УДК 517.947

В. П. Бурский (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ЭКВИВАРИАНТНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПРИМЕРЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В КРУГЕ

Method for investigating the correctness of equivariant problem and the spectrum of corresponding operator is proposed.

Пропонується схема вивчення коректності еквіваріантної задачі та спектра відповідного оператора.

В настоящей работе предлагается схема изучения корректности эквивариантной граничной задачи и спектра ею порожденного оператора. На примере оператора Лапласа в круге показано, как именно условие корректности отсекает возможности появления точек непрерывного спектра оператора эквивариантной граничной задачи. Часть результатов анонсирована в работе [1]. Более общие граничные задачи для уравнения Лапласа в круге рассмотрены в работах [2, 3]. В работах [4 – 8] можно найти необходимые сведения из теории расширений и краевых задач. Эквивариантные граничные задачи в рамках теории расширений изучались в работе [9]. Схема изложения аналогична принятой в работе [10].

1. Пространство Коши и корректные граничные задачи. Пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$, являющейся гладким односторонним $(n-1)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$;

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha, \quad D^\alpha = \frac{(-i\partial)^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_n}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha\in\mathbb{Z}_+^n, \quad |\alpha| = \sum_k \alpha_k$$

— дифференциальная операция с комплексными коэффициентами из пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$;

$$\mathcal{L}^+ = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha(a_\alpha^*\cdot), \quad a_\alpha^* = \overline{a}_\alpha$$

— формально сопряженная дифференциальная операция; L_0 и L_0^+ — минимальные, а L и L^+ — максимальные операторы этих операций в $L_2(\Omega)$; $D(L_0)$, $D(L)$ и $D(L_0^+)$, $D(L^+)$ — их области определения; область определения $D(\tilde{L})$ оператора $\tilde{L}$ является замыканием пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$ в норме графика $\|u\|_L$. Рассмотрим следующие условия:

1) оператор $L_0: D(L_0)\to L_2(\Omega)$ имеет непрерывный левый обратный;

2) оператор $L_0^+: D(L_0^+)\to L_2(\Omega)$ имеет непрерывный левый обратный;

3) $\tilde{L} = (L_0^+)^*$;

4) $\tilde{L}^+ = (L_0)^*$.

Пространство Коши $C(L)$ определим как фактор $D(L)/D(L_0)$, а через $C(\ker L)$ будем обозначать $\Gamma(\ker L)$, где $\Gamma: D(L)\to C(L)$ — отображение факторизации.

Линейной однородной граничной задачей называется задача нахождения решения u соотношений

$$Lu = f, \quad \Gamma u\in B, \tag{1}$$

где B — линейное многообразие в $C(L)$. Граничное условие $\Gamma u \in B$ порождает подпространство $D(L_B) = \Gamma^{-1}(B)$ в пространстве $D(L)$ и оператор L_B, являющийся сужением оператора L на пространство $D(L_B)$ и расширением оператора L_0. Граничная задача называется корректно поставленной, а оператор L_B — разрешимым расширением оператора L_0, если оператор L_B: $D(L_B) \to L_2(\Omega)$ имеет непрерывный двусторонний обратный. Заметим, что условия 1, 2 эквивалентны существованию корректной граничной задачи для оператора L [4, 5]. Корректность граничной задачи (1) при этом означает разложение пространства Коши в прямую сумму $C(L) = C(\ker L) \oplus B$ [5].

В работах [10, 11] пространство Коши $C(L)$ в случае выполнения условия 3 характеризуется с помощью понятия L-следа, которое нам понадобится в дальнейшем. Оно основано на следующем утверждении.

Лемма 1. *Для любой пары функций w и φ из $H^m(\mathbb{R}^n)$ справедлива следующая формула Грина:*

$$[w, \varphi] \ := \ -\langle L(\theta_\Omega w) - \theta_\Omega L w, \varphi\rangle_{\mathbb{R}^n} \ = \ \sum_{q=0}^{m-1} \left\langle L_{(m-q-1)} w, \partial_\nu^q \varphi\right\rangle_{\partial\Omega} \ =$$

$$= \ \left\langle L_{\partial\Omega} w, \varphi\right\rangle_{\mathbb{R}^n} \ = \ -\left\langle w, L_{\partial\Omega}^{+} \varphi\right\rangle_{\mathbb{R}^n}, \qquad (2)$$

где θ_Ω — характеристическая функция области Ω,

$$\partial_\nu^q \varphi \ = \ \varphi_{\nu^q}^{(q)}, \qquad L_p \ = \ \sum_{s=0}^{p} L_\tau^{p,s} \partial_\nu^s$$

— оператор степени p, $L_\tau^{p,s}$ — некоторый линейный дифференциальный оператор по касательным направлениям τ с гладкими коэффициентами степени $p-s$.

Отметим, что если L^{+} — формально сопряженный оператор, то

$$[w, \ v] \ = \ \int_\Omega \left(Lw \cdot \overline{\varphi} - w \cdot \overline{L^{+}\varphi}\right) dx.$$

Заметим, что в эллиптическом случае распределения $f_q = (-1)^q \partial_\nu^q (\mu \cdot \delta_{\partial\Omega})$, $\mu \in$ $\in \mathcal{D}'(\partial\Omega)$, действующие по формуле $\left\langle f_q, \varphi\right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \left\langle \mu, \partial_\nu^q \varphi\right\rangle_{\partial\Omega}$, принято называть для $q = 0$ простым, а для $q = 1$ двойным слоем на $\partial\Omega$ с плотностью μ. Соответствующий потенциал получится сверткой f_q с фундаментальным решением G.

Пусть $J_{m,q}$: $H^{m-q-1/2}(\partial\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$, $q = 0, 1, \ldots, m-1$, — непрерывный оператор продолжения со свойством $\partial_\nu^p (J_{m,q}\psi)\big|_{\partial\Omega} = \delta_q^p \cdot \psi$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$. Подставим в (2) вместо φ функцию $J_{m,q}\psi$, а вместо w последовательность $\{w_k\} \in H^m(\mathbb{R}^n)$, сходящуюся к решению u уравнения $Lu = f$ в смысле нормы графика $\|w\|_{L_2(\Omega)} + \|Lw\|_{L_2(\Omega)}$. Левая часть равенства (2) будет стремиться к выражению

$$\int_\Omega \left(u\overline{L^{+} J_{m,q}\psi} - \overline{J_{m,q}\psi} \cdot f\right) dx,$$

линейному и непрерывному по $\psi \in H^{m-q-1/2}(\partial\Omega)$. Полученный функционал обозначим через $L_{(m-q-1)}u$. Распределение $L_{(p)}u$ будем называть p-м следом решения u на $\partial\Omega$, ассоциированным с оператором L, или просто p-м L-следом функции u на $\partial\Omega$.

Итак, мы видим, что L-следы функции из области определения $D(L)$ максимального оператора существуют и $L_{(p)}u \in H^{-m+q+1/2}(\partial\Omega)$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$ если $H^m(\Omega)$ плотно в $D(L)$. Главное свойство L-следов заключается в том, что все они равны нулю тогда и только тогда, когда они являются L-следами функции из области определения минимального оператора, что видно из формулы (2), расширенной на области определения максимального L^+ и минимального L_0 операторов. Это позволяет сузить их на пространство Коши, тем самым расширяя область определения явно заданного оператора $L_{\partial\Omega}$. Отмеченное вложение ассоциированных следов в пространство распределений

$$H^{(-m)}(\partial\Omega) = H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{-3/2}(\partial\Omega)\times\ldots\times H^{-m+1/2}(\partial\Omega)$$

позволяет считать пространство Коши $C(L)$ вложенным в пространство $H^{(-m)}(\partial\Omega)$. Кроме того, в терминах ассоциированных следов получаем следующий результат о связи следов функций из ядра [10].

Предложение 1. *Пусть выполнены условия* 3, 4. *Для того чтобы набор* $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ *L-следов некоторой функции из пространства* $D(L)$ *был набором L-следов решения u уравнения $Lu = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности* $v_k \in H^m(\mathbb{R}^n)$, *сходящейся в норме* $\|v\|_{L_2(\Omega)} + \left\|L^+v\right\|_{L_2(\Omega)}$ *к некоторому решению уравнения* $L^+v = 0$, *было выполнено условие*

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{q=0}^{m-1}\left\langle u_{m-q-1}, \partial_\nu^q v_k\right\rangle_{\partial\Omega} = 0.$$

2. Эквивариантные граничные задачи. Пусть G — некоторая группа Ли (в частности, дискретная), действующая в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Это означает, что имеется группа диффеоморфизмов $U_g\colon \overline{\Omega} \ni x \to g\cdot x = U_g(x) \in \overline{\Omega}$ области $\overline{\Omega}$ на себя, гладко зависящих от элемента группы G, и отображение $g \to U_g$ — гомоморфизм групп. При этом сужение диффеоморфизмов U_g на границу $\partial\Omega$ индуцирует гладкое действие группы G на границе $\partial\Omega$.

Действие группы G на области $\overline{\Omega}$ порождает представление группы G в функциональных пространствах: $(gu)(x) = u(g^{-1}x)$ (гомоморфизм группы G в группу обратимых операторов). Такое представление индуцируется на пространствах $C_0^\infty(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $H^{-m}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $H^{(m)}(\partial\Omega)$, $H^{(-m)}(\partial\Omega)$ и других.

Пусть дифференциальная операция $\mathcal{L}$ инвариантна относительно действия группы G, т. е. $g(\mathcal{L}u) = \mathcal{L}(gu)$. Тогда пространства $D(L)$, $D(L_0)$, $C(L)$, $\ker L$ инвариантны относительно действия группы G.

Если действие группы сохраняет объем области Ω, то скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ инвариантно относительно действия группы G, и поэтому представление группы G в этом пространстве унитарно. В этом случае операция $\mathcal{L}^+$ также инвариантна относительно действия группы G, инвариантны пространства $D(L^+)$, $D(L_0^+)$, $C(L^+)$, $\ker L^+$, а также операторы $\mathcal{L}_{\partial\Omega}$, $\mathcal{L}^+_{\partial\Omega}$.

Граничную задачу (1), порожденную подпространством $B \subset C(L)$ назовем G-инвариантной, если пространство B инвариантно относительно указанного действия группы G.

Будем считать, что действие группы на границе области Ω транзитивно, т. е. для любых двух точек x, y из $\partial\Omega$ найдется элемент $g \in \partial\Omega$ такой, что $gx = y$. Если в этом случае группа G компактна (и непрерывна), то, как известно (см., например, [12 – 14]), гильбертово пространство представления, состоящее из функций на $\partial\Omega$, разлагается в прямую сумму конечномерных инвариантных подпространств, в которых индуцируются неприводимые представления группы G. А если группа G еще и коммутативна, то неприводимые представления одномерны.

Пусть пространством представления группы G является пространство Коши $C(L)$. Это пространство, как мы видели, вкладывается в пространство $H^{(-m)}(\partial\Omega)$, поэтому для компактной группы имеем разложения

$$C(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus \tilde{C}^k, \qquad C(\ker L) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus C^k(\ker L), \qquad B = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus B^k.$$

Если рассматриваемая G-инвариантная граничная задача корректна, то разложение в прямую сумму $C(L) = C(\ker L) \oplus B$ влечет разложение в прямую сумму

$$C^k := C^k(\ker L) \oplus B^k = \sum_l \tilde{C}_l^k$$

с конечномерными проекторами $\Pi^k \colon C^k \to C^k(\ker L)$ вдоль B^k, и теперь проверка корректности G-инвариантной граничной задачи может быть сведена к проверке двух свойств: 1) $C^k(\ker L) \cap B^k = 0$; 2) $\exists\, \kappa > 0 \ \forall\, k \ \ \|\Pi^k\|_{C^k} < \kappa$.

Обозначим через L_λ оператор $L + \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Заметим, что пространство Коши $C(L_\lambda)$ не зависит от λ. Действительно, норма графика $\|\cdot\|_{L+\lambda^2}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_L$, поэтому

$$C(L_\lambda) = \frac{D(L+\lambda^2)}{D(L_0+\lambda^2)} = \frac{D(L)}{D(L_0)} = C(L)$$

в силу того, что $D(L) = D(L+\lambda^2)$, $D(L_0) = D(L_0+\lambda^2)$. Не зависят от λ и пространства C^k и B^k, но зависят от него пространства $C^k(\ker L_\lambda)$. При этом при некоторых значениях λ пересечение $C^k(\ker L_\lambda) \cap B^k$ не пусто. Каждое такое $-\lambda^2$ является собственным значением оператора L_B, а каждый вектор $v \in C^k(\ker L_\lambda) \cap B^k$ — соответствующим собственным вектором.

Проведем вычисления по этой схеме в простейшем случае. В качестве группы выберем группу поворотов плоскости $SO(2, \mathbb{R})$. Это компактная коммутативная группа, сохраняющая площадь.

Рассмотрим задачу (1), где $L = \tilde{\Delta}$ — максимальный оператор, порожденный оператором Лапласа Δ, инвариантный относительно действия группы, область $\Omega = K = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ — круг. Будем считать, что эта граничная задача G-инвариантна и корректна. А изучать будем ту же граничную задачу для уравнения Гельмгольца

$$L_\lambda v = \Delta v + \lambda^2 v = g, \qquad \Gamma v \in B,$$

где λ — комплексное число. Но вначале изучим пространство Коши $C(L)$ этого оператора и его подпространство $C(\ker L)$.

3. Пространство Коши оператора Гельмгольца. Ядро оператора Гельмгольца граничной задачи состоит из собственных функций максимального $L_2(\Omega)$-расширения оператора Лапласа, отвечающих собственному значению $-\lambda^2$ и принадлежащих пространству $\Gamma^{-1}B$. Пространство $C(\ker L_\lambda)$ раскладывается в прямую сумму подпространств $C^k(\ker L_\lambda)$. Предположение о существовании ограниченного обратного $(\Delta_B - \lambda^2)^{-1}$, как отмечалось выше, означает, что пространство Коши $C(L_\lambda) = C(\tilde{\Delta} + \lambda^2)$ раскладывается в топологическую прямую сумму $C(L_\lambda) = B \oplus C(\ker L_\lambda)$. Для оператора L_λ, который является дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами, выполнены условия $1-4$ (см. [5]).

Заметим, что $D(\Lambda_0) = D(\Lambda_0 + \lambda^2) = \mathring{H}^2(K)$ и

$$H^{1/2}(\partial K) \oplus H^{3/2}(\partial K) \subset C(L) \subset H^{-1/2}(\partial K) \oplus H^{-3/2}(\partial K).$$

Действительно, первое включение следует из того, что $H^2(K) \subset D(L)$ и $H^2(K) / \mathring{H}^2(K) \approx H^{1/2}(\partial K) \oplus H^{3/2}(\partial K)$, а второе — из того, что в пространство $H^{-1/2}(\partial K) \oplus H^{-3/2}(\partial K)$ вкладывается пространство $A(L)$ ассоциированных следов, для оператора Лапласа с точностью до знака совпадающих с граничными данными Коши $\psi_0 = u|_{\partial K} \in H^{-1/2}(\partial K)$, $\psi_1 = u'_\nu|_{\partial K} \in H^{-3/2}(\partial K)$. Инвариантные подпространства C^k одномерных неприводимых представлений группы вращений, которые фигурируют в разложении

$$C(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus C^k,$$

собранные по два, суть пространства $\mathbb{C}^2$ коэффициентов (a_k, b_k) разложения в ряд Фурье функций [13]

$$\psi_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\tau}, \quad \psi_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\tau}.$$

Заметим также, что подпространство $C(\ker L_\lambda)$, как следует из предложения 1, выделяется в пространстве $C(L_\lambda)$ условием

$$\int_{\partial K} \left[\psi_0 e^{-ix(\tau)\xi}(-i)x(\tau)\xi + \psi_1 e^{-ix(\tau)\xi}\right] d\tau = 0 \qquad \forall\, \xi \in \Lambda^\lambda, \tag{3}$$

где τ — угловая координата;

$$x(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau), \quad \psi_0 = u|_{\partial K} \in H^{-1/2}(\partial K), \quad \psi_1 = -u'_\nu|_{\partial K} \in H^{-3/2}(\partial K),$$

$$\Lambda^\lambda = \left\{\xi \in C^2 \,\middle|\, \xi_1^2 + \xi_2^2 = \lambda^2\right\}.$$

Условие (3) записывается в терминах коэффициентов Фурье a_k, b_k функций из $C(\ker L_\lambda)$ в виде

$$a_k \lambda J_k'(\lambda) + b_k J_k(\lambda) = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

где J_k — функция Бесселя I рода.

Действительно, условие (4) перепишем в виде

$$\int\limits_{\partial K} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\tau} \xi \cdot \nabla_\xi e^{-ix(\tau)\xi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\tau} e^{-ix(\tau)\xi} \right] d\tau = 0 \qquad \forall\, \xi \in \Lambda^\lambda,$$

откуда в силу того, что

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{-i(\xi_1 \cos\tau + \xi_2 \sin\tau) + ik\tau} d\tau = e^{ik\tau} J_k\left(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right), \tag{5}$$

получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_k \lambda J_k'(\lambda) + b_k J_k(\lambda)] e^{ik\tau} = 0 \qquad \forall\, \tau \in [0, 2\pi],$$

из чего следует (4).

Докажем (5). При $\lambda^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$ $\operatorname{tg}\varphi = \xi_2/\xi_1 \neq \pm i$, поэтому существует угол φ — решение уравнения $\operatorname{tg}\varphi = \xi_2/\xi_1$. Тогда

$$\xi_1 \cos\tau + \xi_2 \sin\tau = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cos(\tau - \varphi)$$

и мы получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} \exp\left(ik\left(\tau - \varphi\right) - i\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cos(\tau - \varphi)\right) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \exp\left(ik\tau - i\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \cos\tau\right) d\tau = J_k\left(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right).$$

Последнее равенство есть интегральное представление функции Бесселя [15], а первое — простое следствие интегральной теоремы Коши и периодичности подынтегральной функции (путь $(0, 2\pi)$ заменяется путем $(0, \varphi) + (\varphi, \varphi + 2\pi) + (\varphi + 2\pi, 2\pi)$, сумма интегралов по первому и третьему пути равна нулю, а во втором сделаем замену $\tau_{\text{новое}} = \tau - \varphi$).

Рассмотрим, наконец, случай $\lambda = 0$. Условие (3) запишем в виде

$$\int\limits_{\partial K} \left[\psi_0(x) x \cdot \xi Q'(x\xi) + \psi_1(x) Q(x \cdot \xi)\right] d\tau = 0 \qquad \forall\, \xi \in \Lambda_0, \qquad \forall\, Q \in \mathbb{C}[z],$$

откуда, подставляя $Q(z) = z^k$ (а также $Q = \bar{z}^k$ при $\xi = (1, -i)$, для коэффициентов Фурье получаем

$$b_k + k a_k = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

что, в частности, влечет непрерывность семейства $C^k(\ker L_\lambda)$ при $\lambda = 0$ и, значит, при всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

4. Спектр разрешимого поворотно-инвариантного расширения оператора Лапласа в круге. Пространство Коши, как мы выяснили, состоит из некоторых пар функций $(\psi_0, \psi_1) \in H^{-1/2}(\partial K) \oplus H^{-3/2}(\partial K)$, поэтому общее граничное условие должно иметь вид $Au\big|_{\partial K} + Bu_\nu'\big|_{\partial K} = 0$ с некоторыми операторами A, B. G-инвариантность этого граничного условия означает перестановочность операторов A и B с операторами представления, проще говоря, это инвариантность относительно поворота. Как известно, линейный оператор, инвариантный относительно сдвига в группе, представляется в виде свертки с некоторой функцией, поэтому операторы A и B должны быть сверточными. Этим соображениям для случая корректной поворотно-инвариантной граничной задачи можно придать строгость, если, например, использовать представление Вишика для общей корректной граничной задачи [4].

Будем поэтому рассматривать граничные задачи вида

$$\alpha * u\big|_{\partial K} + \beta * u'_\nu\big|_{\partial K} = 0, \tag{6}$$

где $\alpha = \sum \alpha_k e^{ik\tau}$, $\beta = \sum \beta_k e^{ik\tau}$ — функции на окружности ∂K произвольной гладкости, разложенные в ряды Фурье, $*$ — свертка на $\partial K: \alpha * \psi = \sum \alpha_k \psi_k e^{ik\tau}$. Будем предполагать, что

$$\frac{|\alpha_k|^2 + k^2|\beta_k|^2}{1+k^2} = 1 \qquad \forall\, k.$$

Условие (6) для коэффициентов Фурье функций ψ_0, ψ_1 из пространства B запишем в виде

$$\alpha_k a_k + \beta_k b_k = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Именно из-за такого вида условия (7) нам не важны гладкие свойства функций α и β, выражающиеся, как известно, в скорости роста или убывания коэффициентов Фурье. Более того, можно считать функции α и β формальными рядами Фурье, поскольку равенство (7) можно разделить на любое число, не равное нулю. По этой же причине можно считать, что

$$\frac{|\alpha_k|^2 + k^2|\beta_k|^2}{1+k^2} = 1.$$

Если же хотя бы при одном k и α_k, и β_k обращаются в нуль, то тогда $B \cap$ $\cap\, C(\ker L) \neq 0$ и задача (6) не корректна.

Обозначим через C^k образ вложения $i_k\colon \mathbb{C}^2 \to C(L)$, действующего по правилу $i_k\colon (a, b) \to (ae^{ik\tau}, be^{ik\tau})$. Граничная задача (6) задает подпространство B пространства $C(L)$, которое ввиду (7) пересекает каждое пространство C^k по прямой. Корректность задачи (6), т. е. разложение в прямую сумму $C(L_\lambda) = B \oplus C(\ker L_\lambda)$ в соответствии с условиями корректности из п.1, означает теперь, что

$$\exists\, A > 0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{Z} \qquad \left|\sin\left(B^k, C^k(\ker L_\lambda)\right)\right| > A. \tag{8}$$

Условие (8) запишем в виде (вещественная формула

$$\left|\sin(\bar{b}, \bar{c})\right| = \frac{\left|\det(\bar{b}, \bar{c})\right|}{\left|\bar{b}\right| |\bar{c}|}$$

справедлива и на комплексной плоскости)

$$\forall\, k \qquad \frac{|\beta_k \lambda J'_k(\lambda) - \alpha_k J_k(\lambda)|}{\sqrt{|\lambda J'_k(\lambda)|^2 + |J_k(\lambda)|^2}} > A > 0 \;\text{ при }\; \lambda \neq 0$$

и

$$\frac{|k\beta_k - \alpha_k|}{\sqrt{k^2+1}} > A > 0 \;\text{ при }\; \lambda = 0.$$

Последнее условие при $\lambda = 0$ выполнено, если задача (6) корректна для оператора Лапласа.

С учетом асимптотики по k $J_k(\lambda) \approx \lambda^k/k!$, $\lambda J_k'(\lambda) \approx \lambda^k/(k-1)!$ имеем

$$\exists A_1 > 0 \quad \forall k \quad \left| k\beta_k J_k^1(\lambda) - \alpha_k J_k^2(\lambda) \right| > A_1\sqrt{k^2+1}, \tag{9}$$

где

$$J_k^1(\lambda) = \frac{(k-1)!\,\lambda J_k'(\lambda)}{(\lambda/2)^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1,$$

$$J_k^2(\lambda) = \frac{k!\,J_k(\lambda)}{(\lambda/2)^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$

при $\lambda \neq 0$ и $J_k^1(0) = J_k^2(0) = 1$.

Нетрудно видеть, что при $\lambda = 0$ условие (9) эквивалентно следующему условию:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall k \quad |k\beta_k - \alpha_k| > \delta\sqrt{k^2+1}, \tag{10}$$

при $\lambda \neq 0$ из условия (9) вытекает условие

$$\forall k \quad \left| k\beta_k J_k^1(\lambda) - \alpha_k J_k^2(\lambda) \right| \neq 0, \tag{11}$$

а из условий (10) и (11) следует условие (9).

Действительно, пусть такого A_1 не существует, тогда по подпоследовательности k_l

$$\frac{\left(k_l\beta_{k_l} J_{k_l}^1(\lambda) - \alpha_{k_l} J_{k_l}^2(\lambda)\right)}{\sqrt{k^2+1}} \to 0,$$

откуда

$$\frac{\left| k_l\beta_{k_l} J_{k_l}^1(\lambda) - \alpha_{k_l} J_{k_l}^2(\lambda) - (k_l\beta_{k_l} - \alpha_{k_l}) \right|}{\sqrt{k_l^2+1}} > \delta - \varepsilon > 0,$$

поскольку

$$\frac{|k\beta_k - \alpha_k|}{\sqrt{k^2+1}} > \delta > 0,$$

т. е. мы получили противоречие с тем, что при $\dfrac{|k\beta_k|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$ и $\dfrac{|\alpha_k|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$

$$k_l\beta_{k_l}\left(J_{k_l}^1(\lambda) - 1\right) - \alpha_{k_l}\left(J_{k_l}^2(\lambda) - 1\right) \to 0.$$

Доказано следующее утверждение.

Предложение 2. *Задача* (6), *корректная для уравнения* $\Delta u = g$, *корректна для уравнения* $\Delta u + \lambda^2 u = g$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* (11).

Рассмотрим теперь случай нарушения условия корректности (11). Ясно, что с изменением λ условие (11) нарушается. Это происходит при λ, являющемся корнем уравнения

$$\beta_k \lambda J_k'(\lambda) - \alpha_k J_k(\lambda) = 0 \text{ при } \lambda \neq 0. \tag{12}$$

Если σ_k — множество нулей $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнения(12), то находим, что спектр $\sigma(\Delta_B) \subset \bigcup\limits_k \sigma_k$, поскольку каждая регулярная точка λ в силу условия (11) лежит вне множества $\bigcup\limits_k \sigma_k$. Наоборот, если λ — нуль уравнения (12) с $k = k_0$, то с этим k выполнено условие (4), где $a_k = \beta_k$, $b_k = -\alpha_k$, поэтому выполнено условие (3) с функциями $\psi_0 = \alpha_k e^{ik\tau}$, $\psi_1 = \beta_k e^{ik\tau}$. Нетрудно найти гладкую функцию в круге, следами которой являются $u|_{\partial K} = \psi_0$, $u'_\nu|_{\partial K} = \psi_1$. Такая функция принадлежит пространству $D(L)$, поэтому пара $(\psi_0, \psi_1) \in C(L)$ и согласно предложению 1 в силу выполнения условия (3) существует функция $u_{\lambda, k}$ из пространства $\ker L_\lambda$ такая, что функции ψ_0, ψ_1 являются L-следами функции $u_{\lambda, k}$:

$$L_{(0)} u_{\lambda, k} = u_{\lambda, k}|_{\partial K} = \alpha_k e^{ik\tau}, \qquad L_{(1)} u_{\lambda, k} = -(u_{\lambda, k})'_\nu|_{\partial K} = \beta_k e^{ik\tau}.$$

Таким образом, число λ является собственным значением оператора Δ_B с собственным вектором $u_{\lambda, k}$. Покажем, что все собственные значения имеют конечную кратность и точка накопления может быть только на бесконечности. Пусть по подпоследовательности k_l $\lambda_l \to \lambda_0$ и $\beta_{k_l} \lambda_l J'_{k_l}(\lambda_l) - \alpha_{k_l} J_{k_l}(\lambda_l) = 0$. С ростом l числа k_l стремятся к бесконечности, поскольку каждая целая функция $\beta\lambda J'_k(\lambda) - \alpha J_k(\lambda)$ имеет только конечное число нулей в каждом конечном круге в $\mathbb{C}$. Разделим последнее равенство на $\dfrac{\sqrt{k_l^2+1}\,(\lambda_l/2)^{k_l}}{(k_l)!}$ и введем функции $J_k^1(\lambda)$ и $J_{k_l}^2(\lambda)$, как описано выше. В результате получим

$$\left| \frac{k_l \beta_{k_l}}{\sqrt{k_l^2+1}} J_{k_l}^1(\lambda_0) - \frac{\alpha_{k_l}}{\sqrt{k_l^2+1}} J_{k_l}^2(\lambda_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{k_l \beta_{k_l}}{\sqrt{k_l^2+1}} J_{k_l}^1(\lambda_l) - \frac{\alpha_{k_l}}{\sqrt{k_l^2+1}} J_{k_l}^2(\lambda_l) - \frac{k_l \beta_{k_l}}{\sqrt{k_l^2+1}} J_{k_l}^1(\lambda_0) + \frac{\alpha_{k_l}}{\sqrt{k_l^2+1}} J_{k_l}^2(\lambda_0) \right| \le$$

$$\le \left| J_{k_l}^1(\lambda_l) - J_{k_l}^1(\lambda_0) \right| + \left| J_{k_l}^1(\lambda_l) - J_{k_l}^1(\lambda_0) \right| \le$$

$$\le \max_{\lambda < \lambda_0 + \varepsilon} \left\{ \left| \left(J_{k_l}^1(\lambda) \right)' \right| + \left| \left(J_{k_l}^2(\lambda) \right)' \right| \right\} |\lambda_l - \lambda_0| \le C |\lambda_l - \lambda_0|.$$

Здесь ограниченность max следует из вида разложений в ряд Тейлора

$$J_k^1(\lambda) = 1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{1}{k(k+1)} + \ldots; \qquad J_k^2(\lambda) = 1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots.$$

Эти разложения следуют из известного разложения функции Бесселя [15] в знакопеременный ряд, сходящийся во всей комплексной плоскости и имеющий в нуле нуль порядка равного номеру функции. Поэтому ряды для функций $J_k^1(\lambda)$, $J_k^2(\lambda)$, $\left(J_{k_l}^1(\lambda)\right)'$, $\left(J_{k_l}^2(\lambda)\right)'$ тоже знакопеременные и по признаку Лейбница остаточный член оценивается последним учитываемым членом ряда. Легко видеть, что если ограничиться первым членом ряда для производных $\left(J_{k_l}^1(\lambda)\right)'$, $\left(J_{k_l}^2(\lambda)\right)'$, то они оцениваются при $k > 0$ величиной $C = |\lambda|$. Таким образом, получаем

$$\left|\frac{k_l\beta_{k_l}}{\sqrt{k_l^2+1}}J_{k_l}^1(\lambda_0)-\frac{\alpha_{k_l}}{\sqrt{k_l^2+1}}J_{k_l}^2(\lambda_0)\right|\to 0 \quad \text{при} \quad l\to\infty.$$

Поскольку величины

$$\left|\frac{k_l\beta_{k_l}}{\sqrt{k_l^2+1}}\right|, \qquad \left|\frac{\alpha_{k_l}}{\sqrt{k_l^2+1}}\right|$$

меньше единицы, то выберем подпоследовательность, по которой каждая из них сходится: первая, например, к B, а вторая — к A. Перейдем к пределу, используя приведенную выше асимптотику. Получим $|B-A|=0$, а это противоречит условию (10) корректности задачи для уравнения Пуассона, из которого следует, что $|B-A|>\delta>0$. Итак, противоречивым оказалось предположение о существовании точек непрерывного спектра (в который включим собственные значения бесконечной кратности). Значит, спектр $\bigcup\limits_k \sigma_k$ состоит из собственных значений конечной кратности. Доказано следующее утверждение.

Предложение 3. *Спектр оператора корректной граничной задачи* (6) *для уравнения* $\Delta u = g$ *состоит из собственных значений и представляет собой множество* $\bigcup\limits_{k\in N\cup 0} \sigma_k$, *где* σ_k — *множество нулей уравнения* (12).

Из этого предложения следует, что единственной точкой накопления спектра может быть только бесконечность. Отсюда следует, что оператор L_B^{-1} вполне непрерывен в силу его нормальности, поскольку на радиальных пространствах оператор L_B действует как оператор Бесселя.

Доказано следующее утверждение.

Предложение 4. *Каждая корректная* G*-инвариантная граничная задача для уравнения Пуассона вполне корректна, т. е. ее разрешающий оператор вполне непрерывен.*

Примером такой задачи является задача Дирихле $\alpha=\delta$, $\alpha_k=1$, $\beta=0$; задача Неймана $\beta=\delta$, $\beta_k=1$, $\alpha=0$ на фактор-пространстве по константам; третья краевая задача

$$Au\Big|_{\partial K}+Bu'_\nu\Big|_{\partial K}=0$$

с постоянными коэффициентами; любая другая задача такого вида, где A и B — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами и дифференцированием по углу.

Отметим важность предположения о корректности граничной задачи. Конечно, без условия (10) в спектре может находиться любое число точек накопления и кроме замкнутости о спектре ничего сказать нельзя.

Из результатов [6, с. 531] (см. также [5]) следует такое утверждение.

Предложение 5. *Пусть у корректной граничной задачи* (6) *коэффициенты* α_k, β_k — *вещественны, т. е. у функций* α *и* β *их действительные части четны, а мнимые — нечетны. Спектр* $\sigma(\Delta_B)$ *вещественен тогда и только тогда, когда при* $k>0$

$$-\frac{\alpha_k}{\beta_k}+k>0 \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_{-k}}{\beta_{-k}}+k>0.$$

Каждое нарушение одного из этих неравенств с изменением k *добавляет к спектру пару чисто мнимых точек.*

Пусть теперь задача (6) вещественна, т. е. вещественны функции α и β:

$\alpha_n = \overline{\alpha}_{-n}$, $\beta_n = \overline{\beta}_{-n}$, и пусть оператор Δ_B, порожденный ею, самосопряжен. Отсюда легко заключить, что для каждого k либо $J_k(\lambda) = 0$, либо $\lambda J_k'(\lambda) = 0$. В самом деле, вместе с каждым уравнением

$$\beta_k \lambda J_k'(\lambda) - \alpha_k J_k(\lambda) = 0 \tag{13}$$

имеем также уравнение

$$\overline{\beta}_k \lambda J_{-k}'(\lambda) - \overline{\alpha}_k J_{-k}(\lambda) = 0,$$

которое в силу свойства $J_{-k}(\lambda) = (-1)^k J_k(\lambda)$ превращается в уравнение

$$\overline{\beta}_k \lambda J_k'(\lambda) - \overline{\alpha}_k J_k(\lambda) = 0. \tag{14}$$

Отсюда следует, что вместе с каждой точкой спектра λ в нем содержится также и точка $\overline{\lambda}$. Если оператор Δ_B — самосопряжен, то он имеет чисто вещественный спектр, поэтому каждое λ удовлетворяет уравнениям (13) и (14). Перемножив эти уравнения, получим равенства для действительной и мнимой частей:

$$|\beta_k|^2 \left(\lambda J_k'(\lambda)\right)^2 + |\alpha_k|^2 (J_k(\lambda))^2 = 0, \tag{15}$$

$$\beta_k \overline{\alpha}_k \lambda J_k'(\lambda) J_k(\lambda) = 0. \tag{16}$$

Оба числа β_k и α_k не могут обращаться в нуль в силу корректности задачи (условие (10)). Если одно из них обращается в нуль, то из равенства (15) получим $J_k'(\lambda) J_k(\lambda) = 0$; если же оба не равны нулю, то справедливость такого соотношения следует из равенства (16). Итак, для каждого k либо $J_k(\lambda) = 0$, либо $J_k'(\lambda) = 0$. Но это значит, что либо $\alpha_k = 0$, либо $\beta_k = 0$. Это же можно получить, записав сопряженную задачу в явном виде.

Поэтому каждая такая задача порождает множество $M \subset \mathbb{N} \cup 0$ такое, что ее спектр $\sigma(\Delta_B) \subset \sigma^1 \cup \sigma^2$, где

$$\sigma^1 = \bigcup_{k \in M} \sigma_k^1, \quad \sigma^2 = \bigcup_{k \in N \cup 0 \setminus M} \sigma_k^2,$$

σ_k^1 — множество нулей функции $J_k'(\lambda)$; σ_k^2 — множество нулей функции $J_k(\lambda)$ и множество $\sigma(\Delta_B)$ конечно на каждом конечном интервале.

Поскольку нули функции $J_k(\lambda)$ и $J_k'(\lambda)$ перемежаются, $\bigcup\limits_{k \in N \cup 0} \sigma_k^1$ — спектр задачи Неймана, $\bigcup\limits_{k \in N \cup 0} \sigma_k^2$ — спектр задачи Дирихле, то получаем, что спектр $\sigma(\Delta_B)$ имеет как бы промежуточную асимптотику между асимптотикой спектра задачи Дирихле и асимптотикой спектра задачи Неймана, откуда следует полнота системы собственных функций в $L_2(K)$. Кроме того, поскольку нули различных функций Бесселя и их производных различны (см. [16] или [15]), то все собственные значения однократны. Итак, доказано следующее утверждение.

Предложение 6. *Оператор самосопряженной корректной G-инвариантной граничной задачи с вещественными функциями α и β имеет вполне непрерывный обратный с однократным спектром и собственными векторами, составляющими ортогональный базис в пространстве $L_2(\Omega)$.*

1. *Бурский В. П.* Об одной коммутативной диаграмме, следах решений и спектре оператора граничной задачи для уравнения Лапласа в круге // Нелинейные граничные задачи: Сб. научн. тр. – 1990. – № 2. – С. 13 – 19.
2. *Нгуен Куок Зан.* О граничных задачах для уравнения Лапласа в круге // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 6. – С. 763 – 771.
3. *Горбачук В. И.* О граничных задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 7 – 11.
4. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1952. – № 1. – С. 187 – 246.
5. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 132 с.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
7. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 207 с.
8. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
9. *Кочубей А. Н.* О симметрических операторах, коммутирующих с семейством унитарных операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1979. – **13**, № 4. – С. 77 – 78.
10. *Бурский В. П.* Об одной коммутативной диаграмме, связанной с дифференциальным оператором в области // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 12. – С. 1703 – 1709.
11. *Бурский В. П.* Граничные свойства L_2-решений линейных дифференциальных уравнений и двойственность уравнение-область // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, № 5. – С. 1036 – 1039.
12. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 736 с.
13. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
14. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978. – 344 с.
15. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 295 с.
16. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – Т.1. – 220 с.

Получено 13.11.96,
после доработки — 11.04.97