УДК 517.9

І. С. Дробоцька, асп. (Ін-т математики АН України, Київ)

# АНАЛІЗ ПОВНОЇ ІНТЕГРОВНОСТІ СИСТЕМИ, ІНВЕРСНОЇ ДО НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ БЕННІ – КАУПА

**Досліджується система, інверсна до нелінійної динамічної системи Бенні – Каупа. Для цієї системи доведено існування нескінченної ієрархії функціонально незалежних та інволютивних законів збереження, знайдені пара імплектичних та нетерових операторів, яка дозволяє записати систему у бігамільтоновому вигляді, а також явний вигляд оператора Лакса.**

**1.** Розглянемо нелінійну динамічну систему

$$K[u,p,q,v]=\begin{cases} u_t=p_x-v-pu; \\ p_t=u; \\ q_t=v; \\ v_t=-q_x+pv+uq, \end{cases} \tag{1}$$

що задана на нескінченновимірному періодичному функціональному многовиді $M \simeq C_l^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$, де $l \in \mathbb{R}$ — період. Тут $K: M \to T(M)$ — гладке по Фреше поліноміальне векторне поле на многовиді $M$.

Система (1) одержана з нелінійної динамічної системи Бенні — Каупа [1]:

$$u_t = u_{xx} + v_x - uu_x,$$
$$v_t = -v_{xx} + (uv)_x$$

внаслідок виконання відображення інверсії $x \rightleftarrows t$, де $x, t \in \mathbb{R}$.

Мета даної роботи — показати, що система (1) на многовиді $M$ є цілком інтегровним гамільтоновим потоком і допускає зображення типу Лакса, а також знайти це зображення у явному вигляді [2].

Будемо шукати зображення типу Лакса для системи (1), використовуючи градієнтно-голономний алгоритм [3]. Спочатку переконаємось у наявності для системи (1) нескінченної ієрархії функціонально незалежних законів збереження. Для цього розглянемо рівняння Лакса

$$\varphi_t + K'^{*}\varphi = 0. \tag{2}$$

Штрих у рівнянні (2) означає похідну Фреше локального нелінійного функціоналу $K$, „*" — спряження відносно білінійної форми

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{x_0}^{x_0+l} dx \sum_{j=1}^{4} a_j(x) b_j(x), \quad \vec{a}, \vec{b} \in T(M),$$

$x_0$ — довільне число.

Оператори $K'$ і $K'^{*}$ явно записуються так:

$$K' = \begin{pmatrix} -u & \partial & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ v & 0 & -\partial & u \end{pmatrix}, \quad K'^{*} = \begin{pmatrix} -u & 1 & 0 & v \\ -\partial & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial \\ -1 & 0 & 1 & u \end{pmatrix}.$$

Рівняння (2) допускає вектор-розв'язок у вигляді

$$\varphi(x,t;\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ a(x,t;\lambda) \\ b(x,t;\lambda) \\ c(x,t;\lambda) \end{pmatrix} \exp\left[\omega(x,t;\lambda) + \partial^{-1}\sigma(x,t;\lambda)\right]. \tag{3}$$

Тут $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексний параметр, $\omega(x, t; \lambda)$ — дисперсна функція, $\partial^{-1}(\cdot) = \frac{1}{2}\left[\int_{x_0}^{x}(\cdot)dx - \int_{x}^{x_0+l}(\cdot)dx\right]$ — оператор „оберненого" диференціювання, для якого $\partial\cdot\partial^{-1} = 1$.

При $|\lambda| \to \infty$ вірні такі асимптотичні розклади:

$$
\begin{aligned}
a(x, t; \lambda) &\simeq \sum_{j\geq -1} a_j\,[u, p, q, v]\,\lambda^{-j},\\
b(x, t; \lambda) &\simeq \sum_{j\geq 0} b_j\,[u, p, q, v]\,\lambda^{-j},\\
c(x, t; \lambda) &\simeq \sum_{j\geq 1} c_j\,[u, p, q, v]\,\lambda^{-j},\\
\sigma(x, t; \lambda) &\simeq \sum_{j\geq 0} \sigma_j\,[u, p, q, v]\,\lambda^{-j}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Дисперсна функція $\omega(x, t; \lambda) = \omega_1(\lambda)t + \omega_2(\lambda)x$ знаходиться як розв'язок рівняння

$$
(1, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c})^{\tau}\,\omega_1(\lambda)\exp(\omega_1(\lambda)t + \omega_2(\lambda)x) + 
+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -\partial & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \partial\\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \exp(\omega_1(\lambda)t + \omega_2(\lambda)x) = 0 \tag{5}
$$

($\tau$ — знак транспонування).

Рівняння (5) випливає з рівняння (2), якщо в ньому покласти $u = p = q = v = 0$, а за $\vec{\varphi}$ взяти $(1, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c})^{\tau}\exp\omega(x, t; \lambda)$, де $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ — константи. З (5) одержуємо співвідношення

$$
\overline{a} = -\,\omega_1(\lambda), \quad \overline{b} = \frac{1}{2}, \quad \overline{c} = \frac{1}{2\omega_1(\lambda)}, \quad \omega_2(\lambda) = -\,\omega_1^2(\lambda).
$$

Тоді, поклавши $\omega_1(\lambda) = \lambda$, розв'язок (3) зобразимо у вигляді

$$
\varphi(x, t; \lambda) = \begin{pmatrix} 1\\ a(x, t; \lambda)\\ b(x, t; \lambda)\\ c(x, t; \lambda) \end{pmatrix} \exp(\lambda t - \lambda^2 x - \partial^{-1}\sigma). \tag{6}
$$

Використовуючи (6), дістаємо систему рівнянь

$$
\begin{aligned}
\lambda + \partial^{-1}\sigma_t - u + a + vc &= 0,\\
a_t + a(u - a - vc) + \lambda^2 - \sigma &= 0,\\
b_t + b(u - a - vc) + c_x(\sigma - \lambda^2) &= 0,\\
c_t + c(u - a - vc) - 1 + b + uc &= 0.
\end{aligned}
$$

З цих рівнянь, враховуючи асимптотичні розклади (4), знаходимо систему нескінченних рекурентних співвідношень

$$
\lambda\delta_{-1,\,j} + \partial^{-1}\sigma_{j,\,t} - u\delta_{0,\,t} + a_j + vc_j = 0,
$$

$$a_{j,t} + ua_j - \sum_{k=-1}^{j+1} a_k a_{j-k} - v \sum_{k=-1}^{j} a_k c_{j-k} - \lambda^2 \delta_{-2,j} - \sigma_j = 0,$$

$$b_{j,t} + ub_j - \sum_{k=-1}^{j} a_k b_{j-k} - v \sum_{k=0}^{j} c_k b_{j-k} + c_{j,x} + \sum_{k=0}^{j} c_k \sigma_{j-k} - c_{j+2} = 0,$$

$$c_{j,t} + uc_j - \sum_{k=-1}^{j} a_k c_{j-k} - v \sum_{k=0}^{j} c_k c_{j-k} + b_j + uc_j - \delta_{0,j} = 0,$$

звідки послідовно одержуємо

$$a_{-1} = -1,\ a_0 = p/2,\ b_0 = 1/2,\ c_1 = 1/2,$$

$$\sigma_0 = (u + q + p^2/2)/2,\ a_1 = u/2,\ b_1 = -p/2,\ c_2 = -p/4,$$

$$\sigma_1 = -(p_x + p\,q - v)/2,\ a_2 = (v + p\,u - 2p_x)/4,$$

$$\sigma_2 = -(2u_x + q_x + pp_x + p^2 q + uq - p\,v + q^2/2)/4,$$

$$b_2 = (u + p^2 + q/2)/4,\ c_3 = (2u + p^2 + q)/8,$$

$$a_3 = (q_x - pp_x + p^2 u + 2u_x - qp^2 + qu - q^2/2)/8,$$

$$\sigma_3 = -(2(p\,q - v)_x + 2\sigma_{0,x} + p^2 p_x - p^2 v +$$

$$+ 2p_x q - 2qv + 2qpu + p^3 q + 2q^2 p - 2uv)/8, \ldots .$$

Неважко перевірити, що всі функціонали виду

$$\gamma_j = \int_{x_0}^{x_0+l} dx\, \sigma_j[u, p, q, v], \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{7}$$

є законами збереження для динамічної системи (1).

**2.** Випишемо, користуючись формулою

$$\operatorname{grad} \gamma_j = (\delta\gamma_j/\delta u,\ \delta\gamma_j/\delta p,\ \delta\gamma_j/\delta q,\ \delta\gamma_j/\delta v)^\tau,$$

градієнти функціоналів (7):

$$\operatorname{grad} \gamma_0 = (1, p, 1, 0)^\tau/2,$$

$$\operatorname{grad} \gamma_1 = -(0, q, p, -1)^\tau/2,$$

$$\operatorname{grad} \gamma_2 = (u,\ p\,q - v, p^2 + u + q, -p\,)^\tau/4,$$

..........................

Потрібно знайти такий імплектичний і нетеровий оператор $\mathfrak{L} : T^*(M) \to$ $\to T(M)$, щоб систему (1) можна було записати у бігамільтоновому вигляді

$$\omega_t = -\mathfrak{L} \operatorname{grad} H, \quad \omega = (u, p, q, v)^\tau,$$

де $H$ — деякий закон збереження системи (1).

Оператор $\mathfrak{L}$ (якщо він існує) задовольняє умову нетеровості:

$$\mathfrak{L}'K - \mathfrak{L}K'^{*} - K'\mathfrak{L} = 0. \tag{8}$$

Скориставшись методом малого параметра [4], можемо записати для операторів $\mathfrak{L}, K, K', K'^{*}$ такі асимптотичні розклади:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_0} + \varepsilon\frac{d}{dt_1}, \quad K = K_0' + \varepsilon K_1',$$

$$K'^{*} = K_0'^{*} + \varepsilon K_1'^{*}, \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \varepsilon\mathfrak{L}_1 + \varepsilon^2\mathfrak{L}_2 + \ldots,$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, оператори $K_0'$, $K_1'$, $K_0'^{*}$, $K_1'^{*}$ мають вигляд

$$K_0' = \begin{pmatrix} 0 & \partial & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\partial & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1' = \begin{pmatrix} -p & -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & v & u & p \end{pmatrix},$$

$$K_0'^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\partial & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1'^{*} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & q \\ -u & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Підставляючи ці асимптотичні розклади в рівняння (8), дістанемо рекурентні співвідношення для знаходження операторів $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ і т. д.:

$$\mathfrak{L}_0 K_0'^{*} + K_0'\mathfrak{L}_0 = 0, \tag{9.1}$$

$$\mathfrak{L}_1 K_1'^{*} + \mathfrak{L}_0 K_1'^{*} + K_1'\mathfrak{L}_0 + K_0'\mathfrak{L}_1 = d\mathfrak{L}_1 / dt_0, \tag{9.2}$$

$$\mathfrak{L}_2 K_0'^{*} + \mathfrak{L}_1 K_1'^{*} + K_1'\mathfrak{L}_1 + K_0'\mathfrak{L}_2 = d\mathfrak{L}_1 / dt_1 + d\mathfrak{L}_2 / dt_0, \tag{9.3}$$

..........................................................................

$$\mathfrak{L}_k K_0'^{*} + \mathfrak{L}_{k-1} K_1'^{*} + K_1'\mathfrak{L}_{k-1} + K_0'\mathfrak{L}_k = d\mathfrak{L}_{k-1} / dt_1 + d\mathfrak{L}_k / dt_0$$

..........................................................................

Співвідношення (9.1), якщо элементи матриці $\mathfrak{L}_0$ позначити через $\mathfrak{L}_0^{ij}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, еквівалентне такій системі рівнянь:

$$\begin{gathered} \partial\mathfrak{L}_0^{21} - \mathfrak{L}_0^{41} - \mathfrak{L}_0^{12}\partial - \mathfrak{L}_0^{14} = 0, \;\; \mathfrak{L}_0^{11} - \mathfrak{L}_0^{22}\partial - \mathfrak{L}_0^{24} = 0, \\ \mathfrak{L}_0^{41} - \mathfrak{L}_0^{32}\partial - \mathfrak{L}_0^{34} = 0, \;\; \partial\mathfrak{L}_0^{31} + \mathfrak{L}_0^{42}\partial + \mathfrak{L}_0^{44} = 0, \\ \mathfrak{L}_0^{11} + \partial\mathfrak{L}_0^{22} - \mathfrak{L}_0^{42} = 0, \;\; \mathfrak{L}_0^{21} + \mathfrak{L}_0^{12} = 0, \;\; \mathfrak{L}_0^{42} + \mathfrak{L}_0^{31} = 0, \\ \mathfrak{L}_0^{41} - \partial\mathfrak{L}_0^{32} = 0, \;\; \mathfrak{L}_0^{13}\partial + \partial\mathfrak{L}_0^{24} - \mathfrak{L}_0^{44} = 0, \\ \mathfrak{L}_0^{23}\partial + \mathfrak{L}_0^{14} = 0, \;\; \mathfrak{L}_0^{33}\partial + \mathfrak{L}_0^{44} = 0, \\ \mathfrak{L}_0^{43}\partial + \partial\mathfrak{L}_0^{34} = 0, \;\; \mathfrak{L}_0^{14} + \partial\mathfrak{L}_0^{23} - \mathfrak{L}_0^{43} = 0, \\ \mathfrak{L}_0^{24} + \mathfrak{L}_0^{13} = 0, \;\; \mathfrak{L}_0^{34} + \mathfrak{L}_0^{43} = 0, \;\; \mathfrak{L}_0^{44} - \partial\mathfrak{L}_0^{33} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Система (10) має два незалежні розв'язки. Їм відповідають матриці $\mathfrak{L}_0$ і $\mathcal{M}_0$ — два незалежні розв'язки операторного рівняння (9.1):

$$\mathfrak{L}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \partial \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \partial & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} \partial & 0 & -\partial & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial \\ -\partial & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі шукаємо оператор $\mathfrak{L}_1$ з рівняння (9.2). Для цього помножимо рівняння (9.2) на елемент $\vec{\varphi}^{(0)} \in T(M)$, $\vec{\varphi}^{(0)} = (\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}, \varphi_4^{(0)})^{\tau}$, що задовольняє умову

$$\frac{d\vec{\varphi}^{(0)}}{dt} + K_0'^{*}\vec{\varphi}^{(0)} = 0.$$

Ця умова еквівалентна співвідношенням

$$\begin{gathered}\varphi^{(0)}_{1,t_0} + \varphi^{(0)}_2 = 0, \quad \varphi^{(0)}_{2,t_0} - \varphi^{(0)}_{1,x} = 0,\\ \varphi^{(0)}_{3,t_0} + \varphi^{(0)}_{4,x} = 0, \;\; \varphi^{(0)}_{4,t_0} - \varphi^{(0)}_1 + \varphi^{(0)}_3 = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Рівняння (9.2), домножене на $\vec{\varphi}^{(0)}$, має вигляд

$$\frac{d}{dt_0}(\mathfrak{L}_1\vec{\varphi}^{(0)}) - K_0'(\mathfrak{L}_1\vec{\varphi}^{(0)}) = \mathfrak{L}_0(K_1'^{*}\vec{\varphi}^{(0)}) + K_1'(\mathfrak{L}_0\vec{\varphi}^{(0)}). \tag{12}$$

Члени з невідомим оператором $\mathfrak{L}_1$ ми перенесли в ліву частину, а з відомим оператором $\mathfrak{L}_0$ — у праву.

Враховуючи явний вигляд операторів $\mathfrak{L}_0$, $K_1'$, $K_1'^{*}$ і вводячи позначення $\mathfrak{L}_0(K_1'^{*}\vec{\varphi}^{(0)}) + K_1'(\mathfrak{L}_0\vec{\varphi}^{(0)}) = (g_1, g_2, g_3, g_4)^{\tau}$, $\mathfrak{L}_1\vec{\varphi}^{(0)} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^{\tau}$, систему (12) записуємо у вигляді

$$\begin{aligned}&\frac{d\theta_1}{dt_0} - (\theta_{2,x} - \theta_4) = g_1, \qquad &&\frac{d\theta_2}{dt_0} - \theta_1 = g_2,\\ &\frac{d\theta_3}{dt_0} - \theta_4 = g_3, &&\frac{d\theta_4}{dt_0} + \theta_{3,x} = g_4,\end{aligned} \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}&g_1 = u\varphi^{(0)}_3 - v\varphi^{(0)}_4 + p_x\varphi^{(0)}_4 + p\,\varphi^{(0)}_2,\\ &g_2 = q\varphi^{(0)}_4 - p\,\varphi^{(0)}_1 - u\varphi^{(0)}_4, \qquad g_3 = v\varphi^{(0)}_4 - u\varphi^{(0)}_1,\\ &g_4 = q_x\varphi^{(0)}_4 + u\varphi^{(0)}_2 + 2q\varphi^{(0)}_{4,x} - p_x\varphi^{(0)}_1 - q\varphi^{(0)}_2 - v\varphi^{(0)}_1 - v\varphi^{(0)}_3.\end{aligned}$$

Система (13) еквівалентна такій:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\theta_3}{dt_0^2} + \theta_{3,x} = g_4 + \frac{dg_3}{dt_0}, \qquad &&\theta_4 = \frac{d\theta_3}{dt_0} - g_3,\\ &\frac{d^2\theta_2}{dt_0^2} - \theta_{2,x} = \frac{dg_2}{dt_0} + g_1 - \theta_4, &&\theta_1 = \frac{d\theta_2}{dt_0} - g_2.\end{aligned}$$

Послідовно розв'язуємо цю систему, використовуючи співвідношення (11), а також співвідношення $u_{t_0} = p_x - v$, $p_{t_0} = u$, $q_{t_0} = v$, $v_{t_0} = -q_x$. В результаті одержимо

$$\begin{aligned}&\theta_1 = p\varphi_3 - q\varphi_4, \qquad &&\theta_2 = -p\varphi_4,\\ &\theta_3 = q\varphi_4 - p\varphi_1, &&\theta_4 = q(\varphi_1 - \varphi_3) + p\varphi_2.\end{aligned}$$

Отже, вирази для дій складових шуканого оператора мають вигляд

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}_1^{11}\varphi^{(0)}_1 = 0, &&\mathfrak{L}_1^{21}\varphi^{(0)}_1 = 0, &&\mathfrak{L}_1^{31}\varphi^{(0)}_1 = -p\varphi^{(0)}_1, &&\mathfrak{L}_1^{41}\varphi^{(0)}_1 = q\varphi^{(0)}_1,\\ &\mathfrak{L}_1^{12}\varphi^{(0)}_2 = 0, &&\mathfrak{L}_1^{22}\varphi^{(0)}_2 = 0, &&\mathfrak{L}_1^{32}\varphi^{(0)}_2 = 0, &&\mathfrak{L}_1^{42}\varphi^{(0)}_2 = p\varphi^{(0)}_2,\\ &\mathfrak{L}_1^{13}\varphi^{(0)}_3 = p\varphi^{(0)}_3, &&\mathfrak{L}_1^{23}\varphi^{(0)}_3 = 0, &&\mathfrak{L}_1^{33}\varphi^{(0)}_3 = 0, &&\mathfrak{L}_1^{43}\varphi^{(0)}_3 = -q\varphi^{(0)}_3,\\ &\mathfrak{L}_1^{14}\varphi^{(0)}_4 = -q\varphi^{(0)}_4, &&\mathfrak{L}_1^{24}\varphi^{(0)}_4 = -p\varphi^{(0)}_4, &&\mathfrak{L}_1^{34}\varphi^{(0)}_4 = 0, &&\mathfrak{L}_1^{44}\varphi^{(0)}_4 = 0.\end{aligned}$$

Звідси легко знайти оператор $\mathfrak{L}_1$:

$$\mathfrak{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & -q \\ 0 & 0 & 0 & -p \\ -p & 0 & 0 & q \\ q & p & -q & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно знаходимо оператор $\mathfrak{L}_2$ з рівняння (9.3). Дістанемо

$$g_1 = -p^2\varphi_3^{(0)} + 2pu\varphi_4^{(0)}, \qquad g_2 = -p^2\varphi_4^{(0)},$$
$$g_3 = p^2\varphi_1^{(0)}, \qquad g_4 = -2pu\varphi_1^{(0)} + p^2\varphi_2^{(0)},$$
$$\theta_1 = p^2\varphi_4^{(0)}, \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = 0, \quad \theta_4 = -p^2\varphi_1^{(0)},$$
$$\mathfrak{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathfrak{L}_3$ рівний нулю, оскільки виконується рівність

$$\mathfrak{L}_2 K'^* + K_1'\mathfrak{L}_2 = = \mathfrak{L}_{2,t_1}.$$

Остаточно маємо

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & p & \partial - q + p^2 \\ 1 & 0 & -1 & -p \\ -p & 1 & 0 & q \\ \partial + q - p^2 & p & -q & 0 \end{pmatrix}.$$

За допомогою аналогічних обчислень знаходимо ще один імплектичний нетеровий оператор $\mathcal{M}$, пов'язаний з оператором $\mathcal{M}_0$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2\partial & p & -2\partial - p^2 & \begin{matrix} -2p\partial - \partial p - v + \\ + qp - pu - p^3 \end{matrix} \\ -p & 0 & p & 2\partial + u + p^2 \\ -2\partial + p^2 & -p & 0 & v - qp \\ \begin{matrix} -2\partial p - p\partial + v + \\ + pu - qp + p^3 \end{matrix} & 2\partial - u - p^2 & qp - v & \partial q + q\partial \end{pmatrix}.$$

Отже, вихідна динамічна система може бути записана в бігамільтоновому вигляді

$$\omega_t = -\mathfrak{L}\,\mathrm{grad}\, H = -\mathcal{M}\,\mathrm{grad}\,\tilde{H},$$

де $\omega = (u, p, q, v)^\tau$, $H = 4\gamma_2 = \int_{x_0}^{x_0+l} dx(p^2 q + uq - pv + q^2/2)$, $\tilde{H} = -2\gamma_1 = \int_{x_0}^{x_0+l} dx(pq - v)$, причому $\{H, \gamma_j\}_{\mathfrak{L}} = \{\tilde{H}, \gamma_j\}_{\mathcal{M}} = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+$.

**3.** Покажемо тепер, що динамічна система (1) має зображення типу Лакса. Запишемо $L[u, p, q, v; \lambda]$-оператор з зображенням типу Лакса у $(p \times p)$-матричному вигляді, $p \in \mathbb{Z}_+$:

$$L = \mathbb{1}\frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{A}[u, p, q, v; \lambda], \quad \mathrm{tr}\,\mathcal{A}[u, p, q, v; \lambda] = 0, \tag{14}$$

де $\mathcal{A}[u, p, q, v; \lambda]$ — локальний матричнозначний гладкий функціонал на $M$. Тоді для градієнта виду $\varphi(\lambda) = \operatorname{grad} \Delta(x_0; \lambda)$, де $\Delta(x_0; \lambda)$ — слід матриці монодромії [3] $S(x_0, \lambda)$ оператора $L$, виконується рівняння

$$z^q(\lambda)\mathfrak{L}\varphi(\lambda) = \mathcal{M}\varphi(\lambda). \tag{15}$$

В даному випадку $z^q(\lambda) = \lambda$. Матриця $S(x_0, \lambda)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}S = [\mathcal{A}, S]. \tag{16}$$

Неважко переконатись, що порядок матриці $\mathcal{A}[u, p, q, v; \lambda]$ в (14) рівний двом ($p = 2$). З (14) – (16) одержуємо систему рівнянь

$$\begin{gathered}
\lambda[-\mathcal{A}_p + p\mathcal{A}_q - q\mathcal{A}_v + p^2\mathcal{A}_v + [\mathcal{A}v_v, \mathcal{A}] + \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v] = \\
= 2[\mathcal{A}_u, \mathcal{A}] + 2\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_u + p\mathcal{A}_p - 2[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}] - 2\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_q - p^2\mathcal{A}_q - \\
- 3p[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] - 3p\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v - p_x\mathcal{A}_v - v\mathcal{A}_v + qp\mathcal{A}_v - pu\mathcal{A}_v - p^3\mathcal{A}_v, \\
\lambda[\mathcal{A}_u - \mathcal{A}_q - p\mathcal{A}_v] = -p\mathcal{A}_u + p\mathcal{A}_q + 2[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] + 2\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v + u\mathcal{A}_v + p^2\mathcal{A}_v, \qquad (17) \\
\lambda[-p\mathcal{A}_u + \mathcal{A}_p + q\mathcal{A}_v] = -2[\mathcal{A}_u, \mathcal{A}] - 2\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_u + p^2\mathcal{A}_u - p\mathcal{A}_p + v\mathcal{A}_v - qp\mathcal{A}_v, \\
\lambda([\mathcal{A}_u, \mathcal{A}] + \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_u + q\mathcal{A}_u - p^2\mathcal{A}_u u + p\mathcal{A}_q - q\mathcal{A}_q) = \\
= -3p[\mathcal{A}_u, \mathcal{A}] - 3p\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_u - 2p_x\mathcal{A}_u + v\mathcal{A}_u + pu\mathcal{A}_u - qp\mathcal{A}_u + p^3\mathcal{A}_u + 2[\mathcal{A}_p, \mathcal{A}] + \\
+ 2\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_p - u\mathcal{A}_p - p^2\mathcal{A}_p - v\mathcal{A}_q + qp\mathcal{A}_q + 2q[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}] + 2q\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v + q_x\mathcal{A}_v,
\end{gathered}$$

де $\mathcal{A}[u, p, q, v; \lambda] = \mathcal{A}(u, p, q, v; \lambda)$.

При записі цих рівнянь ми використали рівність

$$z^q(\lambda)\mathfrak{L}\operatorname{tr}(S\vec{d}[\mathcal{A}]) = \mathcal{M}\operatorname{tr}(S\vec{d}[\mathcal{A}]), \tag{18}$$

де $\vec{d}[\mathcal{A}] = (\mathcal{A}_u, \mathcal{A}_p, \mathcal{A}_q, \mathcal{A}_v)^\tau$.

З другого і третього рівнянь системи (17) внаслідок того, що матриця $\mathcal{A}$ не містить перших похідних, дістаємо $\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_v = 0$, $\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{A}_u = 0$. Значить, матриці $\mathcal{A}_u$ і $\mathcal{A}_v$ можуть залежати лише від параметра $\lambda$ і не залежать від функцій $u, p, q$ і $v$. З першого і четвертого рівнянь знаходимо вигляд матриць $\mathcal{A}_p$ і $\mathcal{A}_q$:

$$\mathcal{A}_p = C_1 - \mathcal{A}_v q/2 + \mathcal{A}_u q, \qquad \mathcal{A}_q = C_2 - \mathcal{A}_v p/2.$$

Тепер можна записати загальний вигляд матриці $A[u, p, q, v; \lambda]$:

$$\mathcal{A} = C + C_1 p + C_2 q + \mathcal{A}_u u + \mathcal{A}_v v + \mathcal{A}_u p^2/2 - \mathcal{A}_v qp/2, \tag{19}$$

де $C, C_1, C_2, \mathcal{A}_u, \mathcal{A}_v$ — постійні матриці, які залежать від параметра $\lambda$. Підставляючи матрицю $\mathcal{A}$ у вигляді (19) у рівняння (17), дістаємо співвідношення

$$2[\mathcal{A}_v, \mathcal{A}_u] + \mathcal{A}_v = 0, \quad [\mathcal{A}_v, C_2] = 0, \quad 2[C_1, \mathcal{A}_u] = C_1, \quad -\lambda\mathcal{A}_v = 4[\mathcal{A}_u, C_2],$$
$$\lambda(\mathcal{A}_u - C_2) = 2[\mathcal{A}_v, C], \quad \lambda[\mathcal{A}_v, C] = -2[C_2, C], \quad \lambda C_1 = -2[\mathcal{A}_u, C],$$
$$\lambda[\mathcal{A}_u, C] = 2[C_1, C], \quad \lambda[\mathcal{A}_u, C_2] = 2[C_1, C_2] - [\mathcal{A}_v, C], \tag{20}$$
$$2[\mathcal{A}_u, C_2] = C_2 - \mathcal{A}_u + 2[\mathcal{A}_v, C_1].$$

Для знаходження невідомих матриць із співвідношень (20) використаємо теорію алгебр Лі [5], припускаючи, що матриця $\mathcal{A}$ належить деякій підалгебрі Лі $\mathfrak{G}$ алгебри $\mathrm{sl}(2; \mathbb{R})$. Значить, матриця $\mathcal{A}[u, p, q, v; \lambda]$ розкладається за базисом $H, E, F$, де

$$H = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad E = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Будемо припускати, що матриці $C, C_1, C_2, \mathcal{A}_u, \mathcal{A}_v$ теж розкладаються за базисом $H, E, F$. Із співвідношень (20) випливає, що ці матриці можна взяти у вигляді $\mathcal{A}_u = aH$, $\mathcal{A}_v = bE$, $C_2 = cE$, $C_1 = fF$, $C = eH + kF$. Підставивши їх у такому вигляді у співвідношення (20), знайдемо невідомі коефіцієнти $a, b, c, f, e, k$: $a = b = 1/4$, $c = -\lambda/8$, $f = 1/2$, $e = -\lambda^2/8$, $k = \lambda/2$.

В результаті матриця $\mathcal{A}$ запишеться у вигляді

$$\mathcal{A} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}u - \frac{\lambda^2}{8} & \frac{1}{4}v - \frac{1}{8}qp - \frac{\lambda}{8}q \\ \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}p & \frac{\lambda^2}{8} - \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{4}u \end{Vmatrix}.$$

Отже, система (1) має зображення типу Лакса

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [A, L],$$

де

$$L = \mathbb{1}\frac{\partial}{\partial x} - \mathcal{A}, \quad A = \begin{Vmatrix} \frac{1}{4}p - \frac{\lambda}{4} & -\frac{1}{4}q \\ 1 & -\frac{1}{4}p + \frac{\lambda}{4} \end{Vmatrix}.$$

Знайдене зображення типу Лакса дозволяє знайти за допомогою методу оберненої задачі точні розв'язки динамічної системи (1), зокрема скінченнозонні і солітонні.

1. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Полная интегрируемость нелинейных систем Ито и Бенни – Каупа: градиентный алгоритм и представление Лакса // Теорет. и мат. физика. – 1986. – **67**, № 3. – С. 410–425.
2. *Теория солитонов*: метод обратной задачи / Под ред. С.П. Новикова.– М.: Наука, 1980.– 324 с.
3. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
4. *Прикарпатский А. К.* Градиентный алгоритм построения критериев интегрируемости нелинейных динамических систем // Докл. АН СССР. – 1986. – **267**, № 4. – С. 327–332.
5. *Самойленко В. Г., Притула Н. Н., Суяров У. С.* Анализ полной интегрируемости инверсного уравнения Кортевега – де Фриза.– Киев, 1989.– 28 с.– (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.71).

Одержано 20.08.91