УДК 517.944

Л. Г. Хома (Терноп. пед. ун-т),
Н. Г. Хома (Терноп. акад. нар. госп-ва)

ЛІНІЙНА КРАЙОВА ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

We study the boundary-value problem $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x, t)$, $0 \le x \le \pi$, $t \in \mathbb{R}$. We find exact classical solutions of this problem in three Vejvoda–Shtedry spaces, namely, in the classes of $\frac{\pi}{q}$-, $\frac{2\pi}{2s-1}$-, and $\frac{4\pi}{2s-1}$-periodic functions (q and s are natural). We obtain the results only for sets of periods $T_1 = (2p-1)\frac{\pi}{q}$, $T_2 = (2p-1)\frac{2\pi}{2s-1}$, and $T_3 = (2p-1)\frac{4\pi}{2s-1}$ which characterize the classes of π-, 2π-, and 4π-periodic functions.

Вивчається крайова періодична задача $u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x, t)$, $0 \le x \le \pi$, $t \in \mathbb{R}$. В трьох просторах Вейводи – Штедри знайдено точні класичні розв'язки даної задачі, а саме в класах $\frac{\pi}{q}$-, $\frac{2\pi}{2s-1}$- і $\frac{4\pi}{2s-1}$-періодичних функцій (q, s — натуральні числа). Результати одержано лише для множин періодів $T_1 = (2p-1)\frac{\pi}{q}$, $T_2 = (2p-1)\frac{2\pi}{2s-1}$ і $T_3 = (2p-1)\frac{4\pi}{2s-1}$, що характеризують класи π-, 2π- і 4π-періодичних функцій.

Лінійна крайова періодична задача $u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t+T) = u(x, t)$ вивчалась багатьма математиками [1 – 7]. Дослідження в основному проводились у просторі функцій $C^{1,0}(\mathbb{R}^2)$. Однак для окремих випадків доведено, що вказана задача при $a = 1$ може мати розв'язок і в класі функцій $C^{0,1}([0, \pi] \times \mathbb{R})$ [1, 8].

В даній роботі у просторі $C^{0,1}([0, \pi] \times \mathbb{R})$ встановлюються точні класичні розв'язки такої лінійної крайової періодичної задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Позначимо через C_π простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$; через $G_{\pi t}$ простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ разом з похідною по t, а через $Q_{\pi t}$ і $Q^-_{\pi T}$ простори функцій $g(x, t)$, які задовольняють на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ відповідно співвідношення $g(x, t) = g(x, t+T)$ і $g(x, t) = g(x, t+T) = -g(x, -t)$.

Для функції $g \in C_\pi$ розглянемо оператор [1, 8]

$$(Sg)(x, t) = -\frac{1}{4}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau - \frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Якщо тепер розглянути простір функцій $A_t = \{g : g(x, t) = g(\pi - x, t) = g(x, t+T)\}$ і позначити через $L(X, Y)$ простір лінійних і обмежених відображень X в Y, то на підставі означення (4) оператора S безпосередньою перевіркою переконуємось у справедливості наступного твердження.

Теорема 1. *Оператор S має такі властивості*:

$$S \in L(C_\pi \cap A_T, C_\pi^{1,1} \cap A_T), \quad S \in L(G_{\pi t} \cap A_T, C_\pi^{2,2} \cap A_T).$$

Існування класичного розв'язку крайової періодичної задачі (1) – (3) будемо досліджувати лише в конкретно виділених класах функцій, для яких в роботах [7, 8] доведено, що відповідна однорідна задача $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$, $u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0$, $u^0(x, t+T) = u^0(x, t)$ має лише тривіальний розв'язок, а це означає, що крайова періодична задача (1) – (3) має единий розв'язок.

1. Простір 2π-періодичних за змінною t функцій. Зауважимо, що однорідна крайова періодична задача $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0$, $u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0$, $u^0(x, t + w_2) = u^0(x, t)$ має тривіальний розв'язок для періоду $w_2 = 2\pi/(2s-1)$, де s — натуральне число, у просторі функцій

$$A_2 = \left\{g\colon g(x,t) = g\left(\pi - x, t + \frac{w_2}{2}\right) = g(x, t + w_2)\right\}. \tag{5}$$

На основі теореми 1 легко довести, що для $g \in G_{\pi t} \cap A_2$ справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Якщо $g \in G_{\pi t} \cap A_2$, то функція $u \in R_2^{2\pi}$, визначена формулою*

$$(R_2^{2\pi} g)(x,t) \equiv$$

$$\equiv (Sg)(x,t) + \frac{\pi - x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau + \frac{x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau \equiv$$

$$\equiv (Sg)(x,t) + (S^0 g)(x,t), \tag{6}$$

є единою функцією із простору $C_\pi^{2,2} \cap A_2$, яка є розв'язком лінійної крайової періодичної задачі (1) – (3), *причому*

$$\| u(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{3}{4}\pi^2 \|g(x,t)\|_{C_\pi}, \tag{7}$$

$$\| u_t(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}, \quad \| u_x(x,t)\|_{C_\pi} \le \pi \| g(x,t)\|_{C_\pi}, \tag{8}$$

де $\| g(x,t)\|_{C_\pi} = \sup\{|g(x,t)|;\ 0 \le x \le \pi,\ t \in \mathbb{R}\}$, *і оператор $R_2^{2\pi}$ має такі властивості*:

$$R_2^{2\pi} \in L(C_\pi \cap A_2, C_\pi^{1,1} \cap A_2), \quad R_2^{2\pi} \in L(G_{\pi t} \cap A_2, C_\pi^{2,2} \cap A_2).$$

Наслідок. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap A_1 = \{g\colon g(x,t) = g(\pi - x, t) = g(x, t + w_1)\}$, $w_1 = \pi/q$, $q \in \mathbb{N}$, *то функція $u \in R_1^\pi g$, визначена формулою*

$$(R_1^\pi g)(x,t) = (Sg)(x,t) + \frac{1}{4}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau,$$

є единою функцією із простору $C_\pi^{2,2} \cap A_1$, яка задовольняє умови (1) – (3), *причому*

$$\| u(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi},$$

$$\| u_t(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}, \quad \| u_x(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}.$$

2. Простір непарних 2π-періодичних за змінною t функцій. У просторі функцій $A_2^- = \left\{g\colon g(x,t) = g\left(\pi - x, t + \frac{w_2}{2}\right) = g(x, t + w_2) = -g(x,-t)\right\}$ справедливе таке твердження.

Теорема 3. *Якщо* $g(x,t) \in G_{\pi t} \cap A_2^-$, *то функція* $u = Sg$, *визначена формулою* (4), *є єдиною функцією із простору* $C_\pi^{2,2} \cap A_2^-$, *яка задовольняє умови* (1)–(3), *причому*

$$\| u(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{4}\|g(x,t)\|_{C_\pi}, \tag{9}$$

$$\| u_l(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}, \qquad l = t, x. \tag{10}$$

Доведення. Оскільки A_2^- є підпростором простору A_2, твердження теореми буде випливати з теореми 2, якщо ми доведемо, що функція

$$u^0(x,t) = (S^0 g)(x,t) \equiv \frac{\pi - x}{4\pi} v(t) + \frac{x}{4\pi} z(t),$$

яка входить у формулу (6), тотожно дорівнює нулю. Для цього потрібно показати, що функції $v(t)$ і $z(t)$ для кожної $g \in A_2^-$ тотожно дорівнюють нулю.

Обчислюючи похідні $v'(t)$ і $z'(t)$, маємо

$$\begin{aligned} v'(t) &= \int_0^\pi g(\xi, t+\xi)\, d\xi - \int_0^\pi g(\xi, t-\xi)\, d\xi, \\ z'(t) &= \int_0^\pi g(\xi, t+\pi-\xi)\, d\xi - \int_0^\pi g(\xi, t-\pi+\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{11}$$

Виконуючи заміну змінної $\xi = \pi - \eta$ в перших інтегралах останніх двох рівностей і вважаючи, що $g \in A_2^-$, одержуємо $v'(t) \equiv 0$ і $z'(t) \equiv 0$, а це означає, що $v(t) = \mathrm{const}$ і $z(t) = \mathrm{const}$. Оскільки для $g \in A_2^-$ $v(0) = 0$ і $z(0) = 0$, то $v(t) \equiv 0$ і $z(t) \equiv 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, що й треба було довести.

3. Простір 4π-періодичних за змінною t функцій. Зауважимо, що доданки (див. формулу (4)), що визначають оператор S з точністю до коефіцієнтів, одержуємо при розв'язанні відповідних задач Коші [1, с. 26, 57]. На основі розв'язків цих задач доведемо таке твердження.

Теорема 4 [1, с. 63]. *Для* $g \in G_{\pi t} \cap A_3 = \left\{g\colon g(x,t) = -g\left(x, t + \frac{T_3}{2}\right),\ T_3 = \frac{4\pi k}{2s-1}\right\}$ *функція*

$$(R_3 g)(x,t) = \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \mu_1(\alpha)\, d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\, d\tau, \tag{12}$$

де $\mu_1(t)$ *визначається з різницевого рівняння*

$$\mu_1(t+\pi) - \mu_1(t-\pi) = \int_0^\pi \{g(\xi, t+\pi-\xi) - g(\xi, t-\pi+\xi)\}\, d\xi, \tag{13}$$

є єдиною функцією з простору $C_\pi^{2,2} \cap A_3$, *яка задовольняє умови* (1)–(3). *Крім цього,* $R_3 \in L(C_\pi \cap A_3, C_\pi^{1,1} \cap A_3)$, $R_3 \in L(G_{\pi t} \cap A_3, C_\pi^{2,2} \cap A_3)$.

Якщо використати рівність

$$g\left(x, t+\frac{w_3}{2}\right) = g(x, t+2\pi) = -g(x, t), \tag{14}$$

то для періоду $w_3 = \dfrac{4\pi}{2s-1}$ (s — натуральне число) формула (12) набирає більш простого вигляду.

Справді, на підставі умови (14) рівність (13) в класі функцій $\tilde{A}_3 = \left\{g\colon g(x,t) = -g\left(x, t+\frac{w_3}{2}\right),\ w_3 = \frac{4\pi}{2s-1}\right\}$ перепишемо так:

$$2\mu_1(t) = \int_0^{\pi} \{g(\xi, t-\xi) + g(\xi, t+\xi)\}\, d\xi. \tag{15}$$

Отже, формула (12) в класі функцій $g \in C_\pi \cap \tilde{A}_3$ має вигляд

$$(R_3^{4\pi} g)(x,t) =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-x}^{t+x} (g(\xi, \theta-\xi) + g(\xi, \theta+\xi))\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{x} d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau, \tag{16}$$

де $R_3^{4\pi}$ — нове позначення оператора R_3 у просторі $\tilde{A}_3$. Після відповідних перетворень рівність (16) запишемо так:

$$(R_3^{4\pi} g)(x,t) =$$

$$= (Sg)(x,t) + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau \equiv (Sg)(x,t) + (Zg)(x,t),$$

де S — оператор, визначений формулою (4).

Справедлива така теорема.

Теорема 5. *Якщо* $g \in G_{\pi t} \cap \tilde{A}_3$, *то функція* $u \in R_3^{4\pi} g = Sg + Zg$ *є єдиною функцією із простору* $C_\pi^{2,2} \cap \tilde{A}_3$, *яка задовольняє умови* (1)–(3), *причому*

$$\| u(x,t) \|_{C_\pi} \le \pi^2 \| g(x,t) \|_{C_\pi},$$

$$\| u_t(x,t) \|_{C_\pi} \le \pi \| g(x,t) \|_{C_\pi}, \quad \| u_x(x,t) \|_{C_\pi} \le \pi \| g(x,t) \|_{C_\pi}.$$

Доведення теореми 5 аналогічне доведенню теореми 2.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
3. *Vejvoda O., Hartman L., Lovicar H. et al.* Partial differential equations: Time periodic solutions // Alphen aan. Rijn. – Sijthoff: Nordhoff, 1981. – 358 + XIII p.
4. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П.* О периодических решениях волновых уравнений второго порядка. V // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 8. – С. 1115–1121.
5. *Хома Л. Г., Хома Н. Г.* Про властивість розв'язків однієї крайової задачі // Допов. НАН України. – 1994. – № 8. – С. 1240–1243.
6. *Хома Н. Г.* Простори розв'язків однієї крайової задачі // Там же. – 1996. – № 1. – С. 30–32.
7. *Хома Л. Г., Хома Н. Г., Петрівський Я. Б.* Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі // Волин. мат. вісн. – 1995. – Вип. 2. – С. 179–180.
8. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения: связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.

Одержано 14.01.97,
після доопрацювання — 31.08.98