УДК 515.14

С. И. Максименко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ТИПЫ ПРАВЫХ СТАБИЛИЗАТОРОВ И ОРБИТ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ*

Let M be a smooth connected compact surface, P be either the real line $\mathbb{R}$ or a circle S^1. For a subset $X \subset M$, let $\mathcal{D}(M, X)$ denote the group of diffeomorphisms of M fixed on X. In this note, we consider a special class $\mathcal{F}$ of smooth maps $f\colon M \to P$ with isolated singularities that contains all Morse maps. For each map $f \in \mathcal{F}$, we consider certain submanifolds $X \subset M$ that are "adopted" with f in a natural sense, and study the right action of the group $\mathcal{D}(M, X)$ on $C^\infty(M, P)$. The main result describes the homotopy types of the connected components of the stabilizers $\mathcal{S}(f)$ and orbits $\mathcal{O}(f)$ for all maps $f \in \mathcal{F}$. It extends previous results of the author on this topic.

Нехай M — гладка зв'язна компактна поверхня і P — числова пряма $\mathbb{R}$ або коло S^1. Для підмножини $X \subset M$ позначимо через $\mathcal{D}(M, X)$ групу дифеоморфізмів M, нерухомих на X. У даній статті розглядається спеціальний клас $\mathcal{F}$ гладких відображень $f\colon M \to P$ з ізольованими критичними точками, який містить усі відображення Морса. Для кожного $f \in \mathcal{F}$ визначаються деякі підмноговиди $X \subset M$, природним чином „адаптовані" з f, та вивчається права дія групи $\mathcal{D}(M, X)$ на $C^\infty(M, P)$. Основні результати описують гомотопічні типи компонент зв'язності стабілізаторів $\mathcal{S}(f)$ та орбіт $\mathcal{O}(f)$ відображень $f \in \mathcal{F}$ і узагальнюють результати попередніх робіт автора.

1. Введение. Пусть M — гладкая связная компактная поверхность и P — числовая прямая $\mathbb{R}$ либо окружность S^1. В данной работе будем рассматривать подпространство $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^\infty(M, P)$, состоящее из отображений $f\colon M \to P$, удовлетворяющих следующим двум аксиомам.

Аксиома (B1). *Множество Σ_f критических точек f конечно и содержится во внутренности* $\mathrm{Int}M$ *поверхности M, а f принимает постоянные значения на компонентах границы M.*

Аксиома (L1). *Для каждой критической точки z отображения f существует локальное представление f в виде $f_z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такое, что $z = (0, 0)$ и f_z является однородным многочленом без кратных множителей.*

В частности, согласно лемме Морса, в окрестности невырожденной критической точки функция $f\colon M \to P$ эквивалентна однородному многочлену $\pm x^2 \pm y^2$, который, очевидно, не имеет кратных множителей. Поэтому каждая функция Морса удовлетворяет аксиоме (L1).

Напомним, что однородный многочлен $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ может быть представлен в виде произведения $g = L_1^{p_1} \ldots L_\alpha^{p_\alpha} Q_1^{q_1} \ldots Q_\beta^{q_\beta}$, где $L_i(x, y) = a_i x + b_i y$, а $Q_j(x, y) = c_j x^2 + 2d_j xy + e_j y^2$ — неприводимая над $\mathbb{R}$ (определенная) квадратичная форма, причем $L_i / L_{i'} \neq \mathrm{const}$ для $i \neq i'$ и $Q_j / Q_{j'} \neq \mathrm{const}$ для $j \neq j'$. Аксиома (L1) требует, чтобы $p_i = q_j = 1$ для всех i, j.

Отметим, что если $p_i \geq 2$ для некоторого i, то вся прямая $\{L_i = 0\}$ состоит из критических точек f. Поэтому из аксиомы (L1) следует, что все критические точки f изолированы. Более того, требование $q_j = 1$ для всех j гарантирует некоторую „невырожденность".

Определение 1.1. *Пусть $X \subset M$ — компактное подмногообразие, компоненты связности которого могут иметь различные размерности, X^i, $i = 0, 1, 2,$ — объединение связных компонент X размерности i, $f\colon M \to P$ — какое-нибудь гладкое отображение, удовлетворяющее аксиоме* (B1). *Скажем, что X является f-адаптированным, если выполнены следующие условия*:

---

*Частично поддержана грантом Министерства образования и науки, молодежи и спорта Украины No M/150-2009 и грантом Государственного фонда фундаментальных исследований Украины № Ф40.1/009.

© С. И. МАКСИМЕНКО, 2012

(0) $X^0 \subset \Sigma_f$;

(1) $X^1 \cap \Sigma_f = \varnothing$ *и* f *принимает постоянные значения на компонентах связности* X^1;

(2) *ограничение* $f|_{X^2}$ *удовлетворяет аксиоме* (B1).

Например, следующие множества и их компоненты связности являются f-*адаптированными*: $\varnothing$, ∂M, Σ_f, $f^{-1}(c)$, где $c \in P$ — регулярное значение f, и $f^{-1}(I)$, где $I \subset P$ — замкнутый интервал, оба конца которого являются регулярными значениями f.

Пусть $X \subset M$ — f-адаптированное подмногообразие и $\mathcal{D}(M,X)$ — группа диффеоморфизмов M, неподвижных на X. Наделим $\mathcal{D}(M,X)$ и $\mathcal{C}^\infty(M,P)$ топологиями $\mathcal{C}^\infty$. Тогда $\mathcal{D}(M,X)$ непрерывно действует на $\mathcal{C}^\infty(M,P)$ справа по формуле

$$f \cdot h = f \circ h, \qquad h \in \mathcal{D}(M,X), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M,P). \tag{1.1}$$

Поэтому для каждого отображения $f \in \mathcal{C}^\infty(M,P)$ можно определить его стабилизатор $\mathcal{S}(f,X) = \{h \in \mathcal{D}(M,X) \mid f \circ h = f\}$ и орбиту $\mathcal{O}(f,X) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M,X)\}$ относительно данного действия. Обозначим через $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X)$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f,X)$ компоненты связности групп $\mathcal{D}(M,X)$ и $\mathcal{S}(f,X)$, содержащие тождественное отображение, а через $\mathcal{O}_f(f,X)$ компоненту связности f в $\mathcal{O}(f,X)$.

Мы будем опускать обозначения для X в случае, когда $X = \varnothing$. Например, $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f) = \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f,\varnothing)$ и т. д.

В работах [1 – 4] для случаев $X = \varnothing$ и $X = \Sigma_f$ вычислены гомотопические типы $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f,X)$ и $\mathcal{O}_f(f,X)$ для широкого класса отображений $f\colon M \to P$, который содержит все отображения, удовлетворяющие аксиомам (B1) и (L1). В частности, он содержит все отображения Морса.

Цель данной работы — обобщить эти результаты на случай группы $\mathcal{D}(M,X)$, где X — произвольное f-адаптированное подмногообразие.

Обозначения. Везде в работе $T^2 = S^1 \times S^1$ — двумерный тор, $M\ddot{o}$ — лист Мебиуса и $\mathbb{K}$ — бутылка Клейна. Для топологических пространств X и Y запись $X \cong Y$ означает, что X и Y гомотопически эквивалентны.

Пусть $f\colon M \to P$ — отображение, $c \in P$ и ω — связная компонента множества уровня $f^{-1}(c)$. Будем говорить, что ω является *критической*, если она содержит критическую точку f. В противном случае ω будем называть *регулярной*. Обозначим через Δ_f сингулярное слоение на M, элементы которого — критические точки f и связные компоненты множеств $f^{-1}(c) \setminus \Sigma_f$, где $c \in P$ (см. [1, 3]).

Для векторного поля F на M и гладкой функции $\alpha\colon M \to \mathbb{R}$ будем обозначать через $F(\alpha)$ производную Ли α вдоль F.

2. Основные результаты. В этом пункте будем предполагать, что $f\colon M \to P$ — гладкое отображение, удовлетворяющее аксиомам (B1) и (L1), а $X \subset M$ — f-адаптированное подмногообразие. Ниже мы сформулируем основные результаты данной работы — теоремы 2.1 – 2.4. Они являются новыми только для случая, когда X *бесконечно*.

Гомотопический тип $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$. Согласно теореме 1.9 из [1] и теореме 1.3 из [3] тождественная компонента стабилизатора $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ стягиваема, за исключением следующих четырех типов функций:

(A) $f_A : S^2 \to P$, имеющей только две критические точки — максимум и минимум, и обе они невырождены;

(B) $f_B : D^2 \to P$, имеющей единственную критическую точку — максимум или минимум, и эта точка невырождена;

(C) $f_C : S^1 \times I \to P$ без критических точек;

(D) $f_D : T^2 \to S^1$ без критических точек.

Для этих функций $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ гомотопически эквивалентна окружности S^1.

Теорема 2.1 (ср. с [1, 3]). $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X) \cong S^1$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

(i) $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f) \cong S^1$, *т. е.* f *принадлежит одному из типов* (A)–(D),

(ii) $X \subset \Sigma_f$.

Во всех остальных случаях группа $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ *стягиваема.*

Доказательство этой теоремы приведено в п. 4.

Гомотопический тип $\mathcal{O}_f(f, X)$. Покажем, что для описания гомотопического типа $\mathcal{O}_f(f, X)$ можно предполагать, что $\partial M \subset X$. Нам будет необходим следующий технический результат.

Теорема 2.2. *Отображение* $p : \mathcal{D}(M, X) \to \mathcal{O}(f, X)$, *заданное формулой* $p(h) = f \circ h$ *для* $h \in \mathcal{D}(M, X)$, *является расслоением Серра.*

Для $X = \varnothing$ орбита $\mathcal{O}(f)$ имеет „конечную коразмерность” в пространстве всех гладких отображений. Для этого случая теорема 2.2 доказана в [5] (см. также лемму 11 из [3], где установлена конечная коразмерность $\mathcal{O}(f)$). Доказательство теоремы 2.2 приведено в п. 5.

***Следствие* 2.1.** *Пусть* Y — (*возможно пустое*) *объединение произвольных связных компонент* ∂M, *так что* $X \cup Y$ *является* f*-адаптированным подмногообразием* M. *Тогда* $\mathcal{O}_f(f, X \cup \cup Y) = \mathcal{O}_f(f, X)$.

Доказательство. Можно считать, что $X \cap Y = \varnothing$. В противном случае заменим Y на $Y \setminus X$.

Очевидно, что $\mathcal{O}_f(f, X \cup Y) \subset \mathcal{O}_f(f, X)$.

Наоборот, пусть $g \in \mathcal{O}_f(f, X)$, т. е. существует путь $\omega : I \to \mathcal{O}(f, X)$ такой, что $\omega_0 = f$ и $\omega_1 = g$. Поскольку p — расслоение Серра, ω поднимается до пути $\widetilde{\omega} : I \to \mathcal{D}(M, X)$ такого, что $\widetilde{\omega}_0 = \mathrm{id}_M$ и $\omega_t = f \circ \widetilde{\omega}_t$. В частности, $g = \omega_1 = f \circ \widetilde{\omega}_1$.

Так как $\widetilde{\omega}_1$ изотопен id_M относительно X, ω_1 оставляет инвариантными связные компоненты Y. Поэтому, используя аксиому (B1), легко построить диффеоморфизм $h \in \mathcal{D}(M, X)$ такой, что $h = \widetilde{\omega}_1$ в некоторой окрестности Y и $f \circ h = f$. Следовательно, $h^{-1} \circ \widetilde{\omega}_1 \in \mathcal{D}(M, X \cup Y)$ и $g = f \circ \widetilde{\omega}_1 = f \circ h^{-1}\widetilde{\omega}_1 \in \mathcal{O}_f(f, X \cup Y)$.

Лемма 2.1 [6–10]. *Гомотопические типы* $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)$ *представлены в следующей таблице*:

№ п/п	(M, X)	Гомотопический тип $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)$
1	S^2, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$	$SO(3)$
2	T^2	T^2
3	$(S^2, *)$, $(S^2, **)$, $\mathbb{K}$	S^1
4	$(D^2, *)$, D^2, $S^1 \times I$, Mö	S^1
5	остальные случаи	точка

Здесь $*$ *— точка, а* $(S^2, **)$ *означает, что* X *состоит из двух точек. Мы также опускаем обозначение для* X, *если* $X = \varnothing$, *например* $S^2 = (S^2, \varnothing)$ *и т. д.*

В частности, если $\chi(M)$ *меньше мощности* X, *например когда* X *бесконечно, то* $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)$ *стягиваема.*

***Замечание* 2.1.** В третьем и четвертом случаях гомотопические типы $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)$ одинаковы, но мы различаем эти случаи по наличию границы в M : в третьем случае M замкнута, а в четвертом — нет.

Обозначим

$$\mathcal{S}'(f, X) := \mathcal{S}(f, X) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X).$$

Таким образом, $h \in \mathcal{S}'(f, X)$ тогда и только тогда, когда h сохраняет f и изотопен id_M, хотя эта изотопия не обязательно сохраняет f. Мы сейчас увидим, что в большинстве случаев группа $\mathcal{S}'(f, X)$ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1\mathcal{O}_f(f, X)$. Отметим, что $\pi_0\mathcal{S}'(f, X)$ является ядром гомоморфизма

$$i_0 \colon \pi_0\mathcal{S}(f, X) \to \pi_0\mathcal{D}(M, X),$$

индуцированного вложением $i \colon \mathcal{S}(f, X) \subset \mathcal{D}(M, X)$.

Теорема 2.3. *Для* $n \geq 2$ *имеют место изоморфизмы*

$$\pi_n\mathcal{O}_f(f, X) = \pi_n\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X). \tag{2.1}$$

Таким образом, если $(M, X) = (S^2, \varnothing)$ *или* $(\mathbb{R}\mathrm{P}^2, \varnothing)$, *то* $\pi_n\mathcal{O}_f(f, X) = \pi_n S^2$ *для* $n \geq 3$ *и* $\pi_2\mathcal{O}_f(f, X) = 0$. *В противном случае* $\pi_n\mathcal{O}_f(f, X) = 0$, $n \geq 2$, *т. е. орбита* $\mathcal{O}_f(f, X)$ *асферична.*

Более того, имеет место точная последовательность

$$0 \to \frac{\pi_1\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)}{\pi_1\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)} \xrightarrow{p_1} \pi_1\mathcal{O}_f(f, X) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0\mathcal{S}'(f, X) \to 0. \tag{2.2}$$

В частности, в случае 5, *когда группа* $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)$ *стягиваема, получаем изоморфизм*

$$\pi_1\mathcal{O}_f(f, X) \approx \pi_0\mathcal{S}'(f, X). \tag{2.3}$$

В случае 4 *обозначим* $Y = X \cup \partial M$. *Тогда*

$$\pi_1\mathcal{O}_f(f, X) = \pi_1\mathcal{O}(f, Y) \approx \pi_0\mathcal{S}'(f, Y). \tag{2.4}$$

Доказательство. Докажем (2.1). Предположим, что группа $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f,X)$ стягиваема. Тогда из точной последовательности гомотопических групп расслоения $p\colon \mathcal{D}(M,X) \to \mathcal{O}(f,X)$ получаем $\pi_n\mathcal{O}_f(f,X) = \pi_n\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X)$ для $n \geq 2$.

Предположим теперь, что $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f,X) \cong S^1$. Тогда из той же точной последовательности следует, что $\pi_n\mathcal{O}_f(f,X) = \pi_n\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X)$ для $n \geq 3$, а для $n = 2$ имеем точную последовательность

$$0 \to \pi_2\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X) \xrightarrow{p_2} \pi_2\mathcal{O}_f(f,X) \xrightarrow{\partial_2} \pi_1\mathcal{S}(f,X) \xrightarrow{i_1} \pi_1\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X).$$

В доказательстве теоремы 1.9 из [1] показано, что отображение i_1 является мономорфизмом. Следовательно, $\pi_2\mathcal{O}_f(f,X) = \pi_2\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X)$. Остается отметить, что точные значения групп $\pi_n\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X)$ указаны в лемме 2.1.

Докажем (2.2). Поскольку $\pi_2\mathcal{O}_f(f,X) = 0$, получим точную последовательность

$$0 \to \pi_1\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f,X) \xrightarrow{i_1} \pi_1\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X) \xrightarrow{p_1} \pi_1\mathcal{O}_f(f,X) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0\mathcal{S}(f,X) \xrightarrow{i_0} \pi_0\mathcal{D}(M,X),$$

из которой и следует (2.2).

Наконец, (2.3) следует из (2.2), а (2.4) — из (2.2) и следствия 2.1.

Теорема доказана.

Фундаментальная группа $\boldsymbol{\pi_1\mathcal{O}_f(f,X)}$. Следующая теорема показывает, что вычисление $\pi_1\mathcal{O}_f(f,X)$ почти всегда сводится к случаю, когда M является одной из поверхностей D^2, $S^1\times I$ или Mö. Этот результат обобщает теорему 1.8 из [4] на случай, когда множество X бесконечно, т. е. $\dim X \geq 1$.

Теорема 2.4 (ср. с теоремой 1.8 [4])**.** *Предположим, что выполнено одно из следующих условий*:

(i) $\partial M \neq \varnothing$;

(ii) $\chi(M) < 0$;

(iii) X *бесконечно.*

Тогда существует конечное множество f-адаптированных попарно дизъюнктных поверхностей $B_1,\ldots,B_n \subset M$, имеющих следующие свойства:

1) $\mathrm{Int}B_i \cap X \subset X^0$;

2) B_i *диффеоморфна* D^2, $S^1\times I$ *или* Mö *для каждого* $i = 1,\ldots,n$;

3) *пусть* $Y_i = \partial B_i \cup (B_i \cap X^0)$, *тогда*

$$\pi_1\mathcal{O}_f(f,X) \approx \prod_{i=1}^{n} \pi_0\mathcal{S}'(f|_{B_i}, Y_i). \tag{2.5}$$

Остальная часть работы посвящена доказательству теорем 2.1, 2.2 и 2.4.

В следующем пункте будут введены три дополнительные аксиомы (B2) – (B4) для отображения $f\colon M \to P$, которые являются следствиями аксиом (B1) и (L1). Затем в пп. 4 и 5 мы докажем теоремы 2.1 и 2.2 для более широкого класса отображений, удовлетворяющих аксиомам (B1) – (B4). Теорема 2.4 будет доказана в п. 6.

3. Аксиомы для отображения $\boldsymbol{f\colon M \to P}$. Пусть $f\colon M \to P$ — гладкое отображение, удовлетворяющее аксиоме (B1). Для векторного поля F на M, касательного к ∂M, обозначим через $\mathbf{F}\colon M\times\mathbb{R} \to M$ его поток, а через $\varphi\colon \mathcal{C}^\infty(M,P) \to \mathcal{C}^\infty(M,M)$ — *отображение сдвига*, заданное формулой

$$\varphi(\alpha)(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$$

для $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M, P)$ и $x \in M$.

Скажем, что векторное поле F на M *косоградиентно* относительно f, если производная Ли $F(f) \equiv 0$, причем $F(z) = 0$ тогда и только тогда, когда z является критической точкой f. В частности, f постоянна вдоль орбит F.

Пусть M — неориентируемая компактная поверхность. Тогда через $\beta\colon \widetilde{M} \to M$ будем обозначать ориентируемое двулистное накрытие M, а через $\xi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ — обращающую ориентацию инволюцию, которая порождает группу $\mathbb{Z}_2$ накрывающих трансформаций $\widetilde{M}$.

Для $\mathcal{C}^\infty$-отображения $f\colon M \to P$ положим $\widetilde{f} = \beta \circ f\colon \widetilde{M} \to P$ и обозначим через $\widetilde{\mathcal{D}}(\widetilde{M})$ группу диффеоморфизмов $\widetilde{M}$, коммутирующих с ξ, т. е. $\tilde{h} \circ \xi = \xi \circ \tilde{h}$ для всех $\tilde{h} \in \widetilde{\mathcal{D}}(\widetilde{M})$. Пусть также $\widetilde{\mathcal{S}}(\widetilde{f}) = \{\tilde{h} \in \widetilde{\mathcal{D}}(\widetilde{M}) \mid \widetilde{f} \circ \tilde{h} = \widetilde{f}\}$ — стабилизатор $\widetilde{f}$ относительно правого действия группы $\widetilde{\mathcal{D}}(\widetilde{M})$, а $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{f})$ — его тождественная компонента связности.

Отметим, что каждый $\tilde{h} \in \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{M})$ индуцирует единственный диффеоморфизм $h\colon M \to M$ так, что соответствие $\tilde{h} \mapsto h$ является гомеоморфизмом

$$\nu\colon \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{M}) \to \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M),$$

который, в свою очередь, дает гомеоморфизм $\nu\colon \widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{f}) \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$.

Аксиома (B2). *Предположим, что поверхность M ориентируема. Тогда на M существует косоградиентное относительно f векторное поле F, для которого справедливы следующие утверждения*:

1. *Пусть $\Gamma = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \mid F(\alpha) > -1\}$. Тогда $\varphi(\Gamma) = \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$.*

2. *Если f имеет критическую точку, которая либо является вырожденным локальным экстремумом, либо не является локальным экстремумом, то $\varphi|_\Gamma\colon \Gamma \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ — гомеоморфизм относительно $\mathcal{C}^\infty$-топологий. Поскольку множество Γ, очевидно, выпукло, группа $S_{\mathrm{id}}(f)$ стягиваема.*

В противном случае $\varphi|_\Gamma\colon \Gamma \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ является $\mathbb{Z}$-накрывающим отображением и $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f) \cong S^1$. В этом случае существует строго положительная функция $\theta \in \Gamma$ такая, что для любых $\alpha, \beta \in \Gamma$ условие $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ равносильно тому, что $\alpha - \beta = n\theta$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.

Если M неориентируема, то на $\widetilde{M}$ существует косоградиентное относительно $\widetilde{f}$ векторное поле F, для которого справедливы следующие утверждения:

1. *F кососимметрично относительно ξ в том смысле, что $\xi^* F = -F$. Это условие эквивалентно соотношению $\mathbf{F}_\theta \circ \xi = \xi \circ \mathbf{F}_{-\theta}$ для всех $\theta \in \mathbb{R}$.*

2. *Пусть $\widetilde{\Gamma} = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R}) \mid F(\alpha) > -1,\ \alpha \circ \xi = -\alpha\}$. Тогда $\varphi(\widetilde{\Gamma}) = \widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{f})$, а ограничение отображения сдвига $\varphi\colon \widetilde{\Gamma} \to \widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{f})$ является гомеоморфизмом относительно $\mathcal{C}^\infty$-топологий. Поэтому $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{f})$, а значит, и $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f) = \nu\big(\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{f})\big)$. Поскольку множество $\widetilde{\Gamma}$, очевидно, выпукло, эти группы стягиваемы.*

Аксиома (B3). *Отображение $p\colon \mathcal{D}(M) \to \mathcal{O}(f)$, заданное формулой $p(h) = f \circ h$ для $h \in \mathcal{D}(M)$, является расслоением Серра.*

Аксиома (B4). *Пусть $Y \subset M$ — такая подповерхность, что ограничение $f|_Y$ удовлетворяет аксиоме* (B1). *Если f удовлетворяет аксиомам* (B2) *и* (B3)*, то эти же аксиомы справедливы и для $f|_Y$.*

Лемма 3.1 [3]. *Аксиомы* (B1) *и* (L1) *влекут аксиомы* (B2) – (B4).

Доказательство. В работе [3] использованы три аксиомы (A1) – (A3) для гладкого отображения $f\colon M \to P$ такие, что (B1) совпадает с (A1), (B3) — с (A3), (B1)&(L1) $\Rightarrow$ (A1) – (A3) согласно лемме 12 из [3] и (A1) – (A3) $\Rightarrow$ (B2) согласно теореме 3 из [3]. Чтобы проверить аксиому (B4), предположим, что $f\colon M \to P$ удовлетворяет аксиомам (B1) и (L1), а $Y \subset M$ — такое подмногообразие, что $f|_Y$ удовлетворяет аксиоме (B1). Тогда $f|_Y$ также удовлетворяет аксиоме (L1), а значит, и всем остальным аксиомам.

4. Доказательство теоремы 2.1. Ориентируемый случай теоремы 2.1 содержится в следующей лемме.

Лемма 4.1. *Предположим, что M — ориентируемая поверхность и $f\colon M \to P$ удовлетворяет аксиомам* (B1) *и* (B2). *Пусть F, $\mathbf{F}$, φ и Γ — такие же, как и в аксиоме* (B2). *Положим $\Gamma_X = \{\alpha \in \Gamma \mid \alpha|_{X^1 \cup X^2} = 0\}$. Тогда*

$$\varphi(\Gamma_X) = \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X). \tag{4.1}$$

Более того, $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X) \cong S^1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f) \cong S^1$ и $X \subset \Sigma_f$. В противном случае группа $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ стягиваема.

Доказательство. Установим (4.1). Предположим, что $\alpha \in \Gamma_X$, т. е. $\alpha = 0$ на $X^1 \cup X^2$. Покажем, что тогда $\varphi(\alpha) \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$. Достаточно показать, что отображение $\varphi(\alpha)$ неподвижно на X.

Действительно, если $x \in X^1 \cup X^2$, то $\varphi(\alpha)(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)) = \mathbf{F}(x, 0) = x$. Более того, поскольку каждая точка $x \in X^0$ является критической для f, то $\mathbf{F}(x, t) = x$ для всех $t \in \mathbb{R}$. В частности, $\varphi(\alpha)(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x)) = x$. Следовательно, $\varphi(\alpha) \in \mathcal{S}(f, X)$.

Так как множество Γ связно, $\varphi(0) = \mathrm{id}_M \in \mathcal{S}(f, X)$, а отображение φ непрерывно, то $\varphi(\alpha) \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$.

Наоборот, предположим, что $h \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$. Это означает, что существует изотопия $h_t\colon M \to M$ в $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ между $h_0 = \mathrm{id}_M$ и $h_1 = h$. Поскольку φ индуцирует накрывающее отображение Γ на $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ и начальное отображение $h_0 = \mathrm{id}_M$ накрывается нулевой функцией $\alpha_0 = 0$, гомотопию h_t можно поднять до гомотопии функций $\alpha_t\colon M \to \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$, такой, что $h_t(x) = \mathbf{F}(x, \alpha_t(x))$ и $\alpha_0 \equiv 0$. Покажем, что $\alpha_t \in \Gamma_X$, т. е. $\alpha_t = 0$ на $X^1 \cup X^2$.

Для каждой точки $x \in X^1 \cup X^2$ рассмотрим *множество ее периодов* $\Lambda_x = \{\tau \in \mathbb{R} \mid \mathbf{F}(x, \tau) = x\}$. Тогда $\alpha_t(x) \in \Lambda_x$ для всех $t \in [0, 1]$. Отметим, что $\Lambda_x = \{0\}$, если x непериодическая, $\Lambda_x = \theta_x \mathbb{Z}$ для периодической точки периода θ_x и $\Lambda_x = \mathbb{R}$, если x неподвижна, а следовательно, является критической для f.

Так как для каждой регулярной точки x отображения f множество Λ_x дискретно и содержит 0, а $\alpha_0 = 0$, то $\alpha_t = 0$ на $(X^1 \cup X^2) \setminus \Sigma_f$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Но Σ_f нигде не плотно, поэтому $\alpha_t = 0$ на всем $X^1 \cup X^2$. Таким образом, $\alpha_t \in \Gamma_X$, что и доказывает (4.1).

Теперь можем описать гомотопический тип $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$. Отметим, что Γ и Γ_X — выпуклые подмножества в $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Поэтому они стягиваемы.

1. Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ стягиваема, т. е. $\varphi\colon \Gamma \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ — гомеоморфизм. Тогда $\varphi\colon \Gamma_X \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ — также гомеоморфизм, а значит, $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ также стягиваема.

2. Предположим, что $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X) \cong S^1$, а значит, $\varphi\colon \Gamma \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ — $\mathbb{Z}$-накрывающее отображение. Рассмотрим два случая.

a) Предположим, что $X^1 \cup X^2 = \varnothing$ и потому $X = X^0 \subset \Sigma_f$. Тогда $\Gamma_X = \Gamma$, а значит, $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X) = \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f) \cong S^1$.

b) Пусть $X^1 \cup X^2 \neq \varnothing$. Тогда ограничение отображения $\varphi|_{\Gamma_X} : \Gamma_X \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ инъективно. Тогда из (4.1) вытекает, что это отображение является гомеоморфизмом.

Действительно, предположим, что $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ для некоторых функций $\alpha, \beta \in \Gamma_X$. Тогда по аксиоме (B2) $\alpha = \beta + n\theta$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Однако $\theta > 0$ на M, в то время как $\alpha = \beta = 0$ на $X^1 \cup X^2$. Поэтому $n = 0$, а значит, $\alpha = \beta$ на всем M.

Лемма 4.1 доказана.

Предположим, что M неориентируема. Тогда $\widetilde{X} = \beta^{-1}(X)$ является $\widetilde{f}$-адаптированным подмногообразием в $\widetilde{M}$. Пусть $\widetilde{\mathcal{S}}(\widetilde{f}, \widetilde{X})$ — подгруппа в $\mathcal{S}(\widetilde{f}, \widetilde{X})$, состоящая из диффеоморфизмов, коммутирующих с ξ, а $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{f}, \widetilde{X})$ — ее тождественная компонента связности. Рассуждая, как и при доказательстве леммы 4.1, можно показать, что $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{f}, \widetilde{X})$ стягиваема. Более того, гомеоморфизм $\nu \colon \widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{f}) \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ отображает $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{f}, \widetilde{X})$ на $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$. Поэтому $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ также стягиваема.

5. Доказательство теоремы 2.2. Теорема 2.2 является частным случаем теоремы 5.1.

Теорема 5.1. *Предположим, что* $f \colon M \to P$ *удовлетворяет аксиомам* (B1)–(B4). *Тогда ограничение отображения* $p|_{\mathcal{D}(M,X)} \colon \mathcal{D}(M, X) \to \mathcal{O}(f, X)$ *также является расслоением Серра.*

Доказательство. Пусть S — конечный связный CW-комплекс и $s_0 \in S$ — точка. Пусть также $\psi \colon S \times I \to \mathcal{O}(f, X)$ — гомотопия такая, что $\psi(s_0, 0) = f$, а ограничение $\psi|_{S \times 0} \colon S \times 0 \to \mathcal{O}(f, X)$ поднимается до отображения $\eta_0 \colon S \to \mathcal{D}(M, X)$, удовлетворяющего условиям: $\eta_0(s_0) = \mathrm{id}_M$ и $\psi(s, 0) = p(\eta_0(s)) = f \circ \eta_0(s)$. В частности, $\eta_0(s)|_X = \mathrm{id}_X$ для всех $s \in S$.

Покажем, что η_0 продолжается до отображения $\eta \colon S \times I \to \mathcal{D}(M, X)$ такого, что $\psi = p \circ \eta$.

Так как $p \colon \mathcal{D}(M) \to \mathcal{O}(f)$ — расслоение Серра, η_0 продолжается до отображения $\kappa \colon S \times I \to \mathcal{D}(M)$ такого, что $\psi = p \circ \kappa$. Таким образом, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
S \times 0 \arrow[r, "\eta_0"] \arrow[d, hook] & \mathcal{D}(M, X) \arrow[r, hook] & \mathcal{D}(M) \arrow[d, "p"] \\
S \times I \arrow[r, "\psi"'] \arrow[ru, dashed, "\eta"] \arrow[rru, "\kappa"] & \mathcal{O}(f, X) \arrow[r, hook] & \mathcal{O}(f) .
\end{tikzcd}$$

Для дальнейшего изложения заметим, что κ индуцирует непрерывное отображение

$$K \colon S \times I \times M \to M, \qquad K(s, t, x) = \kappa(s, t)(x).$$

Лемма 5.1. *Пусть* $(s, t) \in S \times I$ *и* γ *— слой сингулярного слоения* Δ_f, *содержащийся в* X. *Тогда* $\kappa(s, t)(\gamma) = \gamma$. *Если* $\dim \gamma = 1$, *то* $\kappa(s, t)$ *также сохраняет ориентацию* γ.

Доказательство. По определению $\psi(s, t) = f \circ \kappa(s, t)$. С другой стороны, так как $\psi(s, t) \in \mathcal{O}(f, X)$, найдется диффеоморфизм $\lambda \in \mathcal{D}(M, X)$, вообще говоря, не непрерывно зависящий от (s, t) и такой, что $\psi(s, t) = f \circ \lambda$. Поэтому $f \circ \kappa(s, t) \circ \lambda^{-1} = f$, а значит,

$$\kappa(s, t) \circ \lambda^{-1}(\Sigma_f) = \Sigma_f, \qquad \kappa(s, t) \circ \lambda^{-1}(f^{-1}(c)) = f^{-1}(c)$$

для всех $c \in P$. Более того, так как λ неподвижен на X, то

$$\kappa(s,t)\big(\Sigma_f \cap X\big) \subset \Sigma_f, \qquad \kappa(s,t)\big(f^{-1}(c) \cap X\big) \subset f^{-1}(c)$$

для всех $(s,t) \in S \times I$. Следовательно,

$$K\Big(S \times I \times [\Sigma_f \cap X]\Big) \subset \Sigma_f, \qquad K\Big(S \times I \times [f^{-1}(c) \cap X]\Big) \subset f^{-1}(c).$$

Отметим, что для γ имеется ровно три возможности:

(i) γ является критической точкой f,

(ii) γ является регулярной компонентой некоторого множества уровня $f^{-1}(c)$, $c \in P$, и, следовательно, диффеоморфна окружности,

(iii) найдется критическая компонента ω некоторого множества уровня $f^{-1}(c)$ такая, что γ является связной компонентой $\omega \setminus \Sigma_f$, в этом случае ω является открытой дугой.

Пусть z — критическая точка f и ω — связная компонента множества $f^{-1}(c) \cap X$. Так как $\kappa(s_0,0) = \mathrm{id}_M$, а множества $S \times I \times \{z\}$ и $S \times I \times \omega$ связны, то

$$K\big(S \times I \times \{z\}\big) = \{z\}, \qquad K\big(S \times I \times \omega\big) = \omega.$$

Следовательно, $K\big(S \times I \times \alpha\big) = \alpha$ для каждой связной компоненты α множества $\omega \setminus \Sigma_f$. Другими словами,

(i) $\kappa(s,t)(z) = z$,

(ii) $\kappa(s,t)(\omega) = \omega$,

(iii) $\kappa(s,t)(\alpha) = \alpha$,

и, более того, $\kappa(s,t)$ сохраняет ориентацию α, так как ее сохраняет $\kappa(s_0,0) = \mathrm{id}_M$. Это доказывает лемму для всех случаев (i) – (iii).

Лемма 5.1 утверждает, в частности, что поднятие κ неподвижно на X^0. Наша цель — найти поднятие, неподвижное на $X^1 \cup X^2$.

Пусть N — окрестность $X^1 \cup X^2$. Для каждой связной компоненты Y многообразия $X^1 \cup X^2$ обозначим через N_Y связную компоненту N, содержащую Y.

Определение 5.1. *Скажем, что окрестность N f-адаптирована, если выполнены следующие условия*:

1. $\overline{N_Y} \cap \overline{N_{Y'}} = \varnothing$ *для разных компонент Y, Y' из $X^1 \cup X^2$.*

2. *Пусть Y — связная компонента X^1. Обозначим $J = [0,1]$, если Y — компонента границы M, и $J = [-1,1]$ — в противном случае. Тогда существует диффеоморфизм $q\colon S^1 \times J \to N_Y$ такой, что $q(S^1 \times 0) = Y$, а для каждого $t \in J$ множество $q(S^1 \times t)$ является регулярной компонентой некоторого множества уровня f.*

3. *Пусть Y — связная компонента X^2 и $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — множество всех компонент границы ∂Y, принадлежащих внутренности $\mathrm{Int} M$. Тогда N_Y получается из Y приклейкой воротника $C_i = S^1 \times [0,1]$ к каждой компоненте γ_i вдоль $S^1 \times 0$ так, что для каждого $t \in [0,1]$ множество $S^1 \times t$ соответствует некоторой компоненте множества уровня f.*

Зафиксируем f-адаптированную окрестность $X^1 \cup X^2$. Пусть также Y — связная компонента $X^1 \cup X^2$. Будем различать следующие случаи:

(A) Y — ориентируемая поверхность,

(B) Y — неориентируемая поверхность,

(C) Y — регулярная компонента некоторого множества уровня f, а значит, Y диффеоморфна окружности.

Лемма 5.2. *Предположим, что для Y выполнено одно из условий* (A) *или* (C). *Пусть также F, $\mathbf{F}$, φ и Γ — такие же, как и в аксиоме* (B2). *Тогда существует непрерывное отображение $\hat{\delta}\colon S \times I \to \Gamma \subset \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, имеющее следующие свойства*:

(a) $\hat{\delta}(s, 0) = 0$ *на M для всех $s \in S$*;

(b) $\operatorname{supp}\big(\hat{\delta}(s,t)\big) \subset N_Y$ *для каждого $(s,t) \in S \times I$*;

(c) *определим композицию отображений $\hat{\kappa} = \varphi \circ \hat{\delta}\colon S \times I \xrightarrow{\hat{\delta}} \Gamma \xrightarrow{\varphi} \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$; таким образом,*

$$\hat{\kappa}(s,t)(x) = \mathbf{F}\big(x, \hat{\delta}(s,t)(x)\big);$$

тогда $\hat{\kappa}(s,t) = \kappa(s,t)$ на Y для всех $(s,t) \in S \times I$.

Следовательно, отображение $\eta\colon S \times I \to \mathcal{D}(M, X)$, заданное формулой

$$\eta(s,t) = \hat{\kappa}(s,t)^{-1} \circ \kappa(s,t),$$

является требуемым поднятием ψ.

Доказательство. *Случай* (A). В этом случае Y — *ориентируемая* компонента связности X^2. Тогда по аксиоме (B4) ограничение f на Y удовлетворяет аксиоме (B2). Пусть

$$\Gamma_Y = \{\alpha \in \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{R}) \mid F(\alpha) > -1\}$$

и

$$\varphi_Y\colon \Gamma_Y \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f|_Y), \qquad \varphi_Y(\alpha)(x) = \mathbf{F}(x, \alpha(x))$$

— соответствующее накрывающее отображение, описанное в аксиоме (B2).

Согласно лемме 5.1 $f \circ \kappa(s,t)(x) = f(x)$ для $(s,t,x) \in S \times I \times Y$. Другими словами, ограничение $\kappa(s,t)|_Y$ отображения $\kappa(s,t)$ на Y принадлежит стабилизатору $\mathcal{S}(f|_Y)$ ограничения $f|_Y$ относительно правого действия группы $\mathcal{D}(Y)$. Более того, так как $\kappa(s,0) = \mathrm{id}_M$, а $S \times I \times Y$ связно, то $\kappa(s,t)|_Y \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f|_Y)$.

Рассмотрим ограничение на Y отображения

$$\kappa_Y\colon S \times I \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f|_Y), \qquad \kappa_Y(s,t)(x) = \kappa(s,t)(x)$$

для $(s,t,x) \in S \times I \times M$. Очевидно, что оно непрерывно относительно $\mathcal{C}^\infty$-топологии $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f|_Y)$.

Поскольку $\varphi_Y|_{\Gamma_Y}$ — накрывающее отображение, а $\kappa_Y(s,0) = \mathrm{id}_Y$ для всех $s \in S$, $\kappa_Y|_{S \times 0}$ поднимается до отображения $\delta\colon S \times 0 \to \Gamma_Y$ по формуле $\delta(s,0) = 0\colon Y \to \mathbb{R}$ для всех $s \in S$. Тогда из свойства накрывающей гомотопии для $\varphi_Y|_{\Gamma_Y}$ следует, что κ_Y продолжается до поднятия $\delta\colon S \times I \to \Gamma_Y$, делающего коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma_Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_Y"] & \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{R}) \\
S \times I \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "\kappa_Y"] & \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f|_Y) \arrow[r, hook] & \mathcal{D}(Y)\,.
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Другими словами,

$$\kappa(s,t)(x) = \kappa_Y(s,t)(x) = \mathbf{F}\big(x, \delta(s,t)(x)\big) \tag{5.2}$$

для $x \in Y$.

Отметим, что для окрестности N_Y существует *линейный* оператор расширения

$$E\colon \mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$$

такой, что $E\alpha|_Y = \alpha$, и $\operatorname{supp}(E\alpha) \subset N_Y$ для каждого $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(Y,\mathbb{R})$ (см. [11]). Определим композицию

$$\delta' = E \circ \delta\colon S \times I \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$$

и рассмотрим отображение

$$K'\colon S \times I \times M \to M, \qquad K'(s,t,x) = \mathbf{F}\big(x, \delta'(s,t)(x)\big).$$

Очевидно, что $K'(s,t,x) = K(s,t,x)$ для $x \in Y$, а значит, ограничение $K_{s,t}$ на Y является диффеоморфизмом. Заметим, что $K_{s,t}|_Y$ получается подстановкой гладкой функции $\delta'(s,t)$ вместо времени в отображение потока. Поэтому по теореме 19 из [12] имеем

$$F(\delta'(s,t))(x) > -1, \quad x \in Y. \tag{5.3}$$

Так как $S \times I \times Y$ компактно, а частные производные $\delta'(s,t)$ совместно непрерывны по всем трем координатам (s,t,x), условие (5.3) выполнено для всех x из некоторой окрестности Y, не зависящей от (s,t). Уменьшая N_Y, можно предполагать, что (5.3) выполнено на всем N_Y.

Пусть W — окрестность Y такая, что

$$Y \subset W \subset \overline{W} \subset N_Y. \tag{5.4}$$

Зафиксируем $\mathcal{C}^\infty$-функцию $\mu\colon M \to [0,1]$ такую, что: (i) $\mu = 1$ на Y; (ii) $\mu = 0$ на $M \setminus W$; (iii) μ принимает постоянные значения на связных компонентах множеств уровня f, а значит, $F(\mu) = 0$.

Зададим отображение $\hat{\delta}\colon S \times I \to \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ формулой

$$\hat{\delta}(s,t)(x) = \mu(x)\delta'(s,t)(x).$$

Отметим, что

$$F\big(\hat{\delta}(s,t)\big) = F\big(\mu \cdot \delta'(s,t)\big) = \mu F(\delta') + F(\mu)\delta' = \mu F(\delta') > -1.$$

Последнее неравенство следует из (5.3) и предположения, что $0 \le \mu \le 1$. Поэтому $\hat{\delta}(S \times I) \subset \Gamma$.

Нужно показать, что $\hat{\delta}$ удовлетворяет условиям (a)–(c) леммы.

(a) Поскольку $\delta(s,0) = 0$ на Y и E — линейный оператор, то $\delta'(s,0) = 0$ на M, а значит, $\hat{\delta}(s,0) = 0$ на всем M.

(b) Так как $\operatorname{supp}(\mu) \subset N_Y$, то $\operatorname{supp}(\hat{\delta}(s,t)) \subset N_Y$.

(c) Определим отображение $\hat{\kappa}\colon S \times I \to \mathcal{C}^\infty(M, M)$ по формуле

$$\hat{\kappa}(s,t)(x) = \mathbf{F}\big(x, \hat{\delta}(s,t)(x)\big).$$

Тогда из (5.2) следует, что $\hat{\kappa}(s,t) = \kappa(s,t)$ на Y. Поэтому отображение

$$\eta(s,t) = \hat{\kappa}(s,t)^{-1} \circ \kappa(s,t)$$

неподвижно на Y. Более того, так как $\hat{\kappa}(s,t)$ оставляет инвариантными слои Δ_f, то $f \circ \circ\, \hat{\kappa}(s,t)^{-1} = f$. Следовательно,

$$f \circ \eta(s,t) = f \circ \hat{\kappa}(s,t)^{-1} \circ \kappa(s,t) = f \circ \kappa(s,t) = \psi(s,t).$$

Случай (C). Предположим, что Y — регулярная компонента некоторого множества уровня f, так что мы можем отождествить N_Y с произведением $S^1 \times J$, где S^1 — единичная окружность в комплексной плоскости и $J = [-1, 1]$ либо $[0, 1]$, так что Y соответствует $S^1 \times 0$.

Определим поток $\mathbf{F}\colon (S^1 \times J) \times \mathbb{R} \to S^1 \times J$ по формуле $\mathbf{F}(z, \tau, \theta) = (ze^{2\pi i\theta}, \tau)$. Рассмотрим универсальное накрывающее отображение $q\colon \mathbb{R} \to S^1$, $q(\theta) = e^{2\pi i\theta}$. Так как $\kappa(s,t)$ оставляет инвариантным $Y = S^1 \times 0$, а $\kappa(s, 0) = \mathrm{id}_Y$ для всех $s \in S$, то отображение

$$K\colon S \times I \times Y \longrightarrow Y = S^1$$

поднимается до функции

$$\Delta\colon S \times I \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

такой, что $K = q \circ \Delta$ и $\Delta(s, 0, z) = 0$ для $(s, z) \in S \times Y$. Другими словами,

$$K(s,t,z) = e^{2\pi i \Delta(s,t,z)}.$$

Поскольку q — локальный диффеоморфизм, а отображение κ непрерывно относительно $\mathcal{C}^\infty$-топологий, то отображение

$$\delta\colon S \times I \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{R}), \qquad \delta(s,t)(z) = \Delta(s,t,z)$$

также непрерывно относительно $\mathcal{C}^\infty$-топологии на $\mathcal{C}^\infty(Y, \mathbb{R})$.

Зафиксируем $\mathcal{C}^\infty$-функцию $\mu : J \to [0,1]$ со следующими свойствами: (i) $\mu(0) = 1$, (ii) $\mu = 0$ вне $[-0{,}5; 0{,}5] \cap J$ и зададим отображение

$$\hat{\delta}\colon S \times I \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(S^1 \times J, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty(N_Y, \mathbb{R})$$

формулой

$$\hat{\delta}(s,t)(z,\tau) = \mu(\tau)\delta(s,t)(z).$$

Очевидно, что $\operatorname{supp}\big(\hat{\delta}(s,t)\big) \subset \operatorname{Int} N_U$. Поэтому можно продолжить $\hat{\delta}(s,t)$ нулевыми значениями на все M и рассматривать $\hat{\delta}$ как отображение $\hat{\delta}\colon S \times I \to \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Тогда, аналогично случаю (A), можно проверить, что $\hat{\delta}(S \times I) \subset \Gamma$ и $\hat{\delta}$ имеют свойства (a)–(c).

Случай (B). Предположим, что Y — неориентируемая связная компонента X. Положим

$$\widetilde{X} = \beta^{-1}(X), \qquad \widetilde{N}_{\widetilde{Y}} = \beta^{-1}(N_Y), \qquad \widetilde{Y} = \beta^{-1}(Y).$$

Пусть также $\widetilde{\mathcal{D}}(\widetilde{M}, \widetilde{X})$ — подгруппа в $\widetilde{\mathcal{D}}(\widetilde{M})$, состоящая из диффеоморфизмов, неподвижных на $\widetilde{X}$ (и коммутирующих с ξ). Так как $\psi(s_0, 0) = \mathrm{id}_M$, то κ поднимается до отображения $\widetilde{\kappa}\colon S \times I \to \widetilde{\mathcal{D}}(\widetilde{M})$.

Отметим, что $\widetilde{Y}$ — связная ориентируемая поверхность, а $\widetilde{f}$ удовлетворяет аксиомам (B1)–(B3). Поэтому, применяя случай (A), можно найти отображение

$$\hat{\delta}\colon S \times I \longrightarrow \Gamma = \{\alpha \in \mathcal{C}^{\infty}(\widetilde{M}, \mathbb{R}), \mid F(\alpha) > -1\},$$

имеющее свойства (a)–(c): $\hat{\delta}(s, 0) = 0$, $\operatorname{supp}\big(\hat{\delta}(s,t)\big) \subset N_{\hat{Y}}$, а $\hat{\kappa} = \varphi \circ \hat{\delta}(s,t)$ совпадает с $\widetilde{\kappa}(s,t)$ на $\hat{Y}$.

Отметим, что ограничение $\widetilde{\kappa}(s,t)$ на $\widetilde{Y}$ является поднятием $\kappa(s,t)|_Y$. Поэтому оно коммутирует с ξ, т. е.

$$\widetilde{\kappa}(s,t) \circ \xi(x) = \xi \circ \widetilde{\kappa}(s,t)(x).$$

Более того, $\widetilde{\kappa}(s,t)|_Y \in \widetilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{id}}(\widetilde{f}|_{\widetilde{Y}})$. Тогда из доказательства леммы 5.2 следует, что

$$\hat{\delta}(s,t)|_{\widetilde{Y}} \in \widetilde{\Gamma}_{\widetilde{Y}} = \{\alpha \in \mathcal{C}^{\infty}(\widetilde{Y}, \mathbb{R}) \mid F(\alpha) > -1,\ \alpha \circ \xi = -\alpha\}.$$

В частности,

$$\hat{\delta}(s,t) \circ \xi(x) = -\hat{\delta}(s,t)(x) \quad \forall x \in \widetilde{Y}. \tag{5.5}$$

Теперь определим два отображения:

$$\hat{\delta}_1\colon S \times I \to \mathcal{C}^{\infty}(\widetilde{M}, \mathbb{R}), \qquad \hat{\delta}_1(s,t) = \frac{1}{2}\big(\hat{\delta}(s,t) - \hat{\delta}(s,t) \circ \xi\big),$$

$$\hat{\kappa}_1 = \varphi \circ \hat{\delta}_1\colon S \times I \to \mathcal{C}^{\infty}(M, M), \qquad \hat{\kappa}_1(s,t)(x) = \mathbf{F}\big(x, \hat{\delta}_1(s,t)(x)\big).$$

Лемма 5.3. *Отображения $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\kappa}_1$ имеют следующие свойства*:

$$\hat{\delta}_1(s,t)(x) = \hat{\delta}_1(s,t)(x), \qquad x \in \widetilde{Y}, \tag{5.6}$$

$$\hat{\delta}_1(s,t) \circ \xi = -\hat{\delta}_1(s,t), \tag{5.7}$$

$$\hat{\kappa}_1(s,t) \circ \xi = \xi \circ \hat{\kappa}_1(s,t), \tag{5.8}$$

$$\hat{\delta}_1(S \times I) \subset \widetilde{\Gamma}, \tag{5.9}$$

а также обладают свойствами (a)–(c) *из леммы* 5.2. *Поэтому отображение*

$$\widetilde{\eta}\colon S \times I \longrightarrow \mathcal{D}(M, X), \qquad \widetilde{\eta}(s,t) = \hat{\kappa}(s,t)_1^{-1} \circ \widetilde{\kappa}(s,t)$$

является ξ-эквивариантным поднятием $\kappa(s,t)$ и индуцирует отображение

$$\eta\colon S \times I \to \mathcal{D}(M, X),$$

которое является требуемым поднятием ψ.

Доказательство. Условие (5.7) очевидно, а (5.6) следует из (5.5). Поэтому

$$\hat{\kappa}_1(s,t)\circ\xi(x) = \mathbf{F}\big(\xi(x), \hat{\delta}_1(s,t)\circ\xi(x)\big) = \mathbf{F}\big(\xi(x), -\hat{\delta}_1(s,t)(x)\big) =$$

$$= \xi\circ\mathbf{F}\big(x, \hat{\delta}_1(s,t)(x)\big) = \xi\circ\hat{\kappa}_1(s,t)(x),$$

что и доказывает (5.8).

Так как $\hat{\delta}(s,t)\in\Gamma$, то $F\big(\hat{\delta}(s,t)\big) > -1$ на всем M. Более того, из (5.7) и предположения $\xi^*F = -F$ следует, что $F\big(\hat{\delta}(s,t)\circ\xi\big) = -F\big(\hat{\delta}(s,t)\big)$. Поэтому

$$F(\hat{\delta}_1(s,t)) = \frac{1}{2}F\big(\hat{\delta}(s,t) - \hat{\delta}(s,t)\circ\xi\big) = \frac{1}{2}\Big[F\big(\hat{\delta}(s,t)\big) + F\big(\hat{\delta}(s,t)\big)\Big] = F\big(\hat{\delta}(s,t)\big) > -1.$$

Свойство (a), очевидно, выполняется, свойство (b) следует из соотношения $\xi(\widetilde{N}_{\widetilde{Y}}) = \widetilde{N}_{\widetilde{Y}}$, а свойство (c) — из (5.6) и соответствующего свойства (c) для $\hat{\kappa}$.

Лемма 5.3 доказана.

Таким образом, для каждой связной компоненты Y многообразия $X^1\cup X^2$ можно изменить $\kappa(s,t)$ на N_Y так, чтобы сделать его поднятием $\psi(s,t)$, неподвижным на Y. Поскольку окрестности N_Y попарно дизъюнктны, эти изменения можно сделать на попарно дизъюнктных подмножествах. Следовательно, можно считать, что $\psi(s,t)$ неподвижно на X, а значит, оно является требуемым поднятием η.

Теорема 5.1 доказана.

6. Доказательство теоремы 2.4. Вначале докажем один технический результат.

Пусть $f\colon S^1\times I\to I$ — функция, заданная формулой $f(z,\tau)=\tau$. Для каждого непустого подмножества $A\subset I$ обозначим через $\mathcal{S}_A$ стабилизатор $\mathcal{S}\big(f, S^1\times A\big)$, т. е. группу диффеоморфизмов h цилиндра $S^1\times I$ таких, что:

(1) $f\circ h = f$ и, следовательно, $h(S^1\times\tau) = S^1\times\tau$ для всех τ;

(2) h неподвижен на $S^1\times A$.

Пусть $J\subset I=[0,1]$ — *непустое*, *замкнутое* и *связное* подмножество, T — замкнутая окрестность J в I и T' — замкнутая связная окрестность T в I.

Лемма 6.1. *Вложение $i\colon \mathcal{S}_T\subset\mathcal{S}_J$ является гомотопической эквивалентностью, т. е. существует гомотопия*

$$H\colon \mathcal{S}_J\times[0,1]\longrightarrow\mathcal{S}_J$$

такая, что $H_0=\mathrm{id}(\mathcal{S}_J)$ и $H_1(\mathcal{S}_J)\subset\mathcal{S}_T$. Более того, $H_s(h)=h$ на $S^1\times(I\setminus T')$ для всех $s\in[0,1]$ и $h\in\mathcal{S}_J$. В частности, H_s неподвижно на $\mathcal{S}_{T'}$.

Доказательство. Отождествим S^1 с единичной окружностью в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и определим векторное поле $F(z,\tau)=\dfrac{\partial}{\partial z}$ на $S^1\times I$. Очевидно, что F порождает поток

$$\mathbf{F}: (S^1\times I)\times\mathbb{R}\to S^1\times I, \qquad \mathbf{F}(z,\tau,t) = (e^{2\pi i\tau}z,\tau).$$

Покажем, что существует единственное отображение $\Delta:\mathcal{S}_J\to\mathcal{C}^\infty(S^1\times I,\mathbb{R})$, непрерывное относительно $\mathcal{C}^\infty$-топологий и такое, что:

(a) $h(z,\tau) = \mathbf{F}\big(z,\tau,\Delta(h)(z,\tau)\big) = \Big(e^{2\pi i\cdot\Delta(h)(z,\tau)}z,\tau\Big)$;

(b) если $Y \subset I$ — произвольное связное подмножество, содержащее J, то

$$\Delta(h)(z,\tau) = 0$$

для $(h,\tau) \in \mathcal{S}_Y \times Y$; в частности, $\Delta(h)(z,\tau) = 0$ для всех $\tau \in J$.

Действительно, пусть $Q\colon \mathbb{R}\times I \to S^1 \times I$, $Q(t,\tau) = (e^{2\pi i t}, \tau)$ — универсальное накрывающее отображение $S^1 \times I$. Тогда каждый диффеоморфизм $h \in \mathcal{S}_J$ поднимается до единственного диффеоморфизма

$$\tilde{h} = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)\colon \mathbb{R}\times I \to \mathbb{R}\times I$$

такого, что $h \circ Q = Q \circ \tilde{h}$, причем $\tilde{h}$ неподвижен на $Q^{-1}(S^1 \times J)$. Положим

$$\Delta(h)(t,\tau) = \tilde{h}_1(t,\tau) - t.$$

Утверждается, что Δ удовлетворяет условиям (a) и (b).

(a) Отметим, что

$$Q \circ \tilde{h}(t,\tau) = \left(e^{2\pi i \tilde{h}_1}, \tilde{h}_2\right), \qquad h \circ Q(t,\tau) = h(e^{2\pi i t}, \tau).$$

Тогда из тождества $h \circ Q = Q \circ \tilde{h}$ получаем

$$h(z,\tau) = h(e^{2\pi i t},\tau) = \left(e^{2\pi i \tilde{h}_1}, \tau\right) = \left(e^{2\pi i t}\cdot e^{2\pi i [\tilde{h}_1(t,\tau) - t]}, \tau\right) =$$

$$= \left(e^{2\pi i \Delta(h)(t,\tau)} z, \tau\right) = \mathbf{F}\big(z,\tau,\Delta(h)(z,\tau)\big).$$

(b) Пусть $\tau \in Y$ и $h \in \mathcal{S}_Y \subset \mathcal{S}_J$. Так как h неподвижен на $S^1 \times Y$, Y связно, то поднятие $\tilde{h}$ неподвижно на $\mathbb{R}\times Y$, т. е. $\tilde{h}(t,\tau) = (t,\tau)$ для всех $(t,\tau) \in \mathbb{R}\times Y$. Это означает, что $\tilde{h}_1(t,\tau) = t$. Поэтому $\Delta(h)(t,\tau) = t - t = 0$.

Зафиксируем произвольную $\mathcal{C}^\infty$-функцию $\mu\colon I \to [0,1]$ такую, что $\mu = 0$ на T и $\mu = 1$ на $\overline{I \setminus T'}$, и определим гомотопию $H\colon \mathcal{S}_J \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{S}_J$ по формуле

$$H(h,s) = \mathbf{F}\big(z,\tau,(s\mu(\tau) + 1 - s)\cdot\Delta(h)(z,\tau)\big).$$

Покажем, что H удовлетворяет условиям леммы.

1. Сначала отметим, что $H_0 = \mathrm{id}$. Действительно,

$$H(h,0)(z,\tau) = \mathbf{F}\big(z,\tau,\Delta(h)(z,\tau)\big) \xlongequal{(a)} h(z,\tau).$$

2. $H(h,s)$ неподвижно на $S^1 \times J$. В самом деле, если $\tau \in J$, то $\Delta(h)(z,\tau) = 0$, а значит,

$$H(h,s)(z,\tau) = \mathbf{F}\big(z,\tau,0\big) = (z,\tau).$$

3. Проверим, что $H(h,s)$ — диффеоморфизм. Заметим, что $H(h,s)$ получается подстановкой гладкой функции $\alpha = (s\mu + 1 - s)\Delta(h)$ вместо времени в отображение потока. Тогда по теореме 19 из [12] $H(h,s)$ будет диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда производная Ли

$$F(\alpha) > -1. \tag{6.1}$$

В частности, так как $h = H(h,0)$ — диффеоморфизм, то $F(\Delta(h)) > -1$. Следовательно,

$$F\big((s\mu + 1 - s)\cdot\Delta(h)\big) = F(s\mu + 1 - s)\cdot\Delta(h) + (s\mu + 1 - s)F\big(\Delta(h)\big).$$

Поскольку μ зависит только от τ, то $F(s\mu + 1 - s) = 0$, а значит, первое слагаемое равно нулю. Более того, $0 \le s\mu + 1 - s \le 1$, поэтому получаем неравенство

$$F\big((s\mu + 1 - s)\cdot\Delta(h)\big) = (s\mu + 1 - s)F\big(\Delta(h)\big) > -1.$$

Таким образом, $H(h,s)$ — диффеоморфизм.

4. Так как $f\circ\mathbf{F}(z,\tau,t) = f(z,\tau)$, то $f\circ H(h,s) = f$ для всех $(h,s)\in\mathcal{S}_J\times I$. Таким образом, $H(h,s)\in\mathcal{S}_J$.

5. Покажем, что $H_1(\mathcal{S}_J)\subset\mathcal{S}_T$, т. е. $H(h,1)$ неподвижно на $S^1\times T$. Пусть $\tau\in T$. Тогда $\mu(\tau) = 0$. Следовательно,

$$H(h,1)(z,\tau) = \mathbf{F}\big(z,\tau,(1\cdot\mu(\tau) + 1 - 1)\cdot\Delta(h)(z,\tau)\big) = \mathbf{F}(z,\tau,0) = (z,\tau).$$

6. Остается проверить, что $H(h,s) = h$ на $S^1\times(I\setminus T')$. Пусть $\tau\in I\setminus T'$. Тогда $\mu(\tau) = 1$. Поэтому

$$H(h,s)(z,\tau) = \mathbf{F}\big(z,\tau,(s\mu(\tau) + 1 - s)\cdot\Delta(h)(z,\tau)\big) = \mathbf{F}\big(z,\tau,\Delta(h)(z,\tau)\big) = h(z,\tau).$$

Лемма доказана.

***Замечание* 6.1.** Отметим, что отображение $H_1\colon\mathcal{S}_J\to\mathcal{S}_T$ не является ретракцией.

Как следствие из леммы 6.1 получаем следующее утверждение.

***Следствие* 6.1.** *Пусть $X\subset M$ — f-адаптированное подмногообразие и $\hat{N}$ — f-адаптированная окрестность $X^1\cup X^2$. Обозначим $\hat{X} = X^0\cup\hat{N}$. Тогда вложение*

$$\mathcal{S}(f,\hat{X})\cap\mathcal{D}(M,\hat{X}) \ \subset\ \mathcal{S}(f,X)\cap\mathcal{D}(M,X)$$

является гомотопической эквивалентностью. В частности, гомотопической эквивалентностью является вложение $\mathcal{S}'(f,\hat{X})\subset\mathcal{S}'(f,X)$.

Доказательство. Пусть Y — связная компонента $X^1\cup\partial X^2$. Тогда Y имеет окрестность U, диффеоморфную цилиндру $S^1\times I$ и такую, что каждое множество вида $S^1\times\tau$ является регулярной компонентой некоторого множества уровня функции f. Тогда по лемме 6.1 существует деформация $\mathcal{S}(f|_U, U\cap X)$ в $\mathcal{S}(f|_U, U\cap\hat{N})$ с носителями в $\mathrm{Int}U$.

Построив такую деформацию для каждой связной компоненты $X^1\cup\partial X^2$, получим деформацию $\mathcal{S}(f,X)\cap\mathcal{D}(M,X)$ в $\mathcal{S}(f,\hat{X})\cap\mathcal{D}(M,\hat{X})$. Детали оставляем читателю.

***Следствие* 6.2.** *Предположим, что $X^1\cup X^2\ne\varnothing$. Пусть $M_1,\ldots,M_n$ — замыкания связных компонент $M\setminus(X^1\cup X^2)$ и $Y_i = M_i\cap X$. Тогда существуют изоморфизмы μ и η, замыкающие коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1\mathcal{O}_f(f,X) & \xrightarrow{\ \mu\ } & \prod_{i=1}^n \pi_1\mathcal{O}(f|_{M_i},Y_i) \\
{\scriptstyle\partial_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\prod_{i=1}^n(\partial_1)_i} \\
\pi_0\mathcal{S}'(f,X) & \xrightarrow{\ \eta\ } & \prod_{i=1}^n \pi_0\mathcal{S}'(f|_{M_i},Y_i)\ ,
\end{array} \qquad (6.2)$$

где $(\partial_1)_i\colon\pi_1\mathcal{O}(f|_{M_i},Y_i)\to\pi_0\mathcal{S}'(f|_{M_i},Y_i)$ и $\partial_1\colon\pi_1\mathcal{O}_f(f,X)\to\pi_0\mathcal{S}'(f,X)$ — граничные гомоморфизмы.

Доказательство. Поскольку X и Y_i бесконечны, из (2.3) следует, что ∂_1 и $(\partial_1)_i$ — изоморфизмы. Таким образом, в диаграмме вертикальные стрелки являются изоморфизмами. Поэтому достаточно построить изоморфизм η. Тогда μ будет определен однозначно.

Пусть $\hat{N}$ — f-адаптированная окрестность $X^1 \cup X^2$ и $\hat{X} = X^0 \cup \hat{N}$. Положим $\hat{Y}_i = M_i \cap \hat{X}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда по следствию 6.1 имеют место изоморфизмы $\pi_0 \mathcal{S}'(f, X) \approx \pi_0 \mathcal{S}'(f, \hat{X})$ и $\pi_0 \mathcal{S}'(f|_{M_i}, Y_i) \approx \pi_0 \mathcal{S}'(f|_{M_i}, \hat{Y}_i)$.

Отметим, что отображение

$$\eta' \colon \mathcal{S}'(f, \hat{X}) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathcal{S}'(f|_{M_i}, \hat{Y}_i), \qquad \eta'(h) = \big(h|_{M_1}, \ldots, h|_{M_n}\big),$$

является групповым изоморфизмом, так как ограничения $h|_{M_i}$, $i = 1, \ldots, n$, имеют попарно дизъюнктные носители. Поэтому η' индуцирует изоморфизм η из (6.2).

***Доказательство теоремы* 2.4.** Рассмотрим следующие случаи.

(a) $\chi(M) < 0$ *и* $X = X^0 \subset \Sigma_f$. Тогда для $X = \varnothing$ результат доказан в теореме 1.8 из [4]. Однако анализ доказательства показывает, что оно подходит для случая $X \subset \Sigma_f$.

(b) $\chi(M) < 0$, $\varnothing \neq \partial M \subset X \subset \partial M \cup \Sigma_f$. Из следствия 2.1 следует, что

$$\mathcal{O}_f(f, X) = \mathcal{O}(f, X^0).$$

Поэтому (b) следует из (a).

(c) $X^1 \cup X^2 \neq \varnothing$. Опять, согласно следствию 2.1, можно считать, что $\partial M \subset X$. Тогда из следствия 6.2 получаем

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f, X) \approx \prod_{i=1}^{n} \pi_1 \mathcal{O}(f|_{M_i}, Y_i),$$

где $M_1, \ldots, M_n$ — замыкания связных компонент $M \setminus (X^1 \cup X^2)$, а $Y_i = \partial M_i \cup (M_i \cap X^0) \neq$ $\neq \varnothing$. Если $\chi(M_i) \geq 0$, то M_i является одной из поверхностей D^2, $S^1 \times I$ или $M\ddot{o}$, а значит, удовлетворяет утверждению теоремы. В противном случае $\chi(M_i) < 0$, и тогда можно разложить $\pi_1 \mathcal{O}(f|_{M_i}, Y_i)$ так же, как в случае (b).

Очевидно, что случаи (a) – (c) включают все случаи (i) – (iii).

Теорема доказана.

Автор признателен профессору Т. Ягасаки за полезные обсуждения гомотопического типа группы $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)$ для компактных поверхностей.

1. *Maksymenko Sergiy.* Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces // Ann. Global Anal. Geom. – 2006. – **29**, № 3. – P. 241 – 285.
2. *Maksymenko Sergiy.* Homotopy dimension of orbits of Morse functions on surfaces // Trav. Math. – 2008. – **18**. – P. 39 – 44.
3. *Maksymenko Sergiy.* Functions with isolated singularities on surfaces // Геометрія та топологія функцій на многовидах: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 4. – С. 7 – 66.
4. *Maksymenko Sergiy.* Functions on surfaces and incompressible subsurfaces // Methods Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 2. – P. 167 – 182.
5. *Sergeraert Francis.* Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications // Ann. Sci. École norm. super. – 1972. – **5**, № 4. – P. 599 – 660.
6. *Smale Stephen.* Diffeomorphisms of the 2-sphere // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **10**. – P. 621 – 626.

7. *Birman Joan S.* Mapping class groups and their relationship to braid groups // Communs Pure and Appl. Math. – 1969. – **22**. – P. 213 – 238.
8. *Earle C. J., Eells J.* A fibre bundle description of teichmüller theory // J. Different. Geometry. – 1969. – **3**. – P. 19 – 43.
9. *Earle C. J., Schatz A.* Teichmüller theory for surfaces with boundary // J. Different. Geometry. – 1970. – **4**. – P. 169 – 185.
10. *Gramain André.* Le тип d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte // Ann. Sci. École norm. Super. – 1973. – **6**, № 4. – P. 53 – 66.
11. *Seeley R. T.* Extension of C^∞ functions defined in a half space // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – **15**. – P. 625 – 626.
12. *Maksymenko Sergiy.* Smooth shifts along trajectories of flows // Topology Appl. – 2003. – **130**, № 2. – P. 183 – 204.

Получено 22.05.12