УДК 517.9

Фам Нгок Бой, Нгуен Тхе Хоан (Ханой. ун-т, Вьетнам)

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Reduction theorem is proved for linear differential equations in the Banach space for the case where the convergence is strong. This result is used to obtain necessary and sufficient conditions of the continuous dependence of solutions on a parameter.

Доведено теорему редукції для лінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі для випадку, коли збіжність є сильною. Цей результат використовується для одержання необхідних та достатніх умов неперервної залежності розв'язків від параметра.

1. Введение. Обозначим через E банахово пространство и через $L[E]$ пространство линейных непрерывных операторов в E. Пусть $X_n(t)$, $X(t)$, $Y_n(t)$ — соответственно операторы Коши для линейных дифференциальных уравнений в E:

$$\frac{dx_n}{dt} = [A(t)+R_n(t)]x_n, \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2}$$

$$\frac{dy_n}{dt} = R_n(t)y_n, \tag{3}$$

$X_n(0)=X(0)=Y_n(0)=I$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; I — единичный оператор в E. Будем предполагать, что $A(t)$, $R_n(t)$ — сильно непрерывные на $[0, T]$ операторы [1]. В работе [2] была доказана следующая так называемая теорема редукции.

Теорема 1. *При $n \to \infty$ соотношение*

$$X_n(t) \Rightarrow X(t) \text{ в } L[E]$$

эквивалентно соотношению

$$Y_n(t) \Rightarrow I \text{ в } L[E].$$

Эта теорема была использована многими авторами (см., например, [3, 4]) для изучения непрерывной зависимости решений от параметра. Некоторое ее обобщение на нелинейный случай было дано в [5]. Отметим, что для случая банахова пространства наибольший интерес представляет не сходимость по норме операторов, а сильная сходимость, чем мы и займемся.

Для дальнейшего изложения нам необходимы некоторые известные предложения из функционального анализа (см., например, [1, 6, 7]).

Предложение 1. *Если последовательность линейных непрерывных в E операторов $\{A_n\}$ сильно сходится, то последовательность их норм $\{\|A_n\|\}$ равномерно по n ограничена.*

Предложение 2. *Если последовательность линейных операторов $\{A_n(t)\}$ сильно и равномерно по $t \in [0, T]$ сходится, то последовательность $\{A_n(t)x\}$, где x пробегает компактное в E множество Q, сходится равномерно по $t \in [0, T]$ и по $x \in Q$. В частности, если $x(t)$ — непрерывная по $t \in [0, T]$ функция со значениями в E, то последовательность $\{A_n(t)x(t)\}$ сходится равномерно по $t \in [0, T]$.*

2. Теорема редукции. Введем следующее обозначение: символ $A_n(t) \overset{c}{\Rightarrow}$

$\overset{c}{\Rightarrow} A(t)$ означает, что последовательность операторов $A_n(t)$ равномерно по $t \in$ $\in [0, T]$ сильно сходится к $A(t)$.

Теорема 2. *Пара соотношений*

$$X_n(t) \overset{c}{\Rightarrow} X(t), \tag{4}$$

$$X_n^{-1}(t) \overset{c}{\Rightarrow} X^{-1}(t) \tag{5}$$

эквивалентна паре соотношений

$$Y_n(t) \overset{c}{\Rightarrow} I, \tag{6}$$

$$Y_n^{-1}(t) \overset{c}{\Rightarrow} I. \tag{7}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполнены соотношения (6), (7). Согласно предложению 1

$$\| Y_n(t) \| \le M_1, \quad \| Y_n^{-1}(t) \| \le M_1, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{8}$$

Положим

$$Z_n(t) = X_n^{-1}(t) Y_n(t) X(t).$$

Простым вычислением легко проверяется, что

$$\dot{Z}_n(t) = X_n^{-1}(t) Y_n(t) A(t) X(t) - X_n^{-1}(t) A(t) Y_n(t) X(t).$$

Обозначая

$$G_n(t) = X^{-1}(t) A(t) X(t) - X^{-1}(t) Y_n^{-1}(t) A(t) Y_n(t) X(t),$$

имеем

$$\dot{Z}_n(t) = Z_n(t) G_n(t), \quad Z_n(0) = I. \tag{9}$$

В силу (8) и предложения 1 существует постоянная $M_2 > 0$ такая, что

$$\| G_n(t) \| \le M_2, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{10}$$

Из (9), (10) получаем

$$\| Z_n(t) \| \le M_3, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{11}$$

Так как

$$\| X_n^{-1}(t) \| = \| Z_n(t) X^{-1}(t) Y_n^{-1}(t) \| \le \| Z_n(t) \| \| X^{-1}(t) \| \| Y_n^{-1}(t) \|,$$

на основании (8), (11) имеем

$$\| X_n^{-1}(t) \| \le M_4, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{12}$$

Поскольку

$$\dot{Z}_n^{-1}(t) = -G_n(t) Z_n^{-1}(t), \quad Z_n^{-1}(0) = I,$$

в силу (10) опять получаем

$$\| Z_n^{-1}(t) \| \le M_5, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T],$$

откуда

$$\| X_n(t) \| = \| Y_n(t) X(t) Z_n^{-1}(t) \| \le M_6, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{13}$$

С другой стороны, для каждого $x_0 \in E$

$$\dot{Z}_n(t) x_0 = F_n(t) x_0,$$

где

$$F_n(t) = X_n^{-1}(t)Y_n(t)A(t)X(t) - X_n^{-1}(t)A(t)Y_n(t)X(t).$$

Следовательно,

$$\|F_n(t)x_0\| \le \|X_n^{-1}(t)Y_n(t)A(t)X(t)x_0 - X_n^{-1}(t)A(t)X(t)x_0\| +$$
$$+ \|X_n^{-1}(t)A(t)X(t)x_0 - X_n^{-1}(t)A(t)Y_n(t)X(t)x_0\| \le$$
$$\le \|X_n^{-1}(t)\| \|(Y_n(t) - I)A(t)X(t)x_0\| +$$
$$+ \|X_n^{-1}(t)A(t)\| \|(Y_n(t) - I)X(t)x_0\|.$$

На основании (12) и предложения 2 отсюда заключаем, что $\|F_n(t)x_0\|$ равномерно по $t \in [0, T]$ стремится к нулю.

Так как

$$Z_n(t)x_0 = x_0 + \int_0^t F_n(\tau)x_0\,d\tau,$$

при $n \ge N(\varepsilon)$ имеем

$$\|Z_n(t)x_0 - x_0\| \le \varepsilon T.$$

Это означает, что

$$Z_n(t) \overset{c}{\Rightarrow} I \tag{14}$$

или

$$X_n^{-1}(t)Y_n(t)X(t) \overset{c}{\Rightarrow} I.$$

Поскольку

$$\|X_n^{-1}(t)Y_n(t)X(t)x_0 - X_n^{-1}(t)X(t)x_0\| \le \|X_n^{-1}(t)\| \|(Y_n(t) - I)A(t)X(t)x_0\|,$$

на основании (12) и предложения 2 получаем

$$\|X_n^{-1}(t)Y_n(t)X(t)x_0 - X_n^{-1}(t)X(t)x_0\| \le \varepsilon \text{ при } n \ge N(\varepsilon).$$

Отсюда и из (14) следует, что

$$X_n^{-1}(t)X(t) \overset{c}{\Rightarrow} I.$$

Тогда из (13) и неравенства

$$\|X_n(t)x_0 - X(t)x_0\| \le \|X_n(t)\| \|(X_n^{-1}(t)X(t) - I)x_0\|$$

получаем соотношение (4).

Покажем теперь, что выполняется соотношение (5). Имеем

$$X_n^{-1}(t)x_0 = Z_n(t)X^{-1}(t)Y_n^{-1}(t)x_0.$$

Следовательно,

$$\|X_n^{-1}(t)x_0 - X^{-1}(t)x_0\| \le \|Z_n(t)X^{-1}(t)Y_n^{-1}(t)x_0 - Z_n(t)X^{-1}(t)x_0\| +$$
$$+ \|Z_n(t)X^{-1}(t)x_0 - X^{-1}(t)x_0\| \le$$
$$\le \|Z_n(t)\| \|X^{-1}(t)\| \|(Y_n^{-1}(t) - I)x_0\| + \|(Z_n(t) - I)X^{-1}(t)x_0\|.$$

Отсюда на основании (14) и предложений 1, 2 приходим к виводу, что выполняется соотношение (5). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть выполняются соотношения (4), (5). Тогда легко проверяется, что

$$X(t)X_n^{-1}(t) \overset{c}{\Rightarrow} I, \tag{15}$$

$$X_n(t)X^{-1}(t) \overset{c}{\Rightarrow} I. \tag{16}$$

Покажем сначала, что

$$\| Y_n(t) \| \le M_6, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{17}$$

Для этого положим

$$U_n(t) = Y_n^{-1}(t)X_n(t)X^{-1}(t).$$

Непосредственным вычислением доказывается, что $U_n(t)$ — решение задачи

$$U_n(t) = U_n(t)\Phi_n(t), \quad U_n(0) = I, \tag{18}$$

где

$$\Phi_n(t) = X(t)X_n^{-1}(t)A(t)X_n(t)X^{-1}(t) - A(t).$$

Из (15), (16) и предложения 1 следует

$$X(t)X_n^{-1}(t) \le M_7, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T], \tag{19}$$

$$X(t)X_n^{-1}(t) \le M_8, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{20}$$

Следовательно,

$$\| \Phi_n(t) \| \le M_9, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{21}$$

Из соотношений (18), (21) и леммы Гронуолла – Беллмана имеем

$$\| U_n(t) \| \le M_{10}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{22}$$

Поскольку

$$\| Y_n^{-1}(t) \| = \| U_n(t)X(t)X_n^{-1}(t) \| \le \| U_n(t) \| \, \| X(t)X_n^{-1}(t) \|,$$

из (19), (22) получаем

$$\| Y_n^{-1}(t) \| \le M_{11}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{23}$$

Пусть $x_0 \in E$ — произвольный элемент, тогда

$$\| U_n(t)x_0 \| \le \| Y_n^{-1}(t)A(t)X_n(t)X^{-1}(t)x_0 - Y_n^{-1}(t)X_n(t)X^{-1}(t)A(t)x_0 \| \le$$

$$\le \| Y_n^{-1}(t) \| \, \| A(t) \| \, \| (X_n(t)X^{-1}(t) - I)x_0 \| +$$

$$+ \| Y_n^{-1}(t) \| \, \| (X_n(t)X^{-1}(t) - I)A(t)x_0 \|.$$

Отсюда с учетом (16), (23) и предложения 2 имеем

$$U_n(t) \overset{c}{\Rightarrow} 0,$$

а потому

$$U_n(t) \overset{c}{\Rightarrow} I. \tag{24}$$

Так как

$$\| Y_n^{-1}(t)x_0 - U_n(t)x_0 \| = \| Y_n^{-1}(t)x_0 - Y_n^{-1}(t)X_n(t)X^{-1}(t)x_0 \| \le$$

$$\le \| Y_n^{-1}(t) \| \, \| (X_n(t)X^{-1}(t) - I)x_0 \|,$$

на основании (16), (23), (24) приходим к выводу, что выполняется соотношение (7). Поскольку $U_n^{-1}(t)$ — решение сопряженного с (18) уравнения, то из (21) и леммы Гронуоллла – Беллмана получаем оценку

$$\| U_n^{-1}(t) \| \leq M_{12}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{25}$$

Учитывая то, что

$$Y_n(t)x_0 = X_n(t)X^{-1}(t)U_n^{-1}(t),$$

из (25) и (20) имеем

$$\| Y_n(t) \| \leq M_{13}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{26}$$

Из соотношений (7), (26) и неравенства

$$\| Y_n(t)x_0 - x_0 \| \leq \| Y_n(t) \| \| Y_n^{-1}(t)x_0 - x_0 \|$$

следует справедливость соотношения (6). Теорема доказана.

Замечание. Так как в $L(E)$ соотношение

$$X_n(t) \Rightarrow X(t)$$

эквивалентно соотношению

$$X_n^{-1}(t) \Rightarrow X^{-1}(t),$$

то теорема 2 является обобщением теоремы 1.

3. Следствия. Приведем результаты, которые могут быть получены из теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть*

$$\int_0^T \| R_n(\tau) \| d\tau \leq c < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{27}$$

Тогда соотношение (4) *эквивалентно соотношению* (6).

Действительно, с помощью леммы Гронуолла – Беллмана из (27) получаем

$$\| X_n(t) \| \leq M,$$

$$\| X_n^{-1}(t) \| \leq M, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, T]. \tag{28}$$

Предположим, что (4) выполнено; тогда из предложения 2 следует, что

$$X_n(t)X^{-1}(t) \overset{c}{\Rightarrow} I. \tag{29}$$

Поскольку

$$\| X(t)X_n^{-1}(t)x_0 - x_0 \| = \| X(t)X_n^{-1}(t)x_0 - X(t)X_n^{-1}(t)X_n(t)X^{-1}(t)x_0 \| \leq$$
$$\leq \| X_n(t) \| \| X_n^{-1}(t) \| \| X_n(t)X^{-1}(t)x_0 - x_0 \|, \tag{30}$$

соотношения (28) – (30) показывают, что

$$X(t)X_n^{-1}(t) \overset{c}{\Rightarrow} I. \tag{31}$$

Наконец, так как

$$\| X_n^{-1}(t)x_0 - X^{-1}(t)x_0 \| = \| X^{-1}(t)X(t)X_n^{-1}(t)x_0 - X^{-1}(t)x_0 \| \leq$$
$$\leq \| X^{-1}(t) \| \| X(t)X_n^{-1}(t)x_0 - x_0 \|,$$

из (31) следует справедливость (5). Из соотношений (4), (5) и теоремы 2 следует (6).

Аналогично доказывается, что из (6) следует (4).

Теорема 4. *Предположим, что условие* (27) *выполняется. Тогда решение* $x_n(t)$ $(x_n(0) = x_0)$ *уравнения* (1) *равномерно по* $t \in [0, T]$ *сходится к решению* $x(t)$ $(x(0) = x_0)$ *уравнения* (2) *тогда и только тогда, когда*

$$\tilde{R}_n(t) = \int_0^1 R_n(\tau)\,d\tau \overset{c}{\rightrightarrows} 0.$$

Доказательство. Как известно, любое решение $x_n(t)$ $(x_n(0) = x_0)$ уравнения (1) имеет вид

$$x_n(t) = X_n(t)x_0.$$

Следовательно, предположение, что $x_n(t)$ равномерно на $[0, T]$ сходится к $x(t)$ $(x(0) = x_0)$, влечет за собой условие (4). В свою очередь, из соотношений (4), (27) следует справедливость соотношения (5). Тогда, согласно теореме 2, выполняется соотношение (6).

С другой стороны,

$$Y_n(t) - I = \int_0^t R_n(\tau)Y_n(\tau)\,d\tau = \tilde{R}_n(t) + \int_0^t R_n(\tau)[Y_n(\tau) - I]\,d\tau. \tag{32}$$

Отсюда

$$\left\| \tilde{R}_n(t)x_0 \right\| \le \| Y_n(t)x_0 - x_0 \| + \int_0^t \| R_n(\tau)x_0 \| \| (Y_n(\tau) - I)x_0 \| \,d\tau. \tag{33}$$

Соотношения (6), (27), (33) и лемма Гронуолла – Беллмана показывают, что

$$\tilde{R}_n(t) \overset{c}{\rightrightarrows} 0,$$

т. е. *необходимость* доказана.

Докажем теперь *достаточность*. Пусть условие (4) выполняется. Из (32) имеем

$$\| (Y_n(t) - I)x_0 \| \le \left\| \tilde{R}_n(t)x_0 \right\| + \int_0^t \| R_n(\tau) \| \| (Y_n(\tau) - I)x_0 \| \,d\tau.$$

Отсюда и из леммы Гронуолла – Беллмана получаем

$$\| (Y_n(t) - I)x_0 \| \le \varepsilon e^c \quad \text{при } t \ge N(\varepsilon),$$

что означает справедливость соотношения (6). Применяя теорему 3, заключаем, что справедливо соотношение (4), т. е. любое решение $x_n(t)$ $(x_n(0) = x_0)$ уравнения (1) равномерно на $[0, T]$ сходится к решению $x(t)$ $(x(0) = x_0)$ уравнения (2). Теорема доказана.

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1968. – 434 с.
2. *Левин А. Ю.* Некоторые вопросы асимптотики для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1975. – **225**, № 3. – С. 503–506.
3. *Забрейко П. П., Костадинов С. И., Нгуен Хонг Тхай.* О непрерывной зависимости от параметра решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 12. – С. 2056–2063.
4. *Нгуен Тхе Хоан.* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений // Там же. – 1993. – **29**, № 6. – С. 970–976.
5. *Strauss A., Yorke J. A.* Linear perturbations of ordinary differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – **26**. – P. 255–260.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
7. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 519 с.

Получено 09.09.96