УДК 517.44/445

Н. О. Вірченко, Ю. В. Січкар (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

ПРО ДЕЯКІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ З УЗАГАЛЬНЕНОЮ ФУНКЦІЄЮ ЛЕЖАНДРА

We solve and investigate an integral equation with the Legendre generalized associated function $P_k^{m,n}(z)$ by using fractional integro-differential calculus.

Розв'язано та досліджено інтегральне рівняння з узагальненою приєднаною функцією Лежандра $P_k^{m,n}(z)$ з використанням дробового інтегро-диференціального числення.

У роботі [1] досліджено деякі інтегральні оператори з узагальненою функцією Лежандра $P_k^{m,n}(z)$ [2], яка є одним з розв'язків диференціального рівняння

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left\{k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)}\right\}w = 0,$$

де z — комплексна змінна, k, m, n — комплексні параметри.

У роботі [2] одержано кілька зображень $P_k^{m,n}(z)$ за допомогою контурних інтегралів, основне з яких має вигляд

$$P_k^{m,n}(z) = \frac{e^{-\pi i\left(k-\frac{m-n}{2}\right)}}{4\pi \sin\left(k-\frac{m-n}{2}\right)\pi} \frac{\Gamma\left(k+\frac{m+n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(k-\frac{m-n}{2}-1\right)} \times$$

$$\times \frac{(z-1)^{m/2}(z+1)^{n/2}}{2^{k+(m-n)/2}} \oint\limits_{C(z+,\,1+,\,z-,\,1-)} F(t)\,dt,$$

де

$$F(t) \equiv \frac{(t-1)^{k-(m-n)/2}(t+1)^{k+(m-n)/2}}{(t-z)^{k+(m+n)/2+1}},$$

$$k+\frac{m+n}{2} \neq -1, -2, \ldots, \qquad k-\frac{m-n}{2} \notin Z,$$

а замкнений контур C належить t-площині.

Інше зображення через гіпергеометричну функцію Гаусса [3] має вигляд [2]

$$P_k^{m,n}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \frac{(z+1)^{n/2}}{(z-1)^{m/2}} F\left(k-\frac{m-n}{2}+1, -k-\frac{m-n}{2}; 1-m; \frac{1-z}{2}\right), \tag{1}$$

$$m \neq 1, 2, 3 \ldots .$$

Можна відмітити, що за умови $m = n$ узагальнена функція Лежандра $P_k^{m,n}(z)$ збігається з добре відомою асоційованою функцією Лежандра першого роду $P_k^m(z)$.

У [4] дробове інтегро-диференціальне числення застосовано для факторизації деяких нових інтегральних операторів з узагальненою функцією Лежандра у композицію дробових інтегралів (похідних) Рімана – Ліувілля I_{0+}^a та модифікованого оператора Лапласа $\Lambda_\pm$ [5]. Розгорнення згаданих операторів виконувалось за допомогою перетворення Мелліна [6] та теореми Слейтера [7]. Базуючись на результаті факторизації операторів [4], можна розв'язати деякі нові інтегральні рівняння.

Розглянемо детальніше розв'язання одного із таких інтегральних рівнянь:

$$\left({}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n} f\right)(x) = g(x), \tag{2}$$

де

$${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n} f(x) = \int\limits_0^x (x-t)^{-m/2} P_k^{m,n}\left(\frac{2x-t}{t}\right) f(t)\,dt.$$

З одержаної факторизації оператора ${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$

$${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n} f(x) = \begin{cases} 2^{(n-m)/2} x^{n/2} I_{0+}^{-k-(n+m)/2} x^{k+(m-n)/2} I_{0+}^{1+k+(n-m)/2} x^{-k} f(x); \\ 2^{(n-m)/2} x^{-n/2} I_{0+}^{1+k+(n-m)/2} x^{-1-k+(m+n)/2} I_{0+}^{-k-(n+m)/2} x^{k+1} f(x), \end{cases}$$

враховуючи вигляд оберненого оператора до оператора Рімана – Ліувілля I_{0+}^{a}, одержуємо таке зображення розв'язку:

$$f(x) = \begin{cases} P_1\colon\ 2^{(m-n)/2} x^k I_{0+}^{-1-k-(n-m)/2} x^{-k-(m-n)/2} I_{0+}^{k+(n+m)/2} x^{-n/2} g(x); \\ P_2\colon\ 2^{(m-n)/2} x^{-k-1} I_{0+}^{k+(n+m)/2} x^{1+k-(m+n)/2} I_{0+}^{-1-k-(n-m)/2} x^{n/2} g(x), \end{cases} \tag{3}$$

$$\operatorname{Re} m < 1.$$

Позначимо для зручності дві факторизації оператора ${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$ через Φ_1 та Φ_2, а відповідні їм розв'язки рівняння через P_1 та P_2.

Розкриття операторів як інтегралів чи похідних у композиції (3) залежить від умов, які задовольняють параметри: $-1-k-\frac{1}{2}(n-m) > (<)\ 0$, $k+\frac{1}{2}(n+m) > (<)\ 0$.

Коректність розв'язків, що зображені у вигляді композиції операторів дробового інтегро-диференціювання, залежить від простору, до якого належить функція правої частини рівняння, а простір, в свою чергу, визначається параметрами операторів у факторизації лівої частини рівняння. У цій роботі ми розглядаємо функції, задані на відрізку. Умови існування та єдиності розв'язку рівняння у цьому випадку мають досить розгалужену структуру завдяки широкій області визначення параметрів операторів дробового інтегро-диференціювання. Нижче ці умови зведено в теорему.

Теорема. *Нехай на інтервалі* $(0, b)$ *задано рівняння* (2), *де* $\operatorname{Re}(1-m) > 0$ *виконуються умови* A_i, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$A_1\colon \begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(1+k+\frac{1}{2}(n-m)\right) > 0,\ \ p\left(1-\operatorname{Re}\frac{1}{2}(n-m)\right) > 1, \\ p\left(2-\operatorname{Re}\frac{1}{2}(n+m)\right) > 1,\ \ p(1-\operatorname{Re}k) > 1; \end{array}$$

$$A_2\colon \begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(1+k+\frac{1}{2}(n-m)\right) < 0,\ \ p\left(2+\operatorname{Re}\frac{1}{2}(n-m)\right) > 1, \\ p(2+\operatorname{Re}k) > 1; \end{array}$$

$$A_3\colon \begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(-k-\frac{1}{2}(m+n)\right) > 0,\ \ p\left(1-\operatorname{Re}\frac{1}{2}(m+n)\right) > 1, \\ p\left(2+\operatorname{Re}\frac{1}{2}(n-m)\right) > 1,\ \ p(2+\operatorname{Re}k) > 1; \end{array}$$

$$A_4\colon \begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(-k-\frac{1}{2}(m+n)\right) < 0,\ \ p\left(2-\operatorname{Re}\frac{1}{2}(m+n)\right) > 1, \\ p(1-\operatorname{Re}k) > 1, \end{array}$$

а задана функція $g(x)$ *належить просторові* D_i:

$$D_1, D_3: \ x^{m/2} I_{0+}^{1-m}(L_{p,*}(0, b)),$$

$$D_2: \ x^{1+k+n/2} I_{0+}^{-k-(n-m)/2}(L_{p,*}(0, b)),$$

$$D_4: \ x^{-k-n/2} I_{0+}^{1+k+(n-m)/2}(L_{p,*}(0, b)), \qquad 1 \le p < \infty.$$

Тоді рівняння (2) *має єдиний розв'язок, який подається формулою* (3) *та належить просторові* C_i, *де*

$$C_1, C_3: \ L_p(0, b),$$

$$C_2: \ x^{1+k+(n-m)/2} I_{0+}^{-1-k-(n-m)/2}(L_{p,*}(0, b)),$$

$$C_4: \ x^{-k-(n+m)/2} I_{0+}^{k+(n+m)/2}(L_{p,*}(0, b)).$$

(Визначення просторів $L_{p,*}(a, b)$, $I_{0+}^{m(a)*}(L_p(0, b))$, $I_{0+}^{m(a)*}(L_{p,*}(0, b))$ та їх властивості можна знайти в [5]).

Доведення проведемо у два етапи.

Етап 1. Конкретизуємо області визначення та образи ${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$, Φ_1, Φ_2, а також з'ясуємо умови коректності запропонованих факторизацій.

Зобразимо Φ_1 та Φ_2 у вигляді, зручному для подальшого викладу

$$\Phi_1 = 2^{(n-m)/2} x^{1-m/2} \left(x^{-1+(m+n)/2} I_{0+}^{-k-(n+m)/2} x^{k+1} \right) \times$$
$$\times \left(x^{-1-(n-m)/2} I_{0+}^{1+k+(n-m)/2} x^{-k} \right) f(x),$$

$$\Phi_2 = 2^{(n-m)/2} x^{1-m/2} \left(x^{-1-(n-m)/2} I_{0+}^{1+k+(n-m)/2} x^{-k} \right) \times$$
$$\times \left(x^{-1+(m+n)/2} I_{0+}^{-k-(n+m)/2} x^{k+1} \right) f(x).$$

Як область визначення оператора Φ_1 можна взяти $L_p(0, b)$. Далі, із леми [5, с. 146] (нижче будемо називати її просто лемою) випливає, що за умови $p(1 - \operatorname{Re} k) > 1$ оператор Φ_1 діє на область

$$x^{1-m/2} \left(x^{-1+(m+n)/2} I_{0+}^{-k-(n+m)/2} x^{k+1} \right) \left(x^{-1-k-(n-m)/2} I_{0+}^{1+k+(n-m)/2} \right) \left(L_{p,*}(0, b) \right).$$

Вдруге застосовуючи лему, одержуємо ще одну умову на параметри: $p(1 - \operatorname{Re} 1/2(n-m)) > 1$ та образ $x^{m/2} I_{0+}^{1-m}(L_{p,*}(0, b))$, а також рівність $\Phi_1 = {}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$. У [5] доведено, що при $\operatorname{Re}(a - b) > 0$, $p \ge 1$, $p(1-a) > 1$ оператор $x^b I_{0+}^{a-b} x^{-a}$ обмежено діє із $L_p(0, b)$ в $L_p(0, b)$. Тому за умов $\operatorname{Re}(-k - 1/2(m + n)) > 0$, $\operatorname{Re}(1 + k + 1/2(n-m)) > 0$, $p \ge 1$, $p(1 - \operatorname{Re} k) > 1$, $p(2 + \operatorname{Re} k) > 1$ оператор Φ_1 обмежений в $L_p(0, b)$ як композиція обмежених операторів. На щільній в $L_p(0, b)$ множині ступінчастих функцій рівність $\Phi_1 = {}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$ можна перевірити безпосереднім обчисленням при $\operatorname{Re}(1-m) > 0$. Звідси випливає, що оператор ${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$ теж обмежений на цій щільній підмножині функцій, а отже, і на усьому $L_p(0, b)$. Тоді за теоремою Банаха (див. [8]) рівність $\Phi_1 = {}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$ виконується при згаданих вище умовах на усьому $L_p(0, b)$.

Зібравши одержані умови (умову $p(2 + \operatorname{Re} k) > 1$ можна відкинути, оскільки вона випливає з інших), одержимо, що оператори Φ_1 та ${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$ за умови A_1 діють обмежено із C_1 у D_1. Щоб виключити вказану вище додаткову до A_1 умову $\operatorname{Re}(-k - 1/2(m + n)) > 0$, розглянемо випадок, коли у першого оператора в Φ_1 від'ємний параметр, а у другого — додатний, а саме $\operatorname{Re}(-k - -1/2(m+n)) < 0$, $\operatorname{Re}(1+k+1/2(n-m)) > 0$. У цьому випадку область визначення та образ оператора Φ_1 збігаються з такими у першому випадку за тих же умов на параметри. Залишається довести рівність $\Phi_1 = {}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$. Використаємо зображення узагальненої функції Лежандра за допомогою гіпергеометричної фукції Гаусса (1) і, враховуючи властивості функції Гаусса [3], застосуємо теорему 1.5 з [5] для доведення обмеженості оператора ${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$ в $L_p(0, b)$, з якої випливають умови на параметри: $p(1 - \operatorname{Re} k) > 1$, $p(2 + \operatorname{Re} k) > 1$. Подіємо на ${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$ оператором $x^{-k-1} I_{0+}^{k+(n+m)/2} x^{-n/2}$, який також обмежений у $L_p(0, b)$ за умови $\operatorname{Re}(-k - 1/2(m+n)) < 0$ та додаткових умов $p \ge 1$, $p(2 - \operatorname{Re} 1/2(n + +m)) > 0$, і одержимо обмежену композицію. Безпосереднім її обчисленням неважко переконатися, що вона збігається з оператором $2^{(n-m)/2} x^{-1-(n-m)/2} I_{0+}^{1+k+(n-m)/2} x^{-k}$. Подіємо тепер на цю рівність оберненим оператором $x^{n/2} I_{0+}^{-k-(n+m)/2} x^{k+1}$ і одержимо $\Phi_1 = {}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$.

Перейдемо до випадку $\operatorname{Re}(1+k+1/2(n-m)) < 0$. З умови $\operatorname{Re}(1-m) > 0$ та припущення одержуємо $\operatorname{Re}(-k - 1/2(m+n)) > 0$, отже, випадок від'ємного параметра першого інтеграла розглядати немає необхідності. За лемою функція із простору C_2 за умови $p(2 + \operatorname{Re} 1/2(n-m)) > 1$ зображується у вигляді $f(x) = x^k I_{0+}^{-k-1-(n-m)/2} x^{1+(n-m)/2} \varphi(x)$, де $\varphi(x) \in L_p(0, b)$. Тоді існує дробова похідна $\varphi(x) = x^{-1-(n-m)/2} I_{0+}^{k+1+(n-m)/2} x^{-k} f(x)$ і за умови $p(2 + \operatorname{Re} 1/2(n-m)) > > 1$ оператор Φ_1 буде визначений та обмежений на вказаній множині C_2. Його значення $\Phi_1 = 2^{(n-m)/2} x^{n/2} I_{0+}^{-k-(n+m)/2} x^{k+1} \varphi(x)$ за лемою може бути подано у вигляді $x^{-1-(n-m)/2} I_{0+}^{k+1+(n-m)/2} h(x)$, $h(x) \in L_{p,*}(0, b)$. Звідси одержуємо умови та простори дії операторів при $i = 2$.

Для одержання результатів при $i = 3$, $i = 4$ повторюємо для Φ_2 попередні міркування.

Етап 2. На основі результатів першого етапу покажемо, що рівняння (2) має розв'язок у деяких класах функцій на відрізку та в кожному випадку він єдиний.

Ми виявили, що за певних умов на параметри має місце та чи інша факторизація оператора ${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$. У кожному з розглянутих на першому етапі випадків нам відома область визначення оператора і простір, на який він сюр'єктивно відображає свою область визначення. Це означає, що якщо праву частину — функцію $g(x)$ — вибираємо із вказаної області, на яку діє оператор ${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n}$, то рівняння ${}_s\boldsymbol{P}_k^{m,n} f(x) = g(x)$ однозначно розв'язуване шляхом послідовного обернення двох інтегро-диференціальних операторів, що входять у відповідну *даному* випадку факторизацію. Треба зауважити, що у кожному варіанті факторизація єдина, а на перетині областей визначення Φ_1 та Φ_1 збігаються. Звідси їх складові частини в композиції комутативні. Теорему доведено.

Розглянуті у цій роботі оператори та рівняння першого роду можуть знайти застосування у теорії інтегральних перетворень, а також у постановці, розв'язанні та дослідженні нових крайових задач для диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними, наприклад типу Ейлера – Пуассона – Дарбу, до якого, зокрема, в області гіперболічності зводяться рівняння з теорії крайових задач із зсувом [9] та ін.

1. *Вірченко Н. О.* Про інтегральні перетворення Бушмана – Ердеї // Допов. НАН України. Мат., природничі та техн. науки. – 1994. – № 9. – С. 46 – 49.

2. *Kuipers L., Meulenbeld B.* On a generalisation of Legender's associated differential equation I // Proc. Kon. ned. akad. wetensch. A. – 1957. – **60**, № 4. – P. 337 – 350.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 2-х т. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 296 с.
4. *Куевда Ю. В.* Факторизація деяких інтегральних операторів з узагальненою функцією Лежандра в ядрах у композицію дробових інтегро-диференціальних операторів // П'ята Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 16 – 18 травня 1996 р.). – Київ: Нац. техн. ун-т України „КПІ", 1996. – С. 217.
5. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
6. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 542 с.
7. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). – Минск: Наука и техника, 1978. – 310 с.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1986. – 496 с.
9. *Репин О. А.* Краевые задачи со смещением для уравнений параболического и смешанного типов. – Самара: Изд-во Саратов. ун-та (Самар. филиал), 1992. – 161 с.

Одержано 22.01.97,
після доопрацювання — 11.06.98