УДК 517.124.4

В. В. Билет (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА К МЕТРИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВАМ

We investigate the geometry of spaces tangent and pretangent to general metric spaces with marked point. We find a sufficient condition under which every separable tangent space is geodesic. This condition is almost exact in the sense that it is necessarily satisfied if all spaces pretangent to a given metric space are geodesic.

Досліджується геометрія дотичних та переддотичних просторів до загальних метричних просторів із відміченою точкою. Знайдено достатню умову, за якою довільний сепарабельний дотичний простір є геодезичним. Ця умова є майже точною в тому сенсі, що вона обов'язково виконується, якщо всі переддотичні простори до даного метричного простору є геодезичними.

1. Введение. Предкасательные и касательные пространства, используемые в настоящей работе, были введены в [7] (см. также [8]) для определения обобщенного дифференцирования на метрических пространствах без линейной структуры.

В данной работе найдено условие геодезичности касательных пространств к общим метрическим пространствам. Выбор геодезичности как основного объекта исследования основан на том, что многие модельные геодезические пространства, например $CAT(k)$-пространства (для подробного ознакомления см., например, [2], гл. 2, [3], гл. 4), G-пространства (или пространства геодезических), дезарговы пространства, гиперболические по Громову метрические пространства и т. д. (более подробно об этих пространствах см. [4], гл. 6), находят все большее применение при изучении проблем современной математики.

2. Предварительные замечания. Приведем необходимые определения.

Пусть (X, d) — метрическое пространство и p — точка из X. Зафиксируем некоторую последовательность $\tilde{r}$ положительных вещественных чисел r_n, стремящихся к нулю. Назовем $\tilde{r}$ *нормирующей* (или масштабирующей) последовательностью. Будем обозначать через $\tilde{X}$ множество всех последовательностей точек из X.

Определение 1. *Две последовательности $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, взаимно стабильны относительно нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n} := \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \tag{1}$$

Семейство $\tilde{F} \subseteq \tilde{X}$ *самостабильное*, если любые две последовательности $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{F}$ взаимно стабильны, $\tilde{F} \subseteq \tilde{X}$ — *максимальное самостабильное*, если $\tilde{F}$ самостабильное и для произвольной $\tilde{z} \in \tilde{X} \setminus \tilde{F}$ существует $\tilde{x} \in \tilde{F}$ такая, что $\tilde{x}$ и $\tilde{z}$ не взаимно стабильны.

Предложение 1. *Пусть (X, d) — метрическое пространство и $p \in X$, тогда для каждой нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует максимальное самостабильное семейство $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ такое, что постоянная последовательность $\tilde{p} = \{p, p, \ldots\}$ принадлежит $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$.*

Рассмотрим функцию $\tilde{d}\colon \tilde{X}_{p,\tilde{r}} \times \tilde{X}_{p,\tilde{r}} \to \mathbb{R}$, где $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{y})$ определена через (1). Очевидно, $\tilde{d}$ симметрична и неотрицательна. Кроме того, из неравенства треугольника для d имеем

$$\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) \le \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{z}) + \tilde{d}(\tilde{z},\tilde{y})$$

для всех $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ из $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$. Следовательно, $\big(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d}\big)$ — псевдометрическое пространство.

Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ как $\tilde{x} \sim \tilde{y}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$. Обозначим через $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ множество всех классов эквивалентности на $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$, порожденных отношением $\sim$. Для α, $\beta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ положим $\rho(\alpha,\beta) = \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})$, где $\tilde{x} \in \alpha$, $\tilde{y} \in \beta$, тогда ρ — метрика на $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$. Переход от псевдометрического пространства $\big(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d}\big)$ к метрическому пространству $\big(\Omega^X_{p,\tilde{r}}, \rho\big)$ будем называть *метрической идентификацией* $\big(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d}\big)$.

Определение 2. *Пространство* $\big(\Omega^X_{p,\tilde{r}}, \rho\big)$ *называется предкасательным к* X *в точке* p *относительно нормирующей последовательности* $\tilde{r}$.

Заметим, что $\Omega^X_{p,\tilde{r}} \neq \varnothing$, так как постоянная последовательность $\tilde{p}$ лежит в $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ (см. предложение 1).

Пусть $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — бесконечная строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $\tilde{r}'$ подпоследовательность $\{r_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и пусть $\tilde{x}' := \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ для каждой $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$. Ясно, что если $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ взаимно стабильны относительно $\tilde{r}$, то $\tilde{x}'$ и $\tilde{y}'$ взаимо стабильны относительно $\tilde{r}'$ и

$$\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{d}_{\tilde{r}'}(\tilde{x}',\tilde{y}'). \tag{2}$$

Если $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное относительно $\tilde{r}$ семейство, то, по лемме Цорна, существует максимальное самостабильное относительно $\tilde{r}'$ семейство $\tilde{X}_{p,\tilde{r}'}$ такое, что

$$\big\{\tilde{x}'\colon \tilde{x} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}\big\} \subseteq \tilde{X}_{p,\tilde{r}'}.$$

Обозначим через $\mathrm{in}_{\tilde{r}'}$ отображение из $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ в $\tilde{X}_{p,\tilde{r}'}$ с $\mathrm{in}_{\tilde{r}'}(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$. После метрической идентификации отображение $\mathrm{in}_{\tilde{r}'}$ переходит в изометрическое вложение $\mathrm{em}'\colon \Omega^X_{p,\tilde{r}} \to \Omega^X_{p,\tilde{r}'}$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{X}_{p,\tilde{r}} & \xrightarrow{\ \mathrm{in}_{\tilde{r}'}\ } & \tilde{X}_{p,\tilde{r}'} \\
\pi \Big\downarrow & & \Big\downarrow \pi' \\
\Omega^X_{p,\tilde{r}} & \xrightarrow{\ \mathrm{em}'\ } & \Omega^X_{p,\tilde{r}'}
\end{array} \tag{3}$$

коммутативна. Здесь π и π' — отображения проектирования на соответствующие фактор-пространства, $\pi(\tilde{x}) := \big\{\tilde{y} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}\colon \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0\big\}$ и $\pi'(\tilde{x}) := \big\{\tilde{y} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}'}\colon \tilde{d}_{\tilde{r}'}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0\big\}$.

Пусть X и Y — два метрических пространства. Напомним, что отображение $f\colon X \to Y$ называется *изометрией*, если f сохраняет расстояние и биективно. Будем говорить, что предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является *касательным*, если $\mathrm{em}'\colon \Omega^X_{p,\tilde{r}} \to \Omega^X_{p,\tilde{r}'}$ — изометрия для каждого $\tilde{X}_{p,\tilde{r}'}$.

***Замечание* 1.** Пусть $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное семейство с соответствующим предкасательным пространством $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$. Легко видеть, что $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является касательным тогда и только тогда, когда для каждой подпоследовательности $\tilde{r}' = \{r_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ последовательности $\tilde{r}$ семейство $\{\tilde{x}' : \tilde{x} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}\}$ — максимальное самостабильное по отношению к $\tilde{r}'$.

Следующие стандартные определения можно найти, например, в [2, 3].

Определение 3. *Пусть (X, d) — метрическое пространство. Кривая $\gamma\colon [0, d(x, y)] \to$ $\to X$ такая, что:*

$\gamma(0) = x,$

$\gamma\big(d(x, y)\big) = y,$

$d\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) = |t_1 - t_2|$ *для любых* $t_1,\, t_2 \in [0, d(x, y)]$,

называется геодезической с концами $x,\ y \in X$.

Определение 4. *Метрическое пространство (X, d) является геодезическим пространством, если любые две точки $x,\ y \in X$ могут быть соединены геодезической.*

Определение 5. *Метрическое пространство (X, d) называется срединно выпуклым (или допускающим срединное отображение), если для любых различных точек $x, y \in X$ существует третья точка $z \in X$, называемая срединной точкой, для которой выполняются равенства*

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) \qquad \text{и} \qquad d(x, z) = \frac{1}{2} d(x, y). \tag{4}$$

Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p.

Определение 6. *Будем говорить, что пространство X является срединно выпуклым в точке p, если для любых двух последовательностей $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$ и $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$, сходящихся к p, найдется последовательность $\tilde{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$, $\tilde{z} = \tilde{z}(\tilde{x}, \tilde{y})$ такая, что*

$$d(x_n, z_n) = \frac{1}{2} d(x_n, y_n) + o\big(d(x_n, p) \vee d(y_n, p)\big) \tag{5}$$

и

$$d(y_n, z_n) = \frac{1}{2} d(x_n, y_n) + o\big(d(x_n, p) \vee d(y_n, p)\big), \tag{6}$$

где

$$d(x_n, p) \vee d(y_n, p) = \max\Big\{d(x_n, p), d(y_n, p)\Big\},$$

а формулы (5) *и* (6) *означают, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| d(x_n, z_n) - \dfrac{1}{2} d(x_n, y_n) \right|}{d(x_n, p) \vee d(y_n, p)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left| d(y_n, z_n) - \dfrac{1}{2} d(x_n, y_n) \right|}{d(x_n, p) \vee d(y_n, p)} = 0. \tag{7}$$

***Замечание* 2.** При $d(x_n, p) = d(y_n, p) = 0$ формула (7) не определена, но ее легко доопределить, как это сделано ниже в формуле (9).

Очевидно, что любое срединно выпуклое пространство X является срединно выпуклым в каждой точке p. Обратное утверждение не верно. Окружность $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ с обычной нормой, индуцированной из комплексной плоскости $\mathbb{C}$, является примером полного метрического пространства, срединно выпуклого в любой точке $p \in \mathbb{T}$, но не допускающего срединного отображения. Это можно проверить непосредственно исходя из определений или получить из следствия 2, приведенного в следующем пункте работы.

Следующее утверждение является переформулировкой определения 6.

Утверждение 1. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Пространство X срединно выпукло в точке p тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{x,y\to p}\left(\inf_{z\in X}\Psi(x,y,z)\right)=0, \tag{8}$$

где Ψ — функция, определенная на $X\times X\times X$ правилом

$$\Psi(x,y,z):=\begin{cases}\dfrac{\left|d(x,z)-\dfrac{1}{2}d(x,y)\right|+\left|d(y,z)-\dfrac{1}{2}d(x,y)\right|}{d(x,p)\vee d(y,p)} & \textit{при}\quad d(x,p)\vee d(y,p)>0,\\ 0 & \textit{при}\quad x=y=z=p,\\ \infty & \textit{при}\quad x=y=p,\quad z\neq p.\end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Пусть X — срединно выпукло в точке p, но

$$\limsup_{x,y\to p}\left(\inf_{z\in X}\Psi(x,y,z)\right)>0. \tag{10}$$

Тогда найдутся последовательности $\tilde{x}=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\tilde{X}$, $\tilde{y}=\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\tilde{X}$ и число $\varepsilon_0>0$, для которых $\lim_{n\to\infty}d(x_n,p)=\lim_{n\to\infty}d(y_n,p)=0$, и

$$\inf_{z\in X}\Psi(x_n,y_n,z)>\varepsilon_0 \tag{11}$$

при всех $n\in\mathbb{N}$. Из (11) следует, что $d(x_n,p)\vee d(y_n,p)>0$, так как если $d(x_n,p)\vee d(y_n,p)=0$, то $x_n=y_n=p$, и в силу (9) имеем $\Psi(x_n,y_n,p)=0$, а это противоречит (11). Поскольку X срединно выпукло в точке p, найдется последовательность $\tilde{z}=\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\tilde{X}$, $\tilde{z}=\tilde{z}(\tilde{x},\tilde{y})$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|d(x_n,z_n)-\dfrac{1}{2}d(x_n,y_n)\right|}{d(x_n,p)\vee d(y_n,p)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|d(y_n,z_n)-\dfrac{1}{2}d(x_n,y_n)\right|}{d(x_n,p)\vee d(y_n,p)}=0,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|d(x_n,z_n)-\dfrac{1}{2}d(x_n,y_n)\right|+\left|d(y_n,z_n)-\dfrac{1}{2}d(x_n,y_n)\right|}{d(x_n,p)\vee d(y_n,p)}=0.$$

Тогда, используя (9), находим

$$\lim_{n\to\infty}\Psi(x_n,y_n,z_n)=0.$$

Полученное соотношение противоречит (11). Следовательно, если X срединно выпукло в точке p, то $\limsup_{x,y\to p}\left(\inf_{z\in X}\Psi(x,y,z)\right)=0$.

Для доказательства достаточности предположим, что справедливо (8). Тогда для любых двух последовательностей $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$ и $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$, сходящихся к p, имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \inf_{z\in X} \big(\Psi(x_n, y_n, z)\big) = 0.$$

Следовательно, существует $\tilde{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$, для которой

$$\limsup_{n\to\infty} \Psi(x_n, y_n, z_n) = 0. \tag{12}$$

Поскольку при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\Psi(x_n, y_n, z_n) \geq \frac{\left|d(y_n, z_n) - \dfrac{1}{2}d(x_n, y_n)\right|}{d(x_n, p) \vee d(y_n, p)} \geq 0$$

и

$$\Psi(x_n, y_n, z_n) \geq \frac{\left|d(x_n, z_n) - \dfrac{1}{2}d(x_n, y_n)\right|}{d(x_n, p) \vee d(y_n, p)} \geq 0,$$

из этих неравенств и (12) следует (7), что и доказывает достаточность.

Утверждение доказано.

3. Основные результаты. Нам понадобятся следующие известные результаты из [1, 2, 7].

Утверждение 2 [7, с. 17]**.** *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $p \in X$ и $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — нормирующая последовательность. Тогда любое касательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является полным.*

Утверждение 3 ([2, с. 4], см. также [4, с. 25])**.** *Полное метрическое пространство является геодезическим метрическим пространством тогда и только тогда, когда оно срединно выпукло.*

Лемма 1 [1]**.** *Пусть (X, d) — метрическое пространство с отмеченной точкой p, $\mathfrak{B}$ — счетное подсемейство $\tilde{X}$, $\tilde{r}$ — нормирующая последовательность и $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное семейство. Предположим, что неравенство*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d(z_n, p)}{r_n} < \infty \tag{13}$$

выполняется для любой $\tilde{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{B}$ и предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}} = \pi(\tilde{X}_{p,\tilde{r}})$ сепарабельное и касательное. Тогда существует строго возрастающая, бесконечная последовательность $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел такая, что для любой $\tilde{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{B}$ существует $\tilde{t} = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ такая, что $\tilde{z}' = \tilde{t}'$, т. е равенство

$$z_{n_k} = t_{n_k} \tag{14}$$

выполняется для любого $k \in \mathbb{N}$.

Следующая теорема дает необходимое условие геодезичности сепарабельных касательных пространств.

Теорема 1. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Если X является срединно выпуклым в точке p, то любое сепарабельное касательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является геодезическим.*

Доказательство. Пусть X — срединно выпукло в точке p, а $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ — произвольное сепарабельное касательное пространство. Тогда, в силу утверждений 2 и 3, $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ — геодезическое пространство, если для любых $\beta, \gamma \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ существует точка $\theta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ такая, что

$$\rho(\beta, \theta) = \rho(\gamma, \theta) = \frac{1}{2}\rho(\gamma, \beta). \tag{15}$$

Пусть $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное семейство, соответствующее $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$, и $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ такие, что $\pi(\tilde{x}) = \beta$, $\pi(\tilde{y}) = \gamma$, $\beta \neq \gamma$, где π — естественная проекция (см. (3)). Необходимо показать, что существует $\theta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$, для которого выполнено (15). Пусть $\tilde{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$ — последовательность точек, для которой выполнены соотношения (5) и (6). Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{2}d(x_n, y_n) - d(x_n, z_n)\right|}{r_n} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{2}d(x_n, y_n) - d(x_n, z_n)\right|}{d(x_n, p) \vee d(y_n, p)} \left(\frac{d(x_n, p) \vee d(y_n, p)}{r_n}\right) =$$

$$= \big(\rho(\alpha, \beta) \vee \rho(\alpha, \gamma)\big) \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{2}d(x_n, y_n) - d(x_n, z_n)\right|}{d(x_n, p) \vee d(y_n, p)} = 0, \tag{16}$$

где $\alpha = \pi(\tilde{p})$, $\tilde{p} = (p, p, \ldots)$ и $\rho(\alpha, \beta) \vee \rho(\alpha, \gamma) > 0$, так как $\beta \neq \gamma$. Из (16) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}d(x_n, y_n) - d(x_n, z_n)}{r_n} = 0.$$

Аналогично получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}d(x_n, y_n) - d(y_n, z_n)}{r_n} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, z_n)}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{d(y_n, z_n)}{r_n} = \frac{1}{2}\rho(\beta, \gamma). \tag{17}$$

Проверим выполнение неравенства (13). В силу неравенства треугольника

$$d(z_n, p) \leq d(z_n, x_n) + d(p, x_n).$$

Отсюда, используя (17), имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d(z_n, p)}{r_n} \leq \frac{1}{2}\rho(\beta, \gamma) + \rho(\alpha, \beta),$$

что доказывает (13).

Воспользуемся леммой 1 с $\mathfrak{B}$, состоящим из единственного элемента $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда существуют строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и последовательность $\tilde{t}' = \{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}'}$ такие, что

$$t_{n_k} = z_{n_k} \tag{18}$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\tilde{t} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — последовательность, для которой $in_{\tilde{r}'}(\tilde{t}) = \tilde{t}'$ (см. (3)). Положим $\theta = \pi(\tilde{t})$. Тогда, используя (17) и (18), получаем

$$\rho(\beta,\theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n,t_n)}{r_n} = \lim_{k\to\infty} \frac{d(x_{n_k},t_{n_k})}{r_{n_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{d(x_{n_k},z_{n_k})}{r_{n_k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n,z_n)}{r_n} = \frac{1}{2}\rho(\beta,\gamma).$$

Аналогично имеем

$$\rho(\gamma,\theta) = \frac{1}{2}\rho(\beta,\gamma).$$

Следовательно,

$$\rho(\beta,\theta) = \rho(\gamma,\theta) = \frac{1}{2}\rho(\beta,\gamma),$$

что и доказывает (15).

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Любое сепарабельное касательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является геодезическим для любого геодезического пространства X и любой точки $p \in X$.*

Теорема 2. *Пусть (X,d,p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Если все предкасательные пространства $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ являются геодезическими, то X — срединно выпукло в точке p.*

Доказательство. Пусть все предкасательные пространства $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ являются геодезическими, но X не является пространством, срединно выпуклым в точке p. Тогда, в силу утверждения 1,

$$\limsup_{x,y\to p}\left(\inf_{z\in X}\Psi(x,y,z)\right) > 0, \tag{19}$$

где отображение $\Psi\colon X\times X\times X \to [0,\infty]$ определено формулой (9). В силу (19) найдутся последовательности $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$ и число $\varepsilon_0 > 0$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,p) = \lim_{n\to\infty} d(y_n,p) = 0, \tag{20}$$

и

$$\inf_{z\in X}\Psi(x_n,y_n,z) > \varepsilon_0 \tag{21}$$

при всех $n\in\mathbb{N}$. Последовательности

$$\left\{\frac{d(x_n,y_n)}{d(x_n,p)\vee d(y_n,p)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left\{\frac{d(x_n,p)}{d(x_n,p)\vee d(y_n,p)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left\{\frac{d(y_n,p)}{d(x_n,p)\vee d(y_n,p)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

являются ограниченными. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что все эти последовательности сходятся. Положим

$$r_n = d(x_n, p) \vee d(y_n, p), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Соотношения (20) и (21) влекут равенство

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 \tag{23}$$

и неравенство $r_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, равенство (23) очевидно. Если $r_n = 0$, то $x_n = y_n = p$. Используя (9), получаем $\Psi(x_n, y_n, p) = 0$, что противоречит (21). Следовательно, последовательность $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно принять в качестве нормирующей. Выше было замечено, что последовательности $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\tilde{p} = \{p, p, \ldots\}$ можно выбрать попарно взаимо стабильными. Пусть $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное семейство, содержащее $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, а $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ — соответствующее ему предкасательное пространство. По предположению $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является геодезическим. Следовательно, для точек $\beta = \pi(\tilde{x})$ и $\gamma = \pi(\tilde{y})$ найдется $\theta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ такая, что

$$\rho(\beta, \theta) = \rho(\gamma, \theta) = \frac{1}{2}\rho(\beta, \gamma). \tag{24}$$

Пусть $\tilde{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — такой элемент из $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$, для которого $\pi(\tilde{z}) = \theta$. Равенство (24) можно представить в виде

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, z_n)}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{d(y_n, z_n)}{r_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n},$$

откуда получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, z_n) - \frac{1}{2}d(x_n, y_n)}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{d(y_n, z_n) - \frac{1}{2}d(x_n, y_n)}{r_n} = 0,$$

что дает

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|d(x_n, z_n) - \frac{1}{2}d(x_n, y_n)\right| + \left|d(y_n, z_n) - \frac{1}{2}d(x_n, y_n)\right|}{r_n} = 0.$$

Отсюда, используя (22) и (9), находим

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(x_n, y_n, z_n) = 0.$$

Полученное соотношение противоречит (21). Таким образом, если все $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ являются геодезическими, то X срединно выпукло в точке p.

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Предположим, что любое предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является сепарабельным и касательным. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *X срединно выпукло в точке p*;

(ii) *любое $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является геодезическим.*

***Замечание* 3.** Примеры пространств, все предкасательные к которым являются сепарабельными и касательными, можно найти в [5]. Можно показать, что если X — выпуклое подмножество на плоскости, то любое касательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ изометрично наименьшему замкнутому выпуклому конусу с вершиной в точке p, включающему X (см. [6]), а следовательно, является геодезическим.

1. *Abdullayev F., Dovgoshey O., Küçükaslan M.* Compactness and boundedness of tangent spaces to metric spaces // Beitr. Algebra Geom. – 2010. – **51**, № 2. – P. 547 – 576.
2. *Bridson M., Haefliger A.* Metric spaces of non-positive curvature. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 645 p.
3. *Burago D., Burago Yu., Ivanov S.* A course in metric geometry. – Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2001. – 496 p.
4. *Deza E., Deza M.* Dictionary of distances. – Amsterdam: Elsevier, 2008. – 444 p.
5. *Dovgoshey O.* Tangent spaces to metric spaces and to their subspaces // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, № 4. – P. 459 – 477.
6. *Dovgoshey O., Abdullayev F., Küçükaslan M.* Tangent metric spaces to starlike sets on the plane // arXiv: 1203.0720 (math. MG).
7. *Dovgoshey O., Martio O.* Tangent spaces to metric spaces // Repts Math. – 2008. – **480**. – 20 p.
8. *Dovgoshey O., Martio O.* Tangent spaces to general metric spaces // Rev. roum. math. pures et appl. – 2011. – **56**, № 2. – P. 137 – 155.

Получено 05.04.12