УДК 513.88 + 519.4

О. В. Лопотко (Львов. лесотехн. ун-т)

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АДДИТИВНОЙ ГРУППЫ ЯДЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА САМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

We prove theorems on integral representations of additive real nuclear space in terms of self-adjoint operators. We assume that algebraic relations take place in a dense invariant set of entire vectors.

Доведено теореми про інтегральні зображення адитивної групи дійсного ядерного простору самоспряженими операторами. Припускається, що алгебраїчні співвідношення мають місце на щільній, інваріантній множині цілих векторів.

Классическая теорема С. Надя – Хилле (см. [1]) дает интегральное представление для группы R^1 самосопряженных ограниченных операторов. В настоящей статье приведено ее обобщение на аддитивную группу, вообще говоря, неограниченных самосопряженных операторов, осуществляющих представление аддитивной группы вещественного ядерного пространства X.

При определении представлений алгебраических структур неограниченными операторами возможны разночтения. Для представлений R^1 (или R^n) обобщения теоремы С. Надя – Хилле на неограниченные операторы см., например, в [2]. В п. 1 интегральные представления доказываются для семейств неограниченных самосопряженных операторов (A_t), $t \in R^1$, таких, что групповые соотношения имеют место на плотной инвариантной относительно семейства области векторов, целых для операторов семейства. Вариант теоремы типа С. Надя – Хилле для представлений аддитивной группы ядерного пространства неограниченными самосопряженными операторами, для которых существует соответствующее оснащение, см. в [3] и приведенной там библиографии. В п. 2 теорема такого типа доказывается в предположении, что алгебраические соотношения имеют место на плотной инвариантной области целых векторов. Доказательство основывается на бесконечномерном обобщении классической теоремы С. Н. Бернштейна [4].

1. Пусть (A_t), $t \in R^1$, — семейство самосопряженных, вообще говоря, неограниченных операторов в сепарабельном, гильбертовом пространстве H, $E(\lambda)$ — некоторое разложение единицы.

Теорема 1. *Для того чтобы для семейства* (A_t), $t \in R^1$, *имело место представление*

$$A_t = \int\limits_{R^1} e^{\lambda t} d\,E(\lambda), \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало линейное плотное в H *множество* $F \subset \bigcap_{t \in R^1} \mathrm{Dom}\,(A_t)$, *инвариантное относительно операторов семейства, со свойствами для* $f \in F$:

а) $A_{t+s} f = A_t \cdot A_s f$, $A_0 = I$;

б) $A_t f$ *сильно непрерывна по* t;

в) $\|A_t f\| \le c_f e^{N_f |t|}$ *с некоторыми постоянными* c_f, N_f.

Разложение единицы $E(\cdot)$ *на* R^1 *определяется однозначно.*

Доказательство. *Достаточность.* Из свойств а), в) следует, что векторы из множества F — целые векторы оператора (A_t), $t \in R^1$, т. е. $F \subset \subset \bigcap_{t \in R^1} H^c(A_t)$ и поэтому (см., например, [3]), операторы (A_t), $t \in R^1$, на F

существенно самосопряженные. Затем с помощью свойства а) доказывается, что самосопряженные операторы коммутируют, т. е. коммутируют их спектральные проекторы (см., например, [3]). Если существует циклический вектор Ω семейства (A_t), $t \in R^1$, и $\Omega \in F$, то замкнутая линейная оболочка (з. л. о.) $\{A_t\Omega\} = H$, и экспоненциально выпуклая функция $k(t) = (A_t\Omega, \Omega)$ благодаря свойству в) удовлетворяет оценке $|k(t)| \le ce^{N|t|}$, $c, N > 0$. Поэтому она в силу теоремы Бернштейна допускает интегральное представление

$$k(t) = \int_{R^1} e^{\lambda t} d\rho(\lambda), \qquad t \in R^1.$$

Тогда отображение

$$H \ni \sum_{k=1}^{n} \xi_k A_{t_k}\Omega \to \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{\lambda t_k} \in L_2\left(R^1, d\rho(\lambda)\right)$$

— изометрия плотных множеств, а ее замыкание — унитарный оператор U: $H \to L_2\left(R^1, d\rho(\lambda)\right)$ такой, что $A_t = U^* Q_{e^{\lambda t}} U$. Отсюда с учетом интегрального представления семейства $\left\{Q_{e^{\lambda t}}\right\}$ получаем интегральное представление (1) семейства (A_t), $t \in R^1$.

Если циклического вектора нет, то, выбрав ортонормированный базис в H $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $e_n \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, и положив $e_1 = \Omega_1$, $H_1 =$ з. л. о. $\{A_t\Omega_1\}$, P_{H_1} — ортопроектор на H_1, получим, что операторы P_{H_1} и A_t, $t \in R^1$, коммутируют, т. е. P_{H_1} коммутирует со всеми спектральными проекторами A_t, $t \in R^1$. Если $H_1 \neq H$, то выберем первый вектор $e_{k_1} \notin H_1$ и положим $\Omega_2 = e_{k_1} - P_{H_1} e_k$ (Ω_2 — также целый вектор для операторов A_t, $t \in R^1$). Обозначим через P_{H_2} ортопроектор на H_2. Продолжая эту процедуру, получаем $H = \oplus \sum H_k$ и в каждом H_k имеет место представление

$$A_t = \int_{R^1} e^{\lambda t} d\, E_k(\lambda), \tag{2}$$

где $E_k(\Delta) = U_k^* Q_{X_\Delta(\cdot)} U_k$, $X_\Delta(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $\Delta \in R^1$, $U_k : H_k \to L_2\left(R^1, d\rho_k(\lambda)\right)$, мера $\rho_k(\cdot)$ определена из представления $(A_t e_k, e_k) = \int_{R^1} e^{\lambda t} d\rho_k(\lambda)$, $t \in R^1$. Из представления (2) следует (1).

Необходимость. Если положить $F = \bigcup_{a \in R^1} E([-a, a])\, H \ni f$ и $A_{t,a} = \int_{-a}^{a} e^{\lambda t} d\, E(\lambda)$, то из соотношения

$$A_{t+s,a} f = \left(\int_{-a}^{a} e^{\lambda(t+s)} d\, E(\lambda)\right) f = \left(\int_{-a}^{a} e^{\lambda t} d\, E(\lambda)\right) \times \left(\int_{-a}^{a} e^{\lambda s} d\, E(\lambda)\right) f =$$

$$= A_{t,a} A_{s,a} f = A_t \cdot A_s f$$

следует свойство а). Воспользовавшись теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, докажем свойство б). Из оценки $\| A_t f \| = \| A_{t,a} f \| \le c_f e^{a|t|} = c_f e^{N_f |t|}$ следует свойство в).

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы для семейства* (A_t), $t \in R^n$, *имело место представление*

$$A_t = \int_{R^n} e^{\lambda t} dE(\lambda),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало линейное плотное в H *множество* $F \subset \bigcap_{t \in R^n} \mathrm{Dom}\,(A_t)$, *инвариантное относительно операторов семейства, со свойствами для* $f \in F$:

а) $A_{t+s} f = A_t \cdot A_s f$, $A_0 = I$;

б) $A_t f$ *сильно непрерывна по* t;

в) $\|A_t f\| \le c_f e^{N_f |t|}$ (c_f, N_f — *некоторые константы*).

Разложение единицы $E(\cdot)$ *на* R^n *определяется однозначно.*

2. Пусть теперь заданы ядерное вещественное пространство $X = \mathrm{pr}\lim X_\tau$, $\tau \in T$, где X_τ — соответствующие вещественные гильбертовы пространства, цепочка

$$X' = \bigcup_{\tau \in T} X_{-\tau} \supset H_0 \supset X = \bigcap_{\tau \in T} X_\tau$$

и семейство самосопряженных неограниченных операторов (A_t), $t \in X$.

Теорема 3. *Для того чтобы для семейства* (A_t), $t \in X$, *имело место представление*

$$A_t = \int_{X'} e^{(\lambda, t)_{H_0}} dE(\lambda),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало плотное в H *множество* $F \subset \bigcap_{t \in X} \mathrm{Dom}\,(A_t)$, *инвариантное относительно операторов семейства, со свойствами для* $f \in F$:

а) $A_{t+s} f = A_t \cdot A_s f$, $A_0 = I$;

б) $A_t f$ *сильно непрерывна по* $t \in X$;

в) *существует* $\tau \in T$ *такой, что* $\|A_t f\| \le c_f e^{N_f \|t\|_{X_\tau}}$ *с некоторыми постоянными* c_f, N_f.

Разложение единицы $E(\cdot)$ *на* X' *определяется однозначно.*

Доказательство *достаточности* проводится по схеме доказательства теоремы 1, с учетом того, что экспоненциально выпуклая функция на X имеет единственное представление $k(t) = \int_{X'} e^{(\lambda, t)_{H_0}} d\rho(\lambda)$ (см. [4]).

Докажем *необходимость*. Возьмем $F = \bigcup_{n=1, \tau \in X}^{\infty} F_{\tau, n}$, где $F_{\tau, n} = E(S_{-\tau}(n))H$, а $S_{-\tau}(n) = \{y \in X_{-\tau} \mid \|y\|_{X_{-\tau}} \le n\}$. Введем операторы $A_{t, \tau, n} = \int_{S_{-\tau}(n)} e^{(\lambda, t)_{H_0}} dE(\lambda)$. Тогда для $f \in F_{\tau, n} \subset F$ из соотношения

$$A_{t+s} f = \int_{S_{-\tau}(n)} e^{(\lambda, t+s)_{H_0}} dE(\lambda) f = \int_{S_{-\tau}(n)} e^{(\lambda, t)_{H_0}} dE(\lambda) \times \int_{S_{-\tau}(n)} e^{(\lambda, s)_{H_0}} dE(\lambda) f =$$

$$= A_{t, \tau, n} \cdot A_{s, \tau, n} f = A_t \cdot A_s f$$

следует свойство а), из теоремы Лебега — свойство б), а из оценки $\| A_t f \| = \| A_{t,\tau,n} f \| \le c_f e^{N_f \| t \|_{X_{-\tau}}}$ — свойство в).

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.
2. *Devinatz A.* A note on semigroups of unbounded self-adjoint operators // Proc. Amer. Math. Soc. – 1954. – **5**. – P. 101 – 102.
3. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
4. *Калюжный А. А.* Об интегральном представлении экспоненциально выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 3. – С. 370 – 373.

Получено 02.10.96,
после доработки — 22.09.97