УДК 519. 21

В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук,
М. Л. Свердан, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Юрченко, асп. (Чернівец. ун-т)

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ СТОХАСТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

A comparison theorem is proved for solutions of nonlinear stochastic differential equations with Poisson perturbations and delay. A problem on stochastic control is considered.

Доведено теорему порівняння для розв'язків нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь з пуассоновими збуреннями та загаюванням. Розглянуто одну задачу стохастичного керування.

1. Теорема порівняння для нелінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір, на якому заданий потік σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathbb{D}([-r, 0])$ — простір Скорохода з рівномірною нормою [1].

Теорема 1. *Нехай задані:*

1) *строго зростаюча функція* $\{\rho(x), x \in \mathbb{R}_+\}$ *така, що* $\rho(0) = 0$ *та*

$$\int_0^\infty \rho^{-2}(x)\,dx = \infty; \tag{1}$$

2) *неперервні функціонали* $b\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}^1$; $c\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}^1$, $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^m$ *такі, що для довільних* $\xi, \eta \in \mathbb{D}([-r, 0])$

$$|b(t,\xi) - b(t,\eta)| + \int_{\mathbb{V}} |c(t,\xi,u) - c(t,\eta,u)|\,\Pi(du) \leq \rho(\|\xi - \eta\|), \quad t \geq 0; \tag{2}$$

3) *два неперервні функціонали* $a_i\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, 2$, *такі, що*

$$a_1(t,\xi) < a_2(t,\xi), \quad t \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{D}([-r, 0]); \tag{3}$$

4) $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — *узгоджені неперервні процеси* $\{x_i(t) := x_i(t,\omega), t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega, i = 1, 2\}$;

5) *стандартний вінерів процес* $\{w(t) := w(t,\omega)\} \subset \mathbb{R}^1$ *такий, що* $w(0) = 0$ *майже скрізь;*

6) $\{\tilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - \Pi(A)t, A \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R} \,|\, \{0\}\}$ — *центрована пуассонівська міра, причому* $w(t)$ *та* $\tilde{\nu}(t,A)$ *незалежні між собою;*

7) $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — *узгоджені вимірні процеси* $\{\alpha_i(t) := \alpha_i(t,\omega), t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega\}$.

Припускаємо, що майже скрізь випадкові процеси 4)–7) *задовольняють умови*

$$x_i(t) - x_i(0) = \int_0^t \alpha_i(s)\,ds + \int_0^t b(s, x_{iS})\,ds + \int_0^t \int_{\mathbb{V}} c(s, x_{iS}, v)\,\tilde{\nu}(ds, dv), \tag{4}$$

$$x_1(\theta) \leq x_2(\theta), \quad \theta \in [-r, 0], \tag{5}$$

$$\alpha_1(t) \leq a_1(t, x_{1t}), \quad t \geq 0, \tag{6}$$

$$\alpha_2(t) \leq a_2(t, x_{2t}), \quad t \geq 0, \tag{7}$$

де $x_{iS} := \{x_i(s+\theta), \theta \in [-r, 0]\}$.

Тоді з імовірністю 1

$$x_1(t) \le x_2(t) \quad \forall\, t \ge 0. \tag{8}$$

Якщо виконується умова єдиності сильних розв'язків хоча б для одного з наступних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (СДФР)

$$dx(t) = a_i(t, x_t)dt + b(t, x_t)dw(t) + \int_{\mathbb{V}} c(t, x_t, v)\,\tilde{\nu}(dt, dv), \quad i = 1, 2, \tag{9}$$

то (8) ***виконується й при більш слабкій умові***

$$a_1(t, \xi) \le a_2(t, \xi), \quad t \ge 0, \ \ \xi \in \mathbb{D}. \tag{9_1}$$

Доведення. Нехай $a_i, i = 1, 2, b$ та c обмежені [2, 3].

Етап 1. Нехай для $a_i(t, x)$ виконується умова Ліпшіца

$$|a_1(t, \xi) - a_1(t, \eta)| \le K\|\xi - \eta\| \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{D}([-r, 0]). \tag{10}$$

Виберемо послідовність $\{\psi_n(t), t \in \mathbb{R}_+, n = 1, 2, \ldots\}$ неперервних функцій таких, що їх носії містяться в (a_n, a_{n-1}) $(1 > a_1 > \ldots > a_n > 0)$ та

$$\begin{gathered} 0 \le \psi_n(t) \le 2\rho^{-2}(t)/n; \\ \int_{a_n}^{a_{n-1}} \psi_n(t)\,dt = 1. \end{gathered} \tag{11}$$

Нехай також

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y \psi_n(t)\,dt, & x > 0. \end{cases}$$

Легко перевірити, що $\varphi_n \in C^2(\mathbb{R}^1)$,

$$\begin{gathered} \psi_n(x) = 0 \quad \text{для} \quad n \le 0, \\ \varphi_n(x) \uparrow x^+ \quad \text{при} \quad n \to \infty; \\ \varphi_n''(x) = \psi_n(x) \quad \text{та} \quad 0 \le \varphi_n'(x) \le 1. \end{gathered} \tag{12}$$

Застосовуючи узагальнену формулу Іто [4, 5], маємо

$$\varphi_n(x_1(t) - x_2(t)) = \sum_{i=1}^{5} I_i(n),$$

де

$$I_1(n) = \int_0^t \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s))\{b(s, x_{1s}) - b(s, x_{2s})\}\,dw(s),$$

$$I_2(n) = \int_0^t \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s))\{\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\}\,ds,$$

$$I_3(n) = \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_n''(x)(x_1(s) - x_2(s))\{b(s, x_{1t}) - b(s, x_{2t})\}^2\,ds,$$

$$I_4(n) = \int_0^t \int_{\mathbb{V}} [\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_{1s}, v) - c(s, x_{2s}, v)) -$$

$$- \varphi_n(x_1(s) - x_2(s))] \, \tilde{\nu}(ds, dv),$$

$$I_5(n) = \int_0^t \int_{\mathbb{V}} [\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_{1s}, v) - c(s, x_{2s}, v)) -$$

$$- \varphi_n(x_1(s) - x_2(s)) - \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s)) \, c(s, x_{1s}, v) - c(s, x_{2s}, v))] \, \Pi(dv) \, ds.$$

Використовуючи властивості стохастичних інтегралів [2], одержуємо

$$\mathbb{E}\{I_1(n)\} = 0, \quad \mathbb{E}\{I_4(n)\} = 0,$$

$$\mathbb{E}\{I_3(n)\} \le \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\int_0^t \varphi_n''(x_1(s) - x_2(s))\rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|)\,ds\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\int_0^t \psi_n\,(x_1(s) - x_2(s))\rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|)\,ds\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\int_0^t \frac{2}{n}\rho^{-2}(|x_1(s) - x_2(s)|)\rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|)\,ds\right\} \le \frac{t}{n}.$$

Далі, враховуючи умови (6), (7), (10) та (12), маємо

$$I_2(n) = \int_0^t \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s))\{\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\}\,ds \le$$

$$\le \int_0^t \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s))\{a_1(s, x_{1s}) - a_2(s, x_{2s})\}\,ds \le$$

$$\le K\int_0^t \mathcal{X}_{x_1(s) > x_2(s)} \| x_s - x_{2s} \| \,ds \le K\int_0^t (x_1(s) - x_2(s))^+\,ds.$$

З (12) випливає

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{I_5(n)\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^t \int_{\mathbb{V}} \lim_{n\to\infty} [\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_{1s}, v) - c(s, x_{2s}, v))] -\right.$$

$$- \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_1(s) - x_2(s)) - \lim_{n\to\infty} \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s)) \times$$

$$\left. \times\, c(s, x_{1s}, v) - c(s, x_{2s}, v))\right\}\Pi(dv)ds =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{V}} \lim_{n\to\infty} (c(s, x_{1s}, v) - c(s, x_{2s}, v))[1 - \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s))]\,\Pi(dv)\,ds = 0.$$

Якщо зауважити, що

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{\varphi_n(x_1(t) - x_2(t))}{x_1(t) - x_2(t)} = 1,$$

$$\mathbb{E}\{(x_1(t)-x_2(t))^+\} \le K\int_0^t \mathbb{E}\{(x_1(s)-x_2(s))^+\}\,ds.$$

Звідси випливає $\mathbb{E}\{(x_1(t)-x_2(t))^+\} = 0$ для довільних $t\ge 0$ тобто $P\{(x_1(t)\le x_2(t))^+\} = 1$ для довільних $t\ge 0$.

Етап 2. У загальному випадку вибираємо $a(t,\xi)$ таким чином, що $a_1(t,\xi) < a(t,\xi) < a_2(t,\xi)$, $t\ge 0$, $\xi\in\mathbb{D}([-r,0])$ та для $a(t,\xi)$ виконується (10).

Нехай $\{x(t)\}$ — єдиний розв'язок СДФР

$$dx(t) = a(t,x_t)dt + b(t,x_t)dw(t) + \int_{\mathbb{V}} c(t,x_t,v)\,\tilde{\nu}(dt,dv), \quad t\ge 0,$$

з початковими умовами $x(\theta) = x_2(\theta)$, $-r\le\theta\le 0$. Тоді з результату етапа 1 випливає, що $x(t)\le x_2(t)$ та $x_1(t)\le x(t)$ для $t\ge 0$ з імовірністю 1. Тобто (8) виконується.

Етап 3. Нехай існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок $x(t)$ рівняння (9) при $i=1$;

$$dx(t) = a_1(t,x_t)dt + b(t,x_t)dw(t) + \int_{\mathbb{V}} c(t,x_t,v)\,\tilde{\nu}(dt,dv), \tag{13}$$

$$x(\theta) = x_1(\theta), \quad -r\le\theta\le 0.$$

Для $\varepsilon>0$ нехай $x^{(\pm\varepsilon)}(t)$ — два розв'язки рівнянь

$$dx(t) = (a_1(t,x_t)\pm\varepsilon)dt + b(t,x_t)dw(t) + \int_{\mathbb{V}} c(t,x_t,v)\,\tilde{\nu}(dt,dv),$$

$$x(\theta) = x_1(\theta), \quad -r\le\theta\le 0.$$

Для розв'язків цих рівнянь з етапів 1, 2 випливає $x^{(-\varepsilon)}(t)\le x(t)\le x^{(+\varepsilon)}(t)$ для довільних $t\ge 0$. Якщо $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$ то $x^{(-\varepsilon_1)}(t)\le x^{(-\varepsilon_2)}(t)$ та $x^{(+\varepsilon_2)}(t)\le$ $\le x^{(+\varepsilon_1)}(t)$ для всіх $t\ge 0$. Отже, завдяки неперервності $a_1(t,\xi)$ та єдиності розв'язків для (13) маємо

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} x^{(-\varepsilon)}(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} {}^{(+\varepsilon)}(t) = x(t) \quad \forall\, t\ge 0.$$

Враховуючи нерівності $\alpha_1\le a_1(t,x_{1t})$, $a_1(t,x_t)\le a_1(t,x_t)+\varepsilon$ та застосовуючи доведене вище для $x_2(t)$ та $x^{(+\varepsilon)}(t)$, одержуємо

$$x_1(t)\le x^{(+\varepsilon)}(t) \quad \forall\, t\ge 0.$$

При $\varepsilon\downarrow 0^+$ маємо

$$x_1(t)\le x(t) \quad \forall\, t\ge 0. \tag{14}$$

В результаті аналогічних дій при $\alpha_2(t)\ge a_2(t,x_{2t})$, $a_2(t,x_t) > a_1(t,x_t)-\varepsilon$ одержимо нерівність $x^{(-\varepsilon)}(t)\le x_2(t)$ майже скрізь. При $\varepsilon\downarrow 0^+$ маємо

$$x(t)\le x_2(t) \quad \forall\, t\ge 0. \tag{15}$$

Співставляючи нерівності (14) та (15), записуємо

$$x_1(t) \le x(t) \le x_2(t) \quad \forall\, t \ge 0.$$

Теорему доведено.

2. Стохастична задача керування. Нехай $k(z)$ — неспадна невід'ємна функція, яка визначена на $[0, \infty)$.

***Означення* 1.** *Система випадкових процесів* $\{w(t),\ \tilde{\nu}(t, A), u(t),\ t \ge 0, A \in \mathbb{U}\}$ *називається допустимою системою (допустим керуванням), якщо:*

1) *вона визначена на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *з потоком* σ*-алгебр* $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$;

2) $w(t)$ $(w(t) = 0)$ — *n-вимірний броунівський рух;*

3) $\tilde{\nu}(t, A)$ — *центрована пуассонівська міра* [2];

4) $u(t)$ — *n-вимірний* $\mathcal{F}_t$*-вимірний процес такий, що* $|u(t)| \le 1$ *для всіх* $t \ge 0$ *з імовірністю* 1.

Нехай $x \in \mathbb{D}$ задане й фіксоване. Для заданої допустимої системи $\{w(t), \tilde{\nu}(t, A), u(t)\}$ ризик $x^u(t)$ визначається рівністю

$$x^u(t) = x + \int_0^t b(s, x_s^u)\, dw(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{V}} c(s, x_s^u, v)\, \tilde{\nu}(dv, ds) + \int_0^t u(s)\, ds, \tag{16}$$

де $x_s^u := \{x^u(s + \theta), \theta \in [-r, 0]\}$.

Ставиться задача мінімізації математичного сподівання $\mathbb{E}\{\|x^u\|\}$ за всілякими допустимими системами $\{w(t), \tilde{\nu}(t, A), u(t)\}$.

Розв'яжемо цю задачу таким чином [4]. Нехай

$$\mathbb{U}(y) = \begin{cases} -y/|y|, & y \in \mathbb{R}^n \,|\, \{0\}, \\ 0, & y = 0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{17}$$

Розглянемо СДФР

$$dx(t) = b(s, x_s)\, dw(t) + \int_{\mathbb{V}} c(s, x_s, v)\, \tilde{\nu}(dv, ds) + \mathbb{U}(x(t))\, dt, \tag{18}$$

$$x(\theta) = \varphi(\theta) \text{ при } \theta \in [-r, 0]; \quad x(0) = \varphi(0) = x.$$

Відомо, що розв'язок (18) існує та єдиний з точністю до стохастичної єдиності [3, 6].

Нехай

$$u^0(s) := \mathbb{U}(x^0(t)). \tag{19}$$

Тоді допустима система $\{w^0(t), \tilde{\nu}^0(t, A), u^0(t)\}$ задає оптимальне керування, тобто для будь-якої допустимої системи $\{w(t), \tilde{\nu}(t, A), u(t)\}$ маємо

$$\mathbb{E}\{k(|x^0(t)|)\} \le \mathbb{E}\{k(|x^u(t)|)\}. \tag{20}$$

Лема 2. *Нехай* $\{x(t), w(t), \tilde{\nu}(t, A)\}$ — *трійка n-вимірних* $\mathcal{F}_t$*-узгджених процесів, визначених на ймовірнісному просторі* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; $\{\mathbb{Y}(t), w'(t), \tilde{\nu}'(t)\}$ — *трійка, визначена на* $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ *з потоком* $\{\mathcal{F}_t'\}$. *Тоді існує ймовірнісний простір* $\{\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}}\}$ *з потоком* $\{\hat{\mathcal{F}}_t\}$ *та четвірка* $\{\hat{x}(t), \hat{\mathbb{Y}}(t), \hat{w}(t), \hat{\nu}(t, A)\}$ *n-вимірних* $\mathcal{F}_t'$ *-узгоджених процесів таких, що:*

1) $\{x(t), w(t), \tilde{\nu}(t, A)\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\hat{x}(t), \hat{w}(t), \hat{\nu}(t, A)\}$;

2) $\{\mathbb{Y}(t), w'(t), \tilde{\nu}'(t)\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\hat{\mathbb{Y}}(t), \hat{w}(t), \hat{\nu}(t, A)\}$;

3) $\{\hat{w}(t)\}$ — *n-вимірний* $(\mathcal{F}_t')$*-броунівський рух;*

4) $\{\hat{\nu}(t,A)\}$ — *центрована пуассонівська міра* [4].

Теорема 2. *Нехай* $\{w(t), \nu(t,A), u(t)\}$ — *довільна задана допустима система та для заданого* $x \in \mathbb{R}^n$ *розв'язок* $\{x^u(t)\}$ *визначається рівністю* (16). *Тоді на відповідному ймовірнісному просторі можна побудувати* $\mathbb{R}^n$*-значні процеси* $\{\hat{x}^u(t)\}$ *та* $\{\hat{x}^0(t)\}$ *такі, що:*

1) $\{x^u(t)\} \overset{\mathcal{L}}{\approx} \{\hat{x}^u(t)\}$;

2) $\{x^0(t)\} \overset{\mathcal{L}}{\approx} \{\hat{x}^0(t)\}$;

3) $|\hat{x}^0(t)| \le |\hat{x}^u(t)|$ *для довільних* $t \ge 0$ *з імовірністю* 1.

Доведення. Нехай $\{w(t),\, \tilde{\nu}(t,A), u(t)\}$ — задана допустима система;

$$x^u(t) = \int_0^t b(s,\, x_s^u)\, dw(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{V}} c(s, x_s^u, v)\, \tilde{\nu}(ds, dv) + \int_0^t u(s)\, ds,$$

— відповідний розв'язок рівняння (3).

Виберемо $o(n)$-значну борелівську функцію $\{p_{ij}(x)\}$ таку, що

$$p_{1j}(x) = \begin{cases} x^i / |x|; & x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \neq 0, \\ \delta_{1j}, & x = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Позначимо

$$\overline{w}(t) = \int_0^t p(x^u(s))\, dw(s),$$

$$\overline{w}^0(t) = \int_0^t p(x^0(s))\, dw^0(s),$$

$$\overline{\tilde{\nu}}^0(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{V}} p(x^0(s))\, \tilde{\nu}^0(dv, ds).$$

Тоді маємо

$$x^u(t) = x + \int_0^t p^{-1}(x^u(s))\, d\overline{w}(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{V}} p^{-1}(x^u(s))\, \tilde{\nu}(dv, ds) + \int_0^t u(s)\, ds, \tag{22}$$

$$x^0(t) = x + \int_0^t p^{-1}(x^0(s))\, d\overline{w}^0(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{V}} p^{-1}(x^0(s))\, \overline{\tilde{\nu}}^0(dv, ds) + \int_0^t \mathbb{U}(x^0(s))\, ds. \tag{23}$$

Застосуємо лему 1 до $\{x^0(t), \overline{w}(t), \overline{\tilde{\nu}}(t)\}$ та $\{x^0(t), \overline{w}^0(t), \overline{\tilde{\nu}}^0(t)\}$. Тоді одержуємо четвірку $\{\hat{x}^u(t), \hat{x}^0(t), \hat{w}(t), \hat{\tilde{\nu}}(t)\}$-узгоджених процесів на ймовірнісному просторі з потоком $\{\hat{\mathcal{F}}_t\}$ таким, що $\{\hat{w}(t)\}$ — n-вимірний броунівський рух, $\{\overline{\tilde{\nu}}(t,A)\}$ — центрована пуассонівська міра та

$$\{x^u(t), \overline{w}(t), \overline{\tilde{\nu}}(t)\} \overset{\mathcal{L}}{\approx} \{\hat{x}_i^u(t), \overline{w}(t), \hat{\tilde{\nu}}(t,A)\},$$

$$\left\{ x^0(t), w^0(t), \overline{\tilde{\nu}}^0(t) \right\} \overset{\mathcal{L}}{\approx} \left\{ \hat{x}^0(t), w^0(t), \hat{\tilde{\nu}}^0(t,A) \right\}.$$

Очевидно [4], існує $\hat{\mathcal{F}}_t$-цілком вимірний n-процес $\{\hat{u}(t)\}$ такий, що $|\hat{u}(t)| \leq 1$ для всіх $t \geq 0$ та

$$\hat{x}^u(t) = x + \int_0^t p^{-1}\left(\hat{x}^u(s)\right) d\hat{w}(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{V}} p^{-1}\left(\hat{x}^u(s)\right) \hat{\tilde{\nu}}(dv, ds) + \int_0^t \hat{u}(s) ds.$$

Застосовуючи узагальнену формулу Іто [5] до $x_1(t) = \left|\hat{x}^0(t)\right|^2$ та $x_2(t) = \left|\hat{x}^u(t)\right|^2$, маємо

$$dx_2(t) = 2\hat{x}^u(t) p^{-1}\left(\hat{x}^u(t)\right) dw(t) + \int_{\mathbb{V}} \left[\left|\hat{x}^u(t) + p^{-1}\left(\hat{x}^u(t)\right)\right|^2 - \left|\hat{x}^u(t)\right|^2 \right]_1 \tilde{\nu}(dv, dt) +$$

$$+ \left\{ 2\hat{x}^u(t)\hat{u}(t) + n + \int_{\mathbb{V}} \left[\left|\hat{x}^u(t) + p^{-1}\left(\hat{x}^u(t)\right)\right|^2 - \left|\hat{x}^u(t)\right|^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\hat{x}^u(t) p^{-1}\left(\hat{x}^u(t)\right) \right]_2 \Pi(du) \right\} dt =$$

$$= 2\left|\hat{x}^u(t)\right| d\hat{w}^1(t) + \int_{\mathbb{V}} \left[\left|\hat{x}^u(t) + p^{-1}\left(\hat{x}^u(t)\right)\right|^2 - \left|\hat{x}^u(t)\right|^2 \right]_1 \tilde{\nu}(dv, dt) +$$

$$+ \left\{ 2\hat{x}^u(t)\hat{u}(t) + n + \int_{\mathbb{V}} \left[\left|\hat{x}^u(t) + p^{-1}\left(\hat{x}^u(t)\right)\right|^2 - \left|\hat{x}^u(t)\right|^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\hat{x}^u(t) p^{-1}\left(\hat{x}^u(t)\right) \right]_2 \Pi(du) \right\} dt =$$

$$= 2\sqrt{x_2(t)}\, d\hat{w}^1(t) + \int_{\mathbb{V}} \left[\left|\hat{x}^u(t) + p^{-1}\left(\hat{x}^u(t)\right)\right|^2 - \left|\hat{x}^u(t)\right|^2 \right]_1 \tilde{\nu}(dv, dt) +$$

$$+ \left\{ 2\hat{x}^u(t)\hat{u}(t) + n + \int_{\mathbb{V}} \left[\left|\hat{x}^u(t) + p^{-1}\left(\hat{x}^u(t)\right)\right|^2 - \left|\hat{x}^u(t)\right|^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\hat{x}^u(t) p^{-1}\left(\hat{x}^u(t)\right) \right]_2 \Pi(dv) \right\} dt, \tag{24}$$

$$dx_1(t) = 2\hat{x}^0(t) p^{-1}\left(\hat{x}^0(t) p^{-1}\left(\hat{x}^0(t)\right)\right) d\hat{w}(t) +$$

$$+ \int_{\mathbb{V}} \left[\left|\hat{x}^0(t) + p^{-1}\left(\hat{x}^0(t)\right)\right|^2 - \left|\hat{x}^0(t)\right|^2 \right]_1 \tilde{\nu}^0(dv, dt) +$$

$$+ \left[2\hat{x}^0(t)\mathbb{U}(x^0(t)) + n + \int_{\mathbb{V}} \left[|\hat{x}^0(t) + p^{-1}(\hat{x}^0(t))|^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - |\hat{x}^0(t)|^2 - 2\hat{x}^0(t) p^{-1}(\hat{x}^0(t)) \right]_2 \Pi(dv) \right\} dt =$$

$$= 2|\hat{x}^0(t)|^2 d\hat{w}^1(t) + \int_{\mathbb{V}} [|\hat{x}^0(t) + p^{-1}(\hat{x}^0(t))|^2 - |\hat{x}^0(t)|^2]_1 \hat{\tilde{\nu}}^0(dv, dt) +$$

$$+\left\{-2|\hat{x}^0(t)|^2 + n + \int_{\mathbb{V}} [|\hat{x}^0(t) + p^{-1}(\hat{x}^0(t))|^2 - |\hat{x}^0(t)|^2 - \right.$$

$$\left. -2\hat{x}^0(t)p^{-1}(\hat{x}^0(t))\Big]_2 \Pi(dv)\right\}dt =$$

$$= 2\sqrt{x_1(t)}\, d\hat{w}^1(t) + \int_{\mathbb{V}} [|\hat{x}^0(t)+p^{-1}(\hat{x}^0(t))|^2 - |\hat{x}^0(t)|^2]_1 \bar{\tilde{\mathrm{v}}}^0(dv,dt) +$$

$$+\left\{-2\sqrt{x_1(t)} + n + \int_{\mathbb{V}} [|\hat{x}^0(t)+p^{-1}(\hat{x}^0(t))|^2 - |\hat{x}^0(t)|^2]_1 \Pi(dv)\right\}dt, \qquad (25)$$

де $w(t) = \left(\hat{w}^1(t), \hat{w}^2(t), \ldots, \hat{w}^n(t)\right)$.

Відзначимо, що

$$[xp^{-1}(t)]_i = \sum_j x_j (p^{-1}(x_j))_1 = \sum_j x_j p_{ij}(x) = \delta_{i1}|x|.$$

Покладемо

$$b(t,n) = 2\sqrt{x^{\vee}0};$$

$$b_1(t,x) = b_2(t,x) = -2\sqrt{x^{\vee}0} + n +$$

$$+\int_{\mathbb{V}} [|\hat{x}^u(t)+p^{-1}(\hat{x}^u(t))|^2 - |\hat{x}^u(t)|^2 - 2\hat{x}^u(t)p^{-1}(\hat{x}^u(t))]_2 \Pi(dv),$$

$$\beta_2(t) = 2\hat{x}^u(t)\hat{u}(t) + n +$$

$$+\int_{\mathbb{V}} [|\hat{x}^u(t)+p^{-1}(\hat{x}^u(t))|^2 - |\hat{x}^u(t)|^2 - 2\hat{x}^u(t)p^{-1}(\hat{x}^u(t))]_2 \Pi(dv).$$

Тоді, очевидно, $\beta_1(t) = b_1(t, x_{1t})$ та

$$\beta_2(t) \geq -2|\hat{x}^u(t)| + n +$$

$$+\int_{\mathbb{V}} [|\hat{x}^u(t)+p^{-1}(\hat{x}^u(t))|^2 - |\hat{x}^u(t)|^2 - 2\hat{x}^u(t)p^{-1}(\hat{x}^u(t))]_2 \Pi(dv) = b_2(t, x_2(t)).$$

Має місце потраєкторна єдиність розв'язку для СДФР [4]

$$dx(t) = b(t,x_t)dw(t) + \int_{\mathbb{V}} c(t,x_t,u)\tilde{\mathrm{v}}(dv,dt) + b_1(t,x(t))\,dt.$$

Отже, можна застосувати друге твердження теореми 1 та одержати, що $x_1(t) \leq x_2(t)$ для довільних $t \geq 0$ з імовірністю 1. Теорему 2 доведено.

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 351 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 61 с.
3. *Царьков Е. Ф., Ясинский В. К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир, 1992. – 328 с.
4. *Ватанабэ С., Икеда М.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
6. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.

Получено 05.06.95