УДК 517.98

Р. Я. Якимів (Нац. ун-т біоресурсів і природокористування України, Київ)

ЗОБРАЖЕННЯ КАНОНІЧНИХ АНТИКОМУТАЦІЙНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ З УМОВОЮ ОРТОГОНАЛЬНОСТІ

We study the class of Hilbert space representations of the $*$-algebra $A_0^{(d)}$ generated by relations of the form

$$A_0^{(d)} = \mathbb{C}\langle a_j, a_j^* \mid a_j^* a_j = 1 - a_j a_j^*,\ a_i^* a_j = 0,\ i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,d\rangle,$$

Namely, we describe the classes of unitary equivalence of irreducible representations of $A_0^{(d)}$ such that there exists $j = 1,\ldots,d$ for which $a_j^2 \neq 0$.

Изучается класс $*$-представлений $*$-алгебры $A_0^{(d)}$, порожденной соотношениями вида

$$A_0^{(d)} = \mathbb{C}\langle a_j, a_j^* \mid a_j^* a_j = 1 - a_j a_j^*,\ a_i^* a_j = 0,\ i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,d\rangle,$$

а именно, получено описание классов унитарной эквивалентности неприводимых $*$-представлений $A_0^{(d)}$ при условии существования $j = 1,\ldots,d$, для которого $a_j^2 \neq 0$.

1. Вступ. Канонічні антикомутаційні співвідношення квантової механіки, а також їх численні деформації та узагальнення є об'єктом інтенсивного вивчення протягом останніх десятиліть (див., наприклад, [1, 2, 6, 7, 10–12]). Також, починаючи з роботи [4], багато уваги приділяється вивченню операторних алгебр, породжених співвідношеннями з умовами ортогональності, та класифікації $*$-зображень таких алгебр. Зокрема, в статті [9] було класифіковано незвідні необмежені інтегровні зображення алгебри $O_q^{(d)}$, породженої твірними a_i, a_i^*, $i = 1,\ldots,d$, що задовольняють співвідношення

$$\begin{gathered} a_i^* a_i = 1 + q a_i a_i^*, \quad i = 1,\ldots,d, \\ a_i^* a_j = 0, \quad i \neq j, \end{gathered} \tag{1}$$

де параметр $q \in (0,1)$. Зауважимо, що при $q = 0$ ми одержуємо алгебру Кунца – Тьопліца, породжену ізометріями з ортогональними образами (див. [4]).

У цій роботі будемо вивчати зображення $*$-алгебри $A_0^{(d)}$, породженої твірними a_i, a_i^*, $i = 1,\ldots,d$, що задовольняють співвідношення

$$\begin{gathered} a_i^* a_i = 1 - a_i a_i^*, \quad i = 1,\ldots,d, \\ a_i^* a_j = 0, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,\ldots,d. \end{gathered} \tag{2}$$

Розглянемо випадок $d > 2$. Зауважимо, що на відміну від співвідношень з двома ступенями волі алгебра $A_0^{(d)}$ при $d > 2$ не є типу один. Щоб переконатись у цьому, розглянемо зображення $A_0^{(d)}$, що визначене на просторі $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ — гільбертів простір) за допомогою операторів

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = E_{21} \otimes \mathbf{1},$$

$$A_j = \begin{pmatrix} B_j & S_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} \otimes B_j + E_{12} \otimes S_j,$$

де оператори B_j, S_j, $j = 2, \ldots, d$, задовольняють співвідношення

$$B_i^* B_i = \mathbf{1} - B_i B_i^* - S_i S_i^*, \qquad B_i^2 = 0,$$

$$S_i^* S_i = \mathbf{1}, \qquad S_i^* B_i = 0, \qquad B_i S_i = 0, \tag{3}$$

$$B_i^* B_j = 0, \qquad S_i^* S_j = 0, \qquad S_i^* B_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 2, \ldots, d.$$

Легко довести, що зображення, визначене операторами A_j, $j = 2, \ldots, d$, є незвідним тоді й лише тоді, коли набір операторів $\mathcal{F} = \{B_j, B_j^*, S_j, S_j^*,\ j = 2, \ldots, d\}$ є незвідним на $\mathcal{K}$. Зображення, що відповідають сім'ям $\mathcal{F}_j$, $j = 1, 2$, є унітарно еквівалентними тоді й лише тоді, коли сім'ї $\mathcal{F}_1$ та $\mathcal{F}_2$ є унітарно еквівалентними.

Розглянемо C^*-алгебру G_d, породжену співвідношеннями (3). Така C^*-алгебра існує, оскільки множина $*$-зображень співвідношень (3) не є порожньою та в довільному зображенні $\|S_j\| = 1$, $\|B_j\| \leq 1$, $j = 2, \ldots, d$. Твірні S_j, $j = 2, \ldots, d$, породжують C^*-підалгебру, що ізоморфна алгебрі Кунца – Тьопліца $O_{d-1}^{(0)}$. Оскільки одиниця алгебри $O_{d-1}^{(0)}$ збігається з одиницею алгебри G_d та $O_{d-1}^{(0)}$ не має скінченновимірних зображень, можна зробити висновок, що G_d не має скінченновимірних зображень також. Звідси випливає (див. [3]), що C^*-алгебра G_d, а отже й C^*-алгебра $A_0^{(d)}$, не є типу один.

У цьому випадку потрібно виділяти „ручні" класи зображень. Виявляється, один із таких класів утворюють зображення, в яких часткова ізометрія з полярного розкладу образу хоча б однієї твірної містить унітарну частину. Зауважимо, що ця умова виконується тоді й лише тоді, коли для деякого $j = 1, \ldots, d$ образ a_j^2 не є нульовим оператором. Нижче ми наведемо опис усіх незвідних зображень такого типу з точністю до унітарної еквівалентності.

2. Попередні відомості. Спочатку нагадаємо опис незвідних зображень віківської версії канонічних антикомутаційних співвідношень з одним ступенем волі, тобто $*$-алгебри $\mathcal{A}_1$, породженої твірними a, a^*, що задовольняють співвідношення

$$a^* a = 1 - a a^*. \tag{4}$$

Очевидно, будь-яке $*$-зображення π співвідношень (4) є обмеженим, а саме, має місце оцінка $\|\pi(a)\| \leq 1$. Нагадаємо також, що C^*-алгебра, породжена співвідношеннями (4), є квантовим аналогом алгебри неперервних функцій на одиничному колі (див., наприклад, [7]).

Доведення наступного твердження можна знайти у книзі [8].

Теорема 1. *Будь-яке незвідне $*$-зображення алгебри $\mathcal{A}_1$ є унітарно еквівалентним одному з побудованих нижче*:

1) *фоківському зображенню*: π_F, *що діє на просторі* $\mathbb{C}^2$,

$$\pi_F(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

2) *регулярним зображенням*: $\pi_{x,\phi}$, *що діють на* $\mathbb{C}^2$,

$$\pi_{x,\phi}(a) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_1}\sqrt{1-x} \\ \sqrt{x} & 0 \end{pmatrix},$$

де $\phi \in [0, 2\pi)$ *та* $0 < x < \dfrac{1}{2}$ *фіксовані*;

3) *одновимірним зображенням*: ρ_ϕ, *що визначені на* $\mathbb{C}$,

$$\rho_\phi(a) = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}, \quad \phi \in [0, 2\pi).$$

Зображення різного типу, а також зображення одного й того ж типу, що відповідають різним значенням параметрів, не є унітарно еквівалентними.

Використовуючи опис незвідних зображень $\mathcal{A}_1$, можна одержати аналог розкладу Вольда для оператора $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, що задовольняє (4). А саме, розглянемо полярний розклад $A = UC$, де $C = (A^*A)^{1/2}$, U — часткова ізометрія та $\ker U = \ker C = \ker A$. Тоді простір $\mathcal{H}$ розкладається в ортогональну суму підпросторів

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_F \oplus \mathcal{H}_u,$$

інваріантних відносно A, A^*, U, U^* та C, до того ж звуження оператора A на $\mathcal{H}_F$ є кратним фоківського зображення та часткова ізометрія з полярного розкладу звуження A на $\mathcal{H}_u$ є унітарним оператором.

3. Опис незвідних зображень $A_0^{(d)}$ з нетривіальною унітарною частиною. Далі будемо говорити, що зображення π алгебри $A_0^{(d)}$ має нетривіальну унітарну частину, якщо існує $j = 1, \ldots, d$, для якого підпростір $\mathcal{H}_u$ з узагальненого розкладу Вольда оператора $\pi(a_j)$ є ненульовим. У цьому пункті ми дамо опис усіх таких зображень з точністю до унітарної еквівалентності.

Введемо деякі позначення. Для кожного $j = 1, \ldots, d$ покладемо

$$\Lambda_j = \Big\{\varnothing,\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_k),\ k \in \mathbb{N},\ \alpha_s = 1, \ldots, d,\ \alpha_k \neq j,\ \alpha_s \neq \alpha_{s+1}\Big\}.$$

Через Λ будемо позначати множину всіх скінченних впорядкованих наборів елементів з множини $\{1, \ldots, d\}$. Також будемо вважати, що $\varnothing \in \Lambda$. Побудуємо перетворення σ, $\sigma_j\colon \Lambda \to \Lambda$,

$$\sigma(\alpha) = (\alpha_2, \ldots, \alpha_k), \qquad \text{якщо} \quad |\alpha| > 1, \qquad \sigma\big((\alpha_1)\big) = \varnothing, \qquad \sigma(\varnothing) = \varnothing,$$

$$\sigma_j(\alpha) = (j, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \quad \sigma_j(\varnothing) = (j).$$

Нижче ми позначатимемо $\pi(a_j)$ через A_j. Для кожного $\alpha \in \Lambda_j$ позначатимемо через A_α добуток операторів $A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots A_{\alpha_k}$. Також покладемо $A_\varnothing = \mathbf{1}$.

Твердження 1. *Нехай оператори A_i, $i = 1, \ldots, d$, діють на просторі $\mathcal{H}$ та задовольняють співвідношення* (2). *Припустимо, що унітарна частина $\mathcal{H}_u$, що визначається узагальненим розкладом Вольда оператора A_1, є ненульовою. Тоді підпростір*

$$\mathcal{H}_1 = \overline{\langle\ A_\alpha x,\ x \in \mathcal{H}_u,\ \alpha \in \Lambda_1\ \rangle}$$

є інваріантним відносоно дії операторів A_j, A_j^*, $j = 1, \ldots, d$, та $\big(A_l^2\big)_{|\mathcal{H}_1} = 0$ для всіх $l \neq 1$.

Доведення. Нехай x належить $\mathcal{H}_u$. Тоді за означенням $\mathcal{H}_u$ маємо $A_1^* x, A_1 x \in \mathcal{H}_u \subset \mathcal{H}_1$.

Побудуємо полярні розклади $A_j = U_j C_j$, де U_j — часткова ізометрія, $C_j = \sqrt{A_j^* A_j}$ та $\ker C_j = \ker U_j = \ker A_j$, $j = 1, \ldots, d$. Із співвідношень $A_i^* A_j = 0$, $i \neq j$, випливає, що $U_j^* U_i = 0$, $i \neq j$. Дійсно,

$$C_i U_i^* U_j C_j = 0. \tag{5}$$

Оскільки $\ker C_j = \ker U_j$, із співвідношення (5) випливає, що $C_i U_i^* U_j = 0$. Застосувавши спряження, одержимо $U_j^* U_i C_i = 0$, та використавши умову $\ker C_i = \ker U_i$, остаточно дістанемо $U_j^* U_i = 0$.

Оскільки звуження U_1 на $\mathcal{H}_u$ є унітарним оператором, для кожного $x \in \mathcal{H}_u$ виконуються рівності

$$A_j^* x = C_j U_j^* U_1 U_1^* x = 0, \qquad \text{якщо} \quad j \neq 1. \tag{6}$$

Покажемо тепер, що для довільних $\alpha \in \Lambda_1$, $|\alpha| \geq 1$, та $x \in \mathcal{H}_u$

$$\begin{gathered} A_j A_\alpha x = (1 - \delta_{j\alpha_1}) A_{\sigma_j(\alpha)} x, \quad j = 1, \ldots, d, \\ A_j^* A_\alpha x = \delta_{j\alpha_1} A_{\sigma(\alpha)} x, \quad j = 1, \ldots, d. \end{gathered} \tag{7}$$

Дійсно, легко перевірити, що для кожного $j = 1, \ldots, d$ оператор A_j^2 є нормальним. Припустимо, що $\alpha \in \Lambda_j$, $\alpha = (j, \alpha_2, \ldots, \alpha_d)$. Тоді

$$\langle A_j A_\alpha x, A_j A_\alpha x \rangle = \langle A_j^2 A_{\sigma(\alpha)} x, A_j^2 A_{\sigma(\alpha)} x \rangle =$$

$$= \langle A_j^{*2} A_j^2 A_{\sigma(\alpha)} x, A_{\sigma(\alpha)} x \rangle = \langle A_j^2 A_j^{*2} A_{\sigma(\alpha)} x, A_{\sigma(\alpha)} x \rangle = 0,$$

де використано властивість $\alpha_2 \neq \alpha_1 = j$. Отже, якщо $\alpha_1 = j$, то

$$A_j A_\alpha x = 0,$$

звідки випливає перша з рівностей (7). Далі,

$$A_j^* A_\alpha x = A_j^* A_j A_{\sigma(\alpha)} x = (\mathbf{1} - A_j A_j^*) A_{\sigma(\alpha)} x = A_{\sigma(\alpha)} x,$$

звідки випливає друга з рівностей (7). Таким чином, інваріантність підпростору $\mathcal{H}_1$ доведено.

Твердження 1 доведено.

Лема 1. *Мають місце наступні властивості*:

1) *для довільних непорожніх* α, $\beta \in \Lambda_1$, $\alpha \neq \beta$, *та* x, $y \in \mathcal{H}_u$ *маємо* $\langle A_\alpha x, A_\beta y \rangle = 0$;

2) *якщо* x, $y \in \mathcal{H}_u$ *та* $\langle x, y \rangle = 0$, *то* $\langle A_\alpha x, A_\alpha y \rangle = 0$ *для всіх* $\alpha \in \Lambda_1$;

3) *якщо* $x \in \mathcal{H}_u$, $\|x\| = 1$, *то для довільного* $\alpha \in \Lambda_1$ *маємо* $\|A_\alpha x\| = 1$.

Доведення. Використаємо індукцію по довжині $\alpha \in \Lambda_1$.

1. Спочатку покажемо, що при довільних x, $y \in \mathcal{H}_u$ та непорожньому $\alpha \in \Lambda_1$ має місце рівність $\langle A_\alpha x, y \rangle = 0$. Дійсно, якщо $\alpha = (\alpha_1)$, то $\alpha_1 \neq 1$ та $\langle A_{\alpha_1} x, y \rangle = 0$. Якщо $|\alpha| \geq 2$ та $\alpha_1 \neq 1$, то

$$\langle A_\alpha x, y \rangle = \langle A_{\sigma(\alpha)} x, A_{\alpha_1}^* y \rangle = 0,$$

інакше

$$\langle A_\alpha x, y \rangle = \langle A_{\sigma(\alpha)} x, A_1^* y \rangle,$$

де $A_1^* y \in \mathcal{H}_u$. Отже, за індукцією по довжині α одержимо $\langle A_{\sigma(\alpha)} x, A_1^* y \rangle = 0$.

Нехай тепер $\alpha \neq \beta$, α, $\beta \in \Lambda_1$, $|\alpha|, |\beta| \geq 1$, та x, $y \in \mathcal{H}_u$. Тоді за допомогою індукції отримаємо

$$\langle A_\alpha x, A_\beta y\rangle = \langle A_{\sigma(\alpha)} x, A_{\alpha_1^*} A_\beta y\rangle = \langle A_{\sigma(\alpha)} x, \delta_{\alpha_1\beta_1} A_{\sigma(\beta)} y\rangle = 0.$$

2. Нехай $x, y \in \mathcal{H}_u$, $\alpha \in \Lambda_1$. Тоді

$$\langle A_\alpha x, A_\alpha y\rangle = \langle A_{\sigma(\alpha)} x, A_{\sigma(\alpha)} y\rangle = \ldots = \langle x, y\rangle,$$

звідки випливає справедливість тверджень 2 та 3 леми.

Лему 1 доведено.

З твердження 1 випливає, що якщо зображення $A_0^{(d)}$, визначене операторами A_i, $i = 1, \ldots, d$, на просторі $\mathcal{H}$, є незвідним та підпростір $\mathcal{H}_u$ з узагальненого розкладу Вольда оператора A_1 не дорівнює нулю, маємо рівність $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$. Залишилося вияснити, за яких умов дія операторів A_i, A_i^*, $i = 1, \ldots, d$, на $\mathcal{H}_1$ буде незвідною.

Твердження 2. *Нехай в зображенні $A_0^{(d)}$, яке визначене операторами A_i, A_i^*, $i = 1, \ldots, d$, на просторі $\mathcal{H}$, підпростір $\mathcal{H}_u$ в узагальненому розкладі Вольда оператора A_1 не дорівнює нулю. Зображення алгебри $A_0^{(d)}$, що задане звуженнями операторів A_i, A_i^* на $\mathcal{H}_1$, є незвідним тоді й лише тоді, коли набір $\{A_1, A_1^*\}$, звужений на $\mathcal{H}_u$, є незвідним.*

Доведення. 1. Покажемо спочатку, що якщо набір $\{A_1, A_1^*\}$ є звідним на $\mathcal{H}_u$, то набір $\{A_j, A_j^*, j = 1, \ldots, d\}$ є звідним на $\mathcal{H}_1$. Доведення випливає з твердження 1 та леми 1. Дійсно, припустимо, що зображення, визначене дією операторів A_1, A_1^* на $\mathcal{H}_u$, є звідним. Тоді існує розклад $\mathcal{H}_u$ в ортогональну суму нетривіальних підпросторів

$$\mathcal{H}_u = \mathcal{H}_u^{(1)} \oplus \mathcal{H}_u^{(2)},$$

інваріантних відносно A_1, A_1^*. Побудуємо підпростори

$$\mathcal{H}_1^{(s)} = \overline{\left\langle A_\alpha x,\ x \in \mathcal{H}_u^{(s)}, \alpha \in \Lambda_1\right\rangle} \subset \mathcal{H}_1, \quad s = 1, 2.$$

З формул (6), (7) випливає інваріантність $\mathcal{H}_1^{(s)}$, $s = 1, 2$, відносно A_j, A_j^*, $j = 1, \ldots, d$, тоді як з леми 1 випливає, що $\mathcal{H}_1^{(1)}$ є ортогональним до $\mathcal{H}_1^{(2)}$. Таким чином, звуження операторів A_j, A_j^*, $j = 1, \ldots, d$, на $\mathcal{H}_1$ визначають звідне зображення $A_0^{(d)}$.

2. Доведемо, що у випадку, коли набір $\{A_1, A_1^*\}$ є незвідним на $\mathcal{H}_u$, набір $\{A_i, A_i^*, i = 1, \ldots, d\}$ є незвідним на $\mathcal{H}_1$. Використаємо лему Шура.

З незвідності $\{A_1, A_1^*\}$ на $\mathcal{H}_u$ випливає, що

$$\dim \mathcal{H}_u = 1 \qquad \text{або} \qquad \dim \mathcal{H}_u = 2.$$

В першому випадку $(A_1)_{|\mathcal{H}_u} = \dfrac{e^{i\phi_1}}{\sqrt{2}}$. Якщо $\dim \mathcal{H}_u = 2$, то в деякому ортонормованому базисі $e_\varnothing^{(1)}$, $e_\varnothing^{(2)}$ маємо

$$A_1 e_\varnothing^{(1)} = \sqrt{1 - x_1}\, e_\varnothing^{(2)}, \qquad A_1 e_\varnothing^{(2)} = e^{i\phi_1} \sqrt{x_1}\, e_\varnothing^{(1)},$$

де $x_1 \in (0, 1/2)$ та $\phi_1 \in [0, 2\pi)$ фіксовані.

Оскільки $(A_1^2)_{|\mathcal{H}_u^\perp} = 0$, підпростір $\mathcal{H}_u$ є власним для оператора A_1^2, що відповідає власному числу $\dfrac{e^{i2\phi_1}}{2}$, якщо $\dim \mathcal{H}_u = 1$, та числу $e^{i\phi_1}\sqrt{x_1(1-x_1)}$ при $\dim \mathcal{H}_u = 2$. Крім того, $e_\varnothing^{(1)}$ породжує власний підпростір оператора $C_1^2 = A_1^* A_1$, що відповідає числу $1 - x_1$, а вектор $e_\varnothing^{(2)}$ є власним вектором C_1^2 з числом x_1.

Нехай $\mathcal{H}_u = \langle e_\varnothing \rangle$, де через $e_\varnothing \in \mathcal{H}_u$ позначено деякий одиничний вектор. З твердження 1 та леми 1 випливає, що вектори $e_\alpha = A_\alpha e_\varnothing$, $\alpha \in \Lambda_1$, утворюють ортонормований базис $\mathcal{H}_1$. Аналогічно, якщо $\mathcal{H}_u = \mathbb{C}\langle e_\varnothing^{(1)}, e_\varnothing^{(2)} \rangle$, вектори $e_\alpha^{(j)} = A_\alpha e_\varnothing^{(j)}$, $\alpha \in \Lambda_1$, $j = 1, 2$, утворюють ортонормований базис $\mathcal{H}_1$.

Нехай тепер самоспряжений $C \in B(\mathcal{H}_1)$ комутує з усіма A_j, A_j^*, $j = 1, \ldots, d$. Припустимо спочатку, що $\dim \mathcal{H}_u = 1$. Тоді $Ce_\varnothing$ є власним вектором A_1, що відповідає власному числу $\dfrac{e^{i\phi_1}}{\sqrt{2}}$. Оскільки для кожного $x \in \mathcal{H}_u^\perp \subset \mathcal{H}_1$ має місце рівність $A_1^2 x = 0$, можна зробити висновок, що $Ce_\varnothing = c \cdot e_\varnothing$ для деякого $c \in \mathbb{R}$. Тоді з рівності $CA_\alpha = A_\alpha C$, $\alpha \in \Lambda_1$, випливає, що

$$Ce_\alpha = CA_\alpha e_\varnothing = A_\alpha C e_\varnothing = cA_\alpha e_\varnothing = ce_\alpha.$$

Отже, $C = c \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{H}_1}$ та набір $\{A_j, A_j^*,\ j = 1, \ldots, d\}$ є незвідним на $\mathcal{H}_1$.

Тепер припустимо, що $\dim \mathcal{H}_u = 2$. Тоді $Ce_\varnothing^{(1)} = c_1 e_\varnothing^{(1)}$, $Ce_\varnothing^{(2)} = c_2 e_\varnothing^{(2)}$ та із співвідошення $CA_1 = A_1 C$ і рівності $A_1 e_\varnothing^{(1)} = \sqrt{1 - x_1} e_\varnothing^{(2)}$ випливає, що $c_2 = c_1$. Далі, міркуючи, як у попередньому випадку, одержуємо $C = c \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{H}_1}$ отже, і в другому випадку зображення, визначене дією A_j, A_j^*, $j = 1, \ldots, d$, на підпросторі $\mathcal{H}_1$, є незвідним.

Твердження 2 доведено.

Підсумовуючи отримані вище результати, одержуємо опис усіх незвідних зображень $A_0^{(d)}$ з умовою нетривіальності унітарної частини узагальненого розкладу Вольда хоча б одного з образів твірних.

Теорема 2. *Припустимо, що набір* $\{A_j, A_j^*, j = 1, \ldots, d\}$ *визначає незвідне зображення* $A_0^{(d)}$ *на просторі* $\mathcal{H}$ *та для оператора* A_k *унітарна частина* H_u *з узагальненого розкладу Вольда є ненульовою. Тоді* $\dim \mathcal{H}_u = 1$ *або* $\dim \mathcal{H}_u = 2$ *та з точністю до унітарної еквівалентності*:

1. *Простір* $\mathcal{H}$ *породжений ортонормованим базисом* e_α, $\alpha \in \Lambda_k$, *та для деякого* $\phi_k \in \in [0, 2\pi)$

$$A_k e_\varnothing = \frac{e^{i\phi_k}}{\sqrt{2}} \cdot e_\varnothing, \qquad A_k^* e_\varnothing = \frac{e^{-i\phi_k}}{\sqrt{2}} \cdot e_\varnothing,$$

$$A_k e_\alpha = (1 - \delta_{k\alpha_1}) \cdot e_{\sigma_k(\alpha)}, \qquad A_k^* e_\alpha = \delta_{k\alpha_1} e_{\sigma(\alpha)},$$

$$A_j e_\alpha = (1 - \delta_{j\alpha_1}) e_{\sigma_j(\alpha)}, \qquad A_j^* e_\alpha = \delta_{j\alpha_1} e_{\sigma(\alpha)}, \quad j \neq k,$$

$$A_j e_\varnothing = e_{(j)}, \quad A_j^* e_\varnothing = 0, \quad j \neq k.$$

Зображення, що відповідають різним $k = 1, \ldots, d$ *або різним* $\phi_k \in [0, 2\pi)$, *є нееквівалентними.*

2. *Простір* $\mathcal{H}$ *породжений ортонормованим базисом* $e_{\alpha}^{(1)}$, $e_{\alpha}^{(2)}$, $\alpha \in \Lambda_k$, *та для фіксованих* $x_k \in (0, 1/2)$, $\phi_k \in [0, 2\pi)$

$$A_k e_{\varnothing}^{(1)} = \sqrt{1 - x_k} \cdot e_{\varnothing}^{(2)}, \qquad A_k e_{\varnothing}^{(2)} = e^{i\phi_k} \sqrt{x_k} \cdot e_{\varnothing}^{(1)},$$

$$A_k^* e_{\varnothing}^{(1)} = e^{-i\phi_k} \sqrt{x_k} \cdot e_{\varnothing}^{(2)}, \qquad A_k^* e_{\varnothing}^{(2)} = \sqrt{1 - x_k} \cdot e_{\varnothing}^{(1)},$$

$$A_k e_{\alpha}^{(r)} = (1 - \delta_{k\alpha_1}) \cdot e_{\sigma_k(\alpha)}^{(r)}, \qquad A_k^* e_{\alpha}^{(r)} = \delta_{k\alpha_1} e_{\sigma(\alpha)}^{(r)}, \quad r = 1, 2,$$

$$A_j e_{\alpha}^{(r)} = (1 - \delta_{j\alpha_1}) e_{\sigma_j(\alpha)}^{(r)}, \qquad A_j^* e_{\alpha}^{(r)} = \delta_{j\alpha_1} e_{\sigma(\alpha)}^{(r)}, \quad j \neq k, \quad r = 1, 2,$$

$$A_j e_{\varnothing}^{(r)} = e_{(j)}^{(r)}, \qquad A_j^* e_{\varnothing}^{(r)} = 0, \quad j \neq k, \quad r = 1, 2.$$

Зображення, що відповідають різним k *чи різним парам* (x_k, ϕ_k), *не еквівалентні.*

Доведення. Очевидно, що зображення, в яких $\dim \mathcal{H}_u$ набуває різних значень, не є еквівалентними.

Зображення, в яких $\dim \mathcal{H}_u = 1$, що відповідають різним значенням k, не еквівалентні, оскільки при фіксованому k маємо $A_k^2 \neq 0$, $A_j^2 = 0$, $j \neq k$. Зображення, що відповідають одному й тому ж значенню k та різним $\phi_k \in [0, 2\pi)$ не еквівалентні, оскільки $\dfrac{e^{i\phi_k}}{\sqrt{2}}$ є єдиним ненульовим власним числом оператора A_k.

Випадок $\dim \mathcal{H}_u = 2$ розглядається аналогічно.

Теорему 2 доведено.

1. *Проскурін Д. П., Сукретний К. М.* Про $*$-зображення деформацій CAR // Укр. мат. журн. – 2010. – **60**, № 2. – С. 203 – 214.
2. *Albeverio S., Proskurin D., Turowska L.* On $*$-representations of a deformation of a Wick analogue of the CAR algebra // Rept. Math. Phys. – 2005. – **56**, № 2. – P. 175 – 196.
3. *Bunce J.* Representations of strongly amenable C*-algebras // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – **32**. – P. 241 – 246.
4. *Cuntz J.* Simple C^*-algebras generated by isometries // Communs Math. Phys. – 1977. – **57**. – P. 173 – 185.
5. *Murphy G. J.* C^*-algebras and operator theory. – Boston: Acad. Press, 1990. – 286 p.
6. *Nagy G.* On the K-theory of the non-commutative circle // J. Oper. Theory. – 1994. – **31**. – P. 303 – 309.
7. *Nagy G., Nica A.* On the quantum disk and non-commutative circle // Algebraic Methods in Operator Theory / Eds P. E. T. Jorgensen, R. Curto. – Boston: Birkhäuser, 1994. – P. 276 – 290.
8. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representations of finitely presented algebras // Rev. Math. and Math. Phys. – 2000. – Vol. 11. – 261 p.
9. *Ostrovskyi V., Proskurin D., Turowska L.* Unbounded representations of q-deformation of Cuntz algebra // Lett. Math. Phys. – 2008. – **85**, № 2 – 3. – P. 147 – 162.
10. *Proskurin D.* Homogeneous ideals in Wick $*$-algebras // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – **126**, № 11. – P. 3371 – 3376.
11. *Proskurin D., Savcnuk Yu., Turowska L.* On C^*-algebras generated by some deformations of CAR relations // Contemp. Math. – 2005. – **391**. – P. 297 – 312.
12. *Pusz W.* Twisted canonical anticommutation relations // Repts Math. Phys. – 1989. – **27**. – P. 349 – 360.

Одержано 29.05.12