УДК 517.432

С. А. Кужель, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВОЯКО J-НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Для сжимающего оператора, действующего в пространстве с индефинитной метрикой (двояко J-нерастягивающего оператора), определяется характеристическая оператор-функция. На основе детального изучения свойств регулярных дилатаций и характеристической функции двояко J-нерастягивающих операторов проводится спектральный анализ таких операторов.

Для стискуючого оператора, діючого у просторі з індефінітною метрикою (подвійно J-нерозтяжного оператора), визначається характеристична оператор-функція. На основі детального вивчення властивостей регулярних дилатацій та характеристичних функцій подвійно J-нерозтяжних операторів проводиться спектральний аналіз таких операторів

Как известно, при изучении сжимающих операторов существенную роль играют теория дилатаций и теория характеристических функций таких операторов. Подробно соответствующие результаты и их разнообразные применения изложены в монографии [1].

Позже было показано [2], что развитая в [1] теория в некотором смысле эквивалентна абстрактной теории рассеяния Лакса — Филлипса [3, 4]. При этом, как оказалось, свойства матрицы рассеяния тесно связаны со свойствами характеристической функции некоторого сжатия.

В [4] (§3) сделана попытка перенести некоторые результаты построенной теории рассеяния на случай конкретных операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой. В связи с этим возникает естественная необходимость распространить схему Лакса — Филлипса в теории рассеяния на случай операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой. С этой целью в настоящей работе вводится и детально изучается характеристическая функция сжимающего оператора, действующего в пространстве с индефинитной метрикой (двояко J-нерастягивающего оператора), а также их дилатации.

Применению полученных здесь результатов к описанию свойств матрицы рассеяния в случае пространств с индефинитной метрикой будет посвящена отдельная статья.

1. Основные понятия и обозначения. В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ определим новое скалярное произведение

$$[x, y] := (Jx, y) \quad (J^* = J = J^{-1}) \tag{1}$$

и будем в обычном смысле говорить о J-метрике, J-ортогональности и т. п. (см. [5]). В частности, A^+ означает J-сопряженный к A оператор.

Гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ с индефинитной метрикой (1) будем называть J-пространством или пространством $\langle \mathfrak{H}, J \rangle$. Наряду с этим пространством будем рассматривать также пространство $\langle H, J_H \rangle$, где

$$H = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}', \; J_H = J \oplus I', \tag{2}$$

а $\mathfrak{H}'$ и I' — соответственно некоторое гильбертово пространство и действующий в нем единичный оператор.

Ограниченный оператор A, действующий в пространстве $\langle \mathfrak{H}, J \rangle$, называется J-нерастягивающим (J-н.), если $[Ax, Ax] \le [x, x]$ $(\forall\, x \in \mathfrak{H})$.

J-нерастягивающий оператор A называется двояко J-нерастягивающим (д. J-н.), если A^+ — также J-нерастягивающий в $\mathfrak{H}$ оператор. Условия, при которых оператор A является д. J-н., сформулированы в работах [5, 6].

2. Регулярная дилатация двояко J-нерастягивающего оператора. Пусть A — ограниченный д. J-н. оператор, действующий в пространстве $\langle \mathfrak{H}, J \rangle$.

J_H-унитарный в $\langle H, J_H \rangle$ оператор U называется регулярной дилатацией оператора A, если

$$A^n = P_{\mathfrak{H}} U^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \tag{3}$$

где $P_{\mathfrak{H}}$ — ортопроектор в H на $\mathfrak{H}$.

Как показано [7, 8], минимальная регулярная дилатация U д. J-н. оператора A существует и с точностью до изоморфизма определяется однозначно.

Пусть U — минимальная регулярная дилатация оператора A. Рассуждая так же, как и в [1], убеждаемся, что подпространства

$$N_+ = \overline{(U-A)\mathfrak{H}}, \quad N_- = \overline{(U^+ - A^+)\mathfrak{H}} \tag{4}$$

являются J_H-блуждающими для оператора U и

$$H = \ldots [\oplus] U^+ N_- [\oplus] N_- [\oplus] \mathfrak{H} [\oplus] N_+ [\oplus] U N_+ [\oplus] \ldots, \tag{5}$$

где знак $[\oplus]$ означает как J_H-ортогональность, так и ортогональность прямой суммы.

При этом на основании условия (3) получаем

$$Ux = Ax + T_{12}x \quad (x \in \mathfrak{H}), \tag{6}$$

где оператор $T_{12} = U - A$ отображает пространство $\mathfrak{H}$ в N_+.

Аналогично с учетом разложения (5) имеем

$$Ux_- = T_{11}x_- + T_{21}x_- \quad (x_- \in N_-), \tag{7}$$

где $T_{11} = (I - P_{\mathfrak{H}})U \colon N_- \to N_+$ и $T_{21} = P_{\mathfrak{H}}U \colon N_- \to \mathfrak{H}$.

Рассмотрим гильбертово пространство $\tilde{H}$ векторов вида

$$\tilde{x} = (\ldots x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \ldots) \quad (x_0 \in \mathfrak{H},\ x_{\pm n} \in N_\pm)$$

с нормой $\| \tilde{x} \|^2 = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \| x_i \|^2 < \infty$ и индефинитной метрикой

$$[\tilde{x}, \tilde{y}] = (Jx_0, y_0) + \sum_{i \neq 0} (x_i, y_i), \tag{8}$$

где $\tilde{y} = (\ldots y_{-1}, \boxed{y_0}, y_1 \ldots) \in \tilde{H}$ (в рамку заключена компонента, расположенная на нулевом месте).

Пространство $\tilde{H}$, очевидно, является $\tilde{J}$-пространством, где самосопряженный и унитарный в $\tilde{H}$ оператор $\tilde{J}$ определяется равенством $\tilde{J}\tilde{x} = (\ldots x_{-2}, x_{-1}, \boxed{Jx_0}, x_1, x_2, \ldots)$.

С учетом разложения (5) J_H-пространство H можно очевидным образом отождествить с $\tilde{J}$-пространством $\tilde{H}$. При этом пространству $\mathfrak{H}$ соответствует пространство $\tilde{\mathfrak{H}}$ векторов вида $\tilde{x} = (\ldots 0, \boxed{x}, 0, \ldots)$, $x \in \mathfrak{H}$.

На основании равенств (6) и (7) получаем

$$U\tilde{x} = (\ldots x_{-3}, x_{-2}, \boxed{Ax_0 + T_{21}x_{-1}}, T_{12}x_0 + T_{11}x_{-1}, x_1, x_2 \ldots). \tag{9}$$

Но тогда с учетом (8)

$$U^+\tilde{y} = (\ldots y_{-1}, T_{21}^* J y_0 + T_{11}^* y_1, \boxed{A^+ y_0 + J T_{12}^* y_1}, y_2, y_3, \ldots). \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть U — минимальная регулярная дилатация д. J-н. оператора A. Тогда для всех λ, $|\lambda| < 1$,*

$$\lambda \in \sigma_z(U) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma_z(A^+), \ z \in \{p, r, c\}.$$

Доказательство. Очевидно, что $\lambda \in \sigma_z(U) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma_z(U^+)$. Из равенства (10) следует, что $(A^+ - \lambda^{-1}I)y = 0$ тогда и только тогда, когда $(U^+ - \lambda^{-1}I)\tilde{y} = 0$, где $\tilde{y} = = (\ldots, \lambda^2 T_{21}^* Jy, \lambda T_{21}^* Jy, \underline{|y|}, 0, \ldots)$. Таким образом, $\lambda^{-1} \in \sigma_p(A^+) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma_p(U^+)$. Аналогично с учетом равенства (9) получаем $\bar{\lambda}^{-1} \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \bar{\lambda}^{-1} \in \sigma_p(U)$ и, следовательно, $\lambda^{-1} \in \sigma_r(A^+) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma_r(U^+)$.

Положим $D_+ = [\bigoplus_0^\infty] U^n N_+$ и $D_- = [\bigoplus_0^\infty](U^+)^n N_-$. На основании равенства (10) заключаем, что операторы $R_+ = (P_{D_+} U^+ - \lambda^{-1} I)|_{D_+}$ и $R_- = (P_{D_-} U^+ - \lambda^{-1} I)|_{D_-}$ непрерывно обратимы в пространствах D_+ и D_- соответственно (P_X — ортопроектор в H на X). Но тогда для любого $\tilde{x} \in \tilde{H}$ уравнение $(U^+ - \lambda^{-1}I)\tilde{y} = \tilde{x}$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{gathered} P_{D_+} \tilde{y} = R_+^{-1} P_{D_+} \tilde{x}, \quad (A^+ - \lambda^{-1} I) P_{\mathfrak{H}} \tilde{y} = P_{\mathfrak{H}} \tilde{x} - J T_{12}^* P_{N_+} \tilde{y}, \\ P_{D_-} \tilde{y} = R_-^{-1} (P_{D_-} \tilde{x} - T_{21}^* J P_{\mathfrak{H}} \tilde{y} - T_{11}^* P_{N_-} \tilde{y}). \end{gathered} \tag{11}$$

Из системы (11) получаем, что уравнение $(U^+ - \lambda^{-1}I)\tilde{y} = \tilde{x}$ имеет решение при всех $\tilde{x} \in \tilde{H}$ тогда и только тогда, когда уравнение $(A^+ - \lambda^{-1}I)y = x$ разрешимо при всех $x \in \mathfrak{H}$ и, следовательно, $\lambda^{-1} \in \rho(U^+) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \rho(A^+)$.

3. Характеристическая функция д. *J*-н. оператора. Пусть U — минимальная регулярная дилатация д. J-н. оператора A и $\lambda \in \rho(U)$, $|\lambda| < 1$.

Операторнозначную функцию $S_A(\lambda) = P_{N_-}(U - \lambda I)^{-1} P_{N_+}$, где $P_{N_\pm}$ — ортопроекторы в H на подпространства $N_\pm$, назовем характеристической функцией (х. ф.) оператора A. При фиксированном λ значением х. ф. $S_A(\lambda)$ является ограниченный оператор, действующий из N_+ в N_-.

Непосредственно из определения х. ф. и равенств (4) получаем

$$S_A^*(\lambda) = S_{A^+}(\bar{\lambda}).$$

Пусть $\lambda \in \rho(U)$, $|\lambda| < 1$. Для любого $z \in N_+$, $\tilde{x} = U^+ z = (\ldots, 0, T_{11}^* z, \underline{|JT_{12}^* z|}, 0 \ldots)$. Решая уравнение $(U^+ - \lambda^{-1}I)\tilde{y} = \tilde{x}$, имеем $y_{-1} = \lambda(T_{21}^* J(A^+ - \lambda^{-1}I)^{-1} J T_{12}^* - - T_{11}^*)z$, где $\lambda^{-1} \in \rho(A^+)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} S_A(\lambda)z &= -\lambda^{-1} P_{N_-}(U^+ - \lambda^{-1}I)^{-1} U^+ z = \\ &= T_{11}^* z + \lambda T_{21}^* J (I - \lambda A^+)^{-1} J T_{12}^* z. \end{aligned} \tag{12}$$

Отметим, что в случае, когда $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, а оператор A — сжатие в $\mathfrak{H}$, определенная так х. ф. совпадает с х. ф. из работы [1].

Из $\tilde{J}$-унитарности оператора U и равенств (9), (10) следует

$$I - T_{11}^* T_{11} = T_{21}^* J T_{21}, \quad I - T_{11} T_{11}^* = T_{12} J T_{12}^*, \tag{13}$$

$$I - A^+ A = J T_{12}^* T_{12}, \quad I - A A^+ = T_{21} T_{21}^* J, \tag{14}$$

$$T_{11}^* T_{12} = -T_{21}^* J A, \quad T_{21} T_{11}^* = -A J T_{12}^*. \tag{15}$$

Используя равенства (12) – (15), получаем

$$T_{11}^{*}S_A(\lambda) = I - T_{12}(I-\lambda A^{+})^{-1}JT_{12}^{*}, \tag{16}$$

$$T_{21}S_A(\lambda) = (\lambda J - A)(I-\lambda A^{+})^{-1}JT_{12}^{*}, \tag{17}$$

$$S_A(\lambda)T_{12} = T_{21}^{*}J(I-\lambda A^{+})^{-1}(\lambda J - A). \tag{18}$$

С учетом равенств (16), (17) непосредственно проверяется, что

$$I - S_A^{*}(\mu)S_A(\lambda) = (1-\lambda\bar{\mu})T_{12}(I-\bar{\mu}A)^{-1}(I-\lambda A^{+})^{-1}JT_{12}^{*}.$$

Таким образом, для любого $x \in N_+$

$$\| x \|^2 - \| S_A(\lambda)x \|^2 = (1-|\lambda|^2)[(I-\lambda A^{+})^{-1}JT_{12}^{*}x, (I-\lambda A^{+})^{-1}JT_{12}^{*}x]$$

и, следовательно, в отличие от случая гильбертовых пространств значения х. ф. $S_A(\lambda)$, вообще говоря, не являются сжимающими операторами.

Лемма 1. *Пусть A — д. J-н. оператор. Тогда*

$$0 \in \sigma_z(A) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_z(T_{11}^{*}), \quad z \in \{p, r, c\}.$$

Доказательство. Пусть $0 \in \sigma_p(A)$. Тогда существует такой вектор $x \in \mathfrak{H}$, $x \neq 0$, что $Ax = 0$. С учетом первого из равенств (14) заключаем, что $JT_{12}^{*}T_{12}x = x$ и, следовательно, $y = T_{12}x \neq 0$. Но тогда на основании (15) получаем $T_{11}^{*}y = 0$ и, следовательно, $0 \in \sigma_p(T_{11}^{*})$. Обратно, из того, что $T_{11}^{*}y = 0$, с учетом вторых равенств в (13) и (15) заключаем, что $x = JT_{12}^{*}y \neq 0$ и $Ax = 0$.

Таким образом, $0 \in \sigma_p(A)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma_p(T_{11}^{*})$.

Если $0 \in \sigma_r(A)$, то существует ненулевой вектор $x \in \operatorname{Ker} A^{+}$. Аналогично предыдущему заключаем, что $T_{11}y = 0$, где $y = T_{21}^{*}Jx$ и, следовательно, $0 \in \sigma_r(T_{11}^{*})$. Случай $0 \in \sigma_r(T_{11}^{*})$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $0 \in \sigma_c(A)$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$, $\| x_n \| = 1$, такая, что $\lim_{n\to\infty} Ax_n = 0$. Положим $y_n = T_{12}x_n$. Из (14), (15) получаем $\lim_{n\to\infty} \| JT_{12}^{*}y_n \| = 1$ и $\lim_{n\to\infty} \| T_{11}^{x}y_n \| = 0$ и, следовательно, $0 \in \sigma_c(T_{11}^{*})$. Случай $0 \in \sigma_c(T_{11}^{*})$ аналогичен.

Зафиксируем некоторое $a \in \rho(U)$, $|a| < 1$. В силу теоремы 1 устанавливаем, что оператор $A_a = (A - aI)(I - \bar{a}A)^{-1}$ является ограниченным двояко J-нерастягивающим. Соответствующие ему (в смысле равенств (4)) J_H-блуждающие подпространства обозначим через $N_+(a)$ и $N_-(a)$. Используя равенства (14), (18) и рассуждая так же, как и в [1], получаем следующее предложение.

Лемма 2. *Существуют такие унитарные отображения $W_{\pm}: N_{\pm}(a) \to N_{\pm}$, что*

$$S_A\left(\frac{\lambda + a}{1 + \bar{a}\lambda}\right) = W_{-}S_{A_a}(\lambda)W_{+}^{-1}.$$

Теорема 2. *Пусть $\lambda \in \rho(U)$ и $|\lambda| < 1$. Тогда*

$$0 \in \sigma_z(S_A(\lambda)) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_z(A), \quad z \in \{p, r, c\}.$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\lambda = a \in \rho(U)$. Тогда существует д. J-н. оператор A_a и $a \in \sigma_z(A) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_z(A_a)$. В силу леммы 1 $0 \in \sigma_z(A_a) \Leftrightarrow 0 \in$

$\in \sigma_z(T^*_{11}(a))$. С учетом (12) заключаем, что $T^*_{11}(a) = S_{A_a}(0)$. Но тогда на основании леммы 2 $0 \in \sigma_z(S_{A_a}(0)) \Leftrightarrow 0 \in \sigma_z(S_A(a))$.

4. Случай пространства Понтрягина. J-пространство $\mathfrak{H}$ называется пространством Понтрягина, если один из операторов $P_+ = \frac{1}{2}(I + J)$ и $P_- = \frac{1}{2}(I - J)$ является конечномерным. В дальнейшем предполагаем, что $\dim \mathfrak{H}_- = \kappa < \infty$, где $\mathfrak{H}_- = P_-\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — пространство Понтрягина. В силу разложения (5) H — также пространство Понтрягина и $\dim H_- = \kappa$. Но тогда спектр J_H-унитарного оператора U внутри единичного круга состоит из не более чем κ (с учетом алгебраической кратности) нормальных собственных значений [5] и, следовательно, $S_A(\lambda)$ — мероморфная внутри единичного круга функция, число полюсов которой на превышает κ.

Непосредственно из теоремы 1 получаем, что точка λ_0 — особая точка х. ф. $S_A(\lambda)$ тогда и только тогда, когда точка λ_0^{-1} — нормальное собственное значение оператора A^+.

Рассматривая разложение резольвенты $(U - \lambda I)^{-1}$ в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки λ_0, с учетом равенства (9) нетрудно получить следующий критерий.

Теорема 3. *Точка λ_0 — полюс х. ф. $S_A(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $P_{\lambda_0} N_+ \not\subset \mathfrak{H}$, где P_{λ_0} — проектор Риса в H на $\mathfrak{L}_{\lambda_0}(U)$.*

В частности, если $\mathfrak{L}_{1/\lambda_0}(A^+)$ — нейтральный линеал, то с учетом нейтральности линеала $\mathfrak{L}_{\lambda_0}(U)$ и равенства $P_{\mathfrak{H}} \mathfrak{L}_{\lambda_0}(U) = \mathfrak{L}_{1/\lambda_0}(A^+)$ заключаем, что $\mathfrak{L}_{\lambda_0}(U) = \mathfrak{L}_{1/\lambda_0}(A^+) \subset \mathfrak{H}$ и, следовательно, справедливо такое следствие.

Следствие. *Если $\mathfrak{L}_{1/\lambda_0}(A^+)$ — нейтральный линеал, то λ_0 — устранимая особая точка х. ф. $S_A(\lambda)$.*

1. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с.
2. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об одном классе операторов рассеяния и характеристических операторах-функциях сжатий // Докл. АН СССР. – 1965. – **160**, №1. – С. 9–12.
3. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
4. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния для автоморфных функций. – М.: Мир, 1979. – 324 с.
5. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с.
6. *Кужель С. А.* J-нерастягивающие операторы // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1986. – Вып. 45. – С. 63–68.
7. *Кужель С. А.* Об устойчивости двояко J-нерастягивающих операторов // Там же. – 1990. – Вып. 54. – С. 69-73.
8. *Кужель С. А.* J-унитарные дилатации двояко J-нерастягивающих операторов // Тр. конф. молодых ученых (Киев, 15–17 июня 1988 г.): Тез. докл. – Деп. в ВИНИТИ, № 487–В89. – 3 с.

Получено 28.06.91