. в. п., оператор* A *нормально разрешим и*

$$A_{-1}^{\#}(\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)^{\#} + \Gamma^{\#}T^{\#}(\operatorname{Ker} A^{\#})) \subset Y^*, \tag{5}$$

то оператор $A + T$ *нормально разрешим.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $A_1 := A\,|_{\operatorname{Im} A_{-1}}$. Уравнение

$$A_1 x + Tx = y, \quad x \in \operatorname{Im} A_{-1}, \quad y \in Y, \tag{6}$$

эквивалентно (в смысле отыскания решений $x \in \operatorname{Im} A_{-1}$ при каждом $y \in Y$) системе уравнений

$$x + A_{-1}Tx = A_{-1}\,y, \tag{7}$$

$$\varphi_j(y) = \varphi_j(Tx), \quad j = 1, 2, \ldots, \mu, \tag{8}$$

где $\mu := \dim \operatorname{Ker} A^{\#}$, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\mu}$ — базис в $\operatorname{Ker} A^{\#}$. Как и всюду в дальнейшем, полагаем, что при $\mu = 0$ условия вида (8) отсутствуют. Легко заметить, что все решения $x \in X$ уравнения (7) содержатся в $\operatorname{Im} A_{-1}$.

Для разрешимости уравнения (7) в X необходимо и достаточно выполнение условий

$$\psi_j^{\#}(y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{9}$$

где $m := \dim \operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)^{\#}$, $\psi_j^{\#} := A_{-1}^{\#}\psi_j$, $\{\psi_j\}_{j=1}^{m}$ — базис в $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)^{\#}$. При $m > 0$ $\{\psi_j^{\#}\}_{j=1}^{m}$ — линейно независимая система функционалов в $Y^{\#}$ [3, с. 335]. При выполнении условий (9) общее решение уравнения (7) выражается равенством

$$x = \Gamma A_{-1} y + \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_i, \tag{10}$$

где $n := \dim\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)$; $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ — базис в $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)$; c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — произвольные постоянные. Как и всюду в дальнейшем, суммы вида $\sum_{i=1}^{0}$ полагаем равными нулю.

При $\mu > 0$, подставляя (10) в (8), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ji} c_i = \delta_j^{\#}(y), \; j = 1, 2, \ldots, \mu, \tag{11}$$

где $\delta_j^{\#} := \varphi_j - A_{-1}^{\#}\Gamma^{\#}T^{\#}\varphi_j$, $\gamma_{ji} := \varphi_j(T\chi_i)$.

Пусть r — ранг матрицы $\|\gamma_{ji}\|$, $j \in \overline{1, \mu}$, $i \in \overline{1, n}$. При $r > 0$, не уменьшая общности, можно считать, что определитель матрицы $\|\gamma_{ji}\|$, j, $i \in \overline{1, r}$, отличен от 0. Стандартными рассуждениями [3, с. 335, 336] убеждаемся, что необходимые и достаточные условия разрешимости системы (11) относительно c_1, $c_2, \ldots, c_n$ имеют вид

$$\psi_j^{\#}(y) = 0, \; j = m + 1, m + 2, \ldots, m + \mu - r, \tag{12}$$

где $\psi_{m+j}^{\#} := \delta_{r+j}^{\#} + \sum_{i=1}^{r} a_{ji}\delta_i^{\#}$, $j = 1, 2, \ldots, \mu - r$; a_{ji} — вполне определенные постоянные, не зависящие от y (при $\mu - r = 0$ условия (12) отсутствуют). Обозначив $\zeta_j := \varphi_{r+j} + \sum_{i=1}^{r} a_{ji}\varphi_i$, получим $\psi_{m+j}^{\#} = \zeta_j - A_{-1}^{\#}\Gamma^{\#}T^{\#}\zeta_j$, $j = 1, 2, \ldots, \mu - r$.

Если условия (12) выполнены, то система (11) разрешима относительно c_1, $c_2, \ldots, c_n$ и в общем ее решении числа $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$ произвольны, $c_i = \sum_{k=1}^{n-r}\alpha_{ik} c_{r+k} + \sum_{j=1}^{r}\beta_{ij}\delta_j^{\#}(y)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, α_{ik} и β_{ij} — вполне определенные постоянные, не зависящие от y. Подставляя общее решение системы (11) в (10), получаем общее решение уравнения (6). В частности, при $y = 0$ имеем общий вид элемента $x \in \operatorname{Ker}(A_1 + T)$. Учитывая при этом, что $c_1, c_2, \ldots, c_n$ удовлетворяют системе (11), легко заключаем, что $\dim\operatorname{Ker}(A_1 + T) = n - r$.

Таким образом, соотношения (9), (12) необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (6). Поэтому $\dim\operatorname{Ker}(A_1 + T)^{\#}$ равна числу линейно независимых функционалов $\psi_j^{\#}$ из условий (9), (12). В частности, при $\mu - r = 0$ $\dim\operatorname{Ker}(A_1 + T)^{\#} = m$.

Покажем, что при $\mu - r > 0$ система $\{\psi_j^{\#}\}_{j=1}^{m+\mu-r}$ линейно независима. Предположим обратное, пусть система $\{\psi_j^{\#}\}_{j=1}^{m+\mu-r}$ линейно зависима. Тогда

$$0 = \sum_{j=1}^{m+\mu-r} a_j \psi_j^{\#} \equiv \sum_{j=1}^{m} a_j A_{-1}^{\#}\psi_j + \sum_{j=1}^{\mu-r} a_{m+j}(\zeta_j - A_{-1}^{\#}\Gamma^{\#}T^{\#}\zeta_j), \tag{13}$$

где среди чисел a_j, $j = 1, 2, \ldots, m + \mu - r$, есть отличные от нуля. Поскольку при $m > 0$ система $\{\psi_j^{\#}\}_{j=1}^{m}$ линейно независимая, то среди чисел a_{m+j}, $j = 1, 2, \ldots, \mu - r$, есть отличные от нуля. Так как $\operatorname{Ker} A_1 = \{0\}$, то уравнение

$$A_1^{\#}\psi = \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j - \sum_{j=1}^{\mu-r} a_{m+j}\Gamma^{\#}T^{\#}\zeta_j$$

разрешимо в $Y^{\#}$ и одним из его решений есть функционал

$$\psi = \sum_{j=1}^{m} a_j A_{-1}^{\#} \psi_j - \sum_{j=1}^{\mu-r} a_{m+j} A_{-1}^{\#} \Gamma^{\#} T^{\#} \zeta_j.$$

Поэтому, действуя на равенство (13) оператором $A_1^{\#}$ и учитывая, что $\zeta_j \in \in \operatorname{Ker} A_1^{\#}$ $\forall j \in \overline{1, \mu-r}$, получаем

$$0 = \sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j - \sum_{j=1}^{\mu-r} a_{m+j} \Gamma^{\#} T^{\#} \zeta_j. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), получаем $\sum_{j=1}^{\mu-r} a_{m+j} \zeta_j = 0$, что противоречит линейной независимости системы $\{\zeta_j\}_{j=1}^{\mu-r}$. Значит, при $\mu - r > 0$ система $\{\psi_j^{\#}\}_{j=1}^{m+\mu-r}$ линейно независима и $\dim\operatorname{Ker}(A_1 + T)^{\#} = m + \mu - r$.

Таким образом доказано, что $\dim \operatorname{Ker}(A_1 + T)^{\#} < \infty$ и $\operatorname{Ind}(A_1 + T) = n - m - \mu$. Утверждения 1 – 3 теоремы теперь следуют из того, что оператор $A + T$ является расширением оператора $A_1 + T$ [4, с. 44, 45].

Если Y — т. в. п., оператор A нормально разрешим и выполняется условие (5), то $\psi_j^{\#} \in Y^*$ $\forall j \in \overline{1, m+\mu-r}$. Поэтому $\operatorname{Ker}(A_1 + T)^{\#} \subset Y^*$ и оператор $A_1 + T$ нормально разрешим. Поскольку, кроме того, $\dim \operatorname{Ker}(A_1 + T)^{\#} < \infty$, то нормально разрешимо и расширение $A + T$ оператора $A_1 + T$. Теорема доказана.

Оператор $K : X \to Y$ называется *конечномерным*, если $\dim \operatorname{Im} K < \infty$.

В [5] имеются утверждения об устойчивости индекса оператора при конечномерних возмущениях в векторных пространствах без топологии. Приводимые ниже теоремы 9, 10 дополняют и уточняют соответствующие утверждения из [5] в случае, когда X и Y — топологические векторные пространства.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть X — т. в. п., $K : X \to X$ — непрерывный конечномерный оператор. Тогда оператор $I + K$ фредгольмов и существует непрерывный обобщенно обратный к $I + K$ оператор $(I + K)_{-1}$.*

Доказательство. Сужение $(I + K)|_{\operatorname{Ker} K}$ оператора $I + K$ на $\operatorname{Ker} K$ — нетеровый оператор, при этом $\operatorname{Ker}(I + K)|_{\operatorname{Ker} K} = \{0\}$ и $\dim\operatorname{Ker}[(I + K)|_{\operatorname{Ker} K}]^{\#} = \dim\operatorname{Im} K$. Тогда оператор $I + K$ фредгольмов, поскольку он является расширением оператора $(I + K)|_{\operatorname{Ker} K}$ [4, с. 44, 45].

Докажем теперь, что существует непрерывный оператор $(I + K)_{-1}$. Если $\operatorname{Ker}(I + K) = \{0\}$, то $(I + K)_{-1} = I - (I + K)^{-1} K$ [6, с. 195]. Пусть теперь оператор $I + K$ необратим. Тогда легко доказывается, что существует непрерывный конечномерный оператор K' такой, что $I + K + K'$ обратим, K'_{-1} непрерывен и $(I + K)_{-1} = (I + K + K')^{-1} - K'_{-1} = (I + K + K')^{-1}(K + K') - K'_{-1}$. Теорема доказана.

Из теорем 8, 9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть X и Y — т. в. п., $A : X \to Y$ — нормально разрешимый оператор с непрерывным обобщенно обратным оператором $A_{-1} : Y_\sigma \to X_\sigma$, $\operatorname{def} A < \infty$, $K : X_\sigma \to Y_\sigma$ — конечномерный непрерывный оператор. Тогда оператор $(A + K) : X \to Y$ нормально разрешим, $\operatorname{def}(A + K) < \infty$ и $\operatorname{Ind}(A + K) = \operatorname{Ind} A$.*

Пусть X — в. п., Y — т. в. п. Через $V_{A, A_{-1}}$ обозначим класс операторов

$T : X \to Y$, для которых $\dim \operatorname{Ker}(I + A_{-1}T) = \dim \operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)^{\#} < \infty$ и выполняется (1), а через V_A — объединение классов $V_{A,A_{-1}}$ по всем обобщенно обратным к A операторам A_{-1}. В теореме 8 содержится результат об устойчивости полунетеровости и индекса оператора $A : X \to Y$, $\operatorname{def} A < \infty$, при возмущении $T \in V_A$. Этот результат имеет локальный характер, так как класс V_A зависит от конкретного представителя класса полунетеровых операторов — оператора A. Классы V_A, $V_{AA_{-1}}$, вообще говоря, не замкнуты относительно операции сложения. Поэтому возникает задача об устойчивости классов V_A, $V_{A,A_{-1}}$. Частичное решение этой задачи дает приводимая ниже теорема 11.

Пусть $T \in V_{A,A_{-1}}$. Через $V_{A,A_{-1},T}$ обозначим класс конечномерных операторов $K: X \to Y$, для которых в $\operatorname{Im} A_{-1}^{\#}$ существует система функционалов $\{g_i\}_{i=1}^{k}$, биортогональная (при $k \geq 1$) некоторому базису $\{y_i\}_{i=1}^{k}$ в $P(\operatorname{Im} K)$ (здесь P — проектор пространства Y на $\operatorname{Im} A$ параллельно $\operatorname{Ker} A_{-1}$) и удовлетворяющая условию $A_{-1}^{\#}\Gamma^{\#}(\operatorname{Im} K^{\#} + (A^{\#} + T^{\#})L\{g_i\}_{i=1}^{k} \subset Y^*$, где $L\{g_i\}_{i=1}^{k}$ —линейная оболочка системы $\{g_i\}_{i=1}^{k}$. Здесь полагаем системы вида $\{x_i\}_{i=1}^{0}$ равными $\{0\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 11. *Пусть* X — *в. п.*, Y — *т. в. п.*, $A : X \to Y$, $T \in V_{A,A_{-1}}$, $K \in V_{A,A_{-1},T}$. *Тогда* $(T + K) \in V_{A,A_{-1}}$.

Доказательство. Обозначим $T_1 := T + K$. В силу утверждений 1, 2 теоремы 8 и утверждения 1 теоремы 9 $\dim \operatorname{Ker}(I + A_{-1}T_1) = \dim \operatorname{Ker}(I + A_{-1}T_1)^{\#} < \infty$. Имеем

$$\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T_1)^{\#} = \operatorname{Ker}[(I + A_{-1}T)^{\#} + K^{\#}A_{-1}^{\#}] \subset \operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)^{\#} + \Gamma^{\#}(\operatorname{Im} K^{\#}). \quad (15)$$

Обозначим $D_1^{\#} := \operatorname{Ker}\Gamma^{\#} + T^{\#}(\operatorname{Ker} A^*) + \operatorname{Im} K^{\#} + (A^{\#} + T^{\#})L\{g_i\}_{i=1}^{k}$, $D_2^{\#} := \operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)^{\#} + \Gamma^{\#}(D_1^{\#})$, где $g_1, g_2, \ldots, g_k$ — функционалы, отмеченные для оператора K в определении класса $V_{A,A_{-1},T}$.

Докажем, что существует обобщенно обратный к $I + A_{-1}T_1$ оператор Γ_1 такой, что $\Gamma_1^{\#}(D_1^{\#}) \subset D_2^{\#}$. Для этого рассмотрим элементы $z_i := A_{-1}y_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, где $\{y_i\}_{i=1}^{k}$ — упомянутый в определении класса $V_{A,A_{-1},T}$ базис в $P(\operatorname{Im} K)$. Очевидно, что $\{z_i\}_{i=1}^{k}$ — линейно независимая система. Пусть $\{z_i'\}_{i=1}^{k'}$ — подсистема системы $\{z_i\}_{i=1}^{k}$, принадлежащая $\operatorname{Im}(I + A_{-1}T)$, $x_i' := \Gamma z_i'$, $y_i' := Az_i'$ $\forall i \in \overline{1, k'}$. Очевидно, что $\{x_i'\}_{i=1}^{k'}$ — линейно независимая система в $\operatorname{Im}\Gamma$ и $\{y_i'\}_{i=1}^{k'}$ — подсистема системы $\{y_i\}_{i=1}^{k}$. Пусть $\{g_i'\}_{i=1}^{k'}$ — подсистема системы функционалов $\{g_i\}_{i=1}^{k}$, биортогональная системе $\{y_i'\}_{i=1}^{k'}$, $f_i' := (A^{\#} + T^{\#})g_i'$ $\forall i \in \overline{1, k'}$. Поскольку $g_i' \in \operatorname{Im} A_{-1}^{\#}$ $\forall i \in \overline{1, k'}$, то выполняются соотношения

$$f_i'(x_j') = (A^{\#} + T^{\#}A_{-1}^{\#}A^{\#})g_i'(x_i') = (I + A_{-1}T)^{\#}A^{\#}g_i'(x_j') =$$
$$= g_i'(A(I + A_{-1}T)x_j') = g_i'(y_j'),$$

в силу которых системы $\{f_i'\}_{i=1}^{k'}$ и $\{x_i'\}_{i=1}^{k'}$ биортогональны.

Пусть $\{x'_{k'+i}\}_{i=1}^{n}$ — базис в $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)$, $\{f'_{k'+i}\}_{i=1}^{n}$ — базис в $\operatorname{Ker}\Gamma^{\#}$. Поскольку $\{x_i'\}_{i=1}^{k'} \subset \operatorname{Im}\Gamma$, $\{f_i'\}_{i=1}^{k'} \subset \operatorname{Im}(I + A_{-1}T)^{\#}$ и $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T) \cap \operatorname{Im}\Gamma = \{0\}$, $\operatorname{Ker}\Gamma^{\#} \cap \operatorname{Im}(I + A_{-1}T)^{\#} = \{0\}$, то $\{x_i'\}_{i=1}^{k'+n}$ — базис в $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T) \dotplus L\{x_i'\}_{i=1}^{k'}$, $\{f_i'\}_{i=1}^{k'+n}$ — базис в $\operatorname{Ker}\Gamma^{\#} \dotplus L\{f_i'\}_{i=1}^{k'}$. Применяя процесс биортогонализации к системам $\{x_i'\}_{i=1}^{k'+n}$ и $\{f_i'\}_{i=1}^{k'+n}$, получаем некоторый базис $\{\bar{f}_i\}_{i=1}^{k'+n}$ в $\operatorname{Ker}\Gamma^{\#} \dotplus L\{f_i'\}_{i=1}^{k'}$, биортогональный некоторому базису $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^{k'+n}$ в $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T) \dotplus L\{x_i'\}_{i=1}^{k'}$. Теперь с учетом того, что $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T) \subset \operatorname{Ker}(I + A_{-1}T) \dotplus L\{x_i'\}_{i=1}^{k'}$, очевидным образом следует существование в $\operatorname{Ker}\Gamma^{\#} \dotplus L\{f_i'\}_{i=1}^{k'} \subset D_1^{\#}$ системы функционалов $\{f_i\}_{i=1}^{m}$, где $m := \dim\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T_1)$, биортогональной базису $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ в $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T_1)$. Справедливы равенства $X = \operatorname{Ker}(I + A_{-1}T_1) \dotplus \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im}(I + A_{-1}T_1) \dotplus L$, где $\dim L = m$. Пусть $\{t_i\}_{i=1}^{m}$ — базис в L и $\{\psi_i\}_{i=1}^{m}$— биортогональный ему базис в $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T_1)^{\#}$. Тогда оператор $N := I + A_{-1}T_1 - K'$, где $K'x := \sum_{i=1}^{m} f_i(x)t_i \ \forall x \in X$, обратим в X, а оператор $\Gamma_1 := N^{-1} + K'_{-1}$, где $K'_{-1}x := \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x)x_i \ \forall x \in X$, является обобщенно обратным к $I + A_{-1}T_1$.

Покажем, что $\Gamma_1^{\#}(D_1^{\#}) \subset D_2^{\#}$. Пусть $\varphi \in D_1^{\#}$. Учитывая, что оператор $N^{\#}$ обратим в $X^{\#}$ и $\operatorname{Im} K'^{\#}_{-1} \subset \operatorname{Ker}(I + A_{-1}T_1)^{\#}$, получаем

$$N^{\#}\Gamma_1^{\#}\varphi = N^{\#}(N^{-1\#} + K'^{\#}_{-1})\varphi = (\varphi - K'^{\#}K'^{\#}_{-1}\varphi) \in D_1^{\#}. \tag{16}$$

Кроме того,

$$N^{\#}\Gamma_1^{\#}\varphi = (I + A_{-1}T_1)^{\#}\,\Gamma_1^{\#}\varphi - K'^{\#}\Gamma_1^{\#}\varphi. \tag{17}$$

Из (16), (17) следует $(I + A_{-1}T_1)^{\#}\,\Gamma_1^{\#}\varphi \in D_1^{\#}$. Далее имеем $(I + A_{-1}T_1)^{\#}\,\Gamma_1^{\#}\varphi = (I + A_{-1}T)^{\#}\,\Gamma_1^{\#}\varphi + K^{\#}A_{-1}^{\#}\Gamma_1^{\#}\varphi$, откуда получаем $f := (I + A_{-1}T)^{\#}\,\Gamma_1^{\#}\varphi \in D_1^{\#}$. Отсюда следует $\Gamma_1^{\#}\varphi = \Gamma^{\#}f + \psi$, где ψ — некоторый функционал из $\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T)^{\#}$, и, таким образом, $\Gamma_1^{\#}\varphi \in D_2^{\#}$.

Теперь, учитывая (15) и то, что $T \in V_{A,A_{-1}}$, $K \in V_{A,A_{-1},T}$, получаем $A_{-1}^{\#}(\operatorname{Ker}(I + A_{-1}T_1)^{\#} + \Gamma_1^{\#}T_1^{\#}(\operatorname{Ker} A^*)) \subset A_{-1}^{\#}(D_2^{\#}) \subset Y^*$. Значит, $T_1 \in V_{A,A_{-1}}$. Теорема доказана.

1. *Плакса С. А.* О возмущении полунетеровых операторов в неполных пространствах. I // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, №2. – С. 270 – 278.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М .: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М .: Наука, 1968. – 511 с.
4. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М .: Наука, 1971. – 104 с.
5. *Przeworska-Rolewisz D., Rolewisz S.* Equations in linear spaces. – Warszawa, 1968. – 380 p.
6. *Рисс Ф.* О линейных функциональных уравнениях // Успехи мат. наук. – 1936. – **1**. – С. 175 – 199.

Получено 29. 12.91