УДК 517.5

С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. трансп.)

ГЛАДКОСТЬ ФУНКЦИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ L_ψ

Let $L_0(T)$ be the set of real-valued periodic measurable functions, let $\psi: R^+ \to R^+$ be a modulus of continuity $(\psi \neq 0)$, and let

$$L_\psi \equiv L_\psi(T) = \left\{ f \in L_0(T): \|f\|_\psi := \int_T \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty \right\}.$$

The following problems are investigated:

Relationship between the rate of approximation of f by trigonometric polynomials in L_ψ and smoothness in L_1.

Correlation between the moduli of continuity of f in L_ψ and L_1, and theorems on imbedding of the classes $\mathrm{Lip}(\alpha, \psi)$ in L_1.

Structure of functions from the class $\mathrm{Lip}(1, \psi)$.

Нехай $L_0(T)$ — множина дійснозначних періодичних вимірних функцій, $\psi: R^+ \to R^+$ — модуль неперервності $(\psi \neq 0)$,

$$L_\psi \equiv L_\psi(T) = \left\{ f \in L_0(T): \|f\|_\psi := \int_T \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty \right\}.$$

Досліджуються наступні задачі:

Зв’язок між швидкістю апроксимації f тригонометричними поліномами в L_ψ та гладкістю в L_1.

Співвідношення між модулями неперервності f в L_ψ і L_1 та теореми вкладення класів $\mathrm{Lip}(\alpha, \psi)$ в L_1.

Структура функцій класу $\mathrm{Lip}(1, \psi)$.

1. Введение. Настоящая работа является продолжением статей [1 – 4]; все необходимые определения и обозначения можно найти в этих работах.

Пусть $L_0 \equiv L_0(T)$ — множество действительнозначных 1-периодических функций, измеримых и почти всюду конечных, $T = [0,1]$ — основной тор периодов; Ω — множество функций $\psi: R^+ \to R^+$, являющихся модулем непрерывности $(\psi \neq 0)$.

Среди метрических пространств

$$L_\psi \equiv L_\psi(T) := \left\{ f \in L_0(T): \|f\|_\psi := \int_T \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty \right\}$$

важнейшими являются пространства L_p, $0 < p < 1$ (случай $\psi(t) = t^p$), и L_0 с топологией сходимости по мере: $\|f\|_0 := \int_T \varphi\left(|f(x)|\right) dx$, $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$.

В работах [1 – 4] исследовались основные задачи теории приближений тригонометрическими полиномами в пространствах L_ψ: прямые и обратные теоремы Джексона и неравенства типа Бернштейна для полиномов. Ранее эти задачи были решены для пространств L_p [5–7]. Отметим, что в результате исследований оказалось, что как прямая (первая), так и обратная (в строго определенной форме) теоремы Джексона имеют место в L_ψ тогда и только тогда, когда нижний индекс растяжения γ_ψ функции ψ отличен от нуля. Это позволило, в частности, в таких L_ψ-пространствах получить при некоторых значениях α конструктивную характеристику липшицевых классов

$$\operatorname{Lip}(\alpha,\psi) := \left\{ f \in L_\psi;\ \exists C_f:\ \omega(f,h) \le C_f h^\alpha \quad \forall h > 0 \right\}$$

в терминах приближения f тригонометрическими полиномами.

В данной статье рассмотрим некоторые задачи, связанные с исследованием гладкости (в различных терминах) функций из L_ψ.

В п. 2 рассмотрена следующая задача, связанная с обратной теоремой Джексона. Пусть для заданной функции $f \in L_\psi$ известна скорость стремления к нулю последовательности ее наилучших приближений $\left\{ E_\upsilon(f)_\psi;\ \upsilon = 0,1,2,\ldots \right\}$. Что можно сказать о гладкости функции f в случае $\gamma_\psi = 0$ (в этом случае обратной теоремы Джексона в L_ψ нет)?

Мы покажем (см. теорему 1 и ее следствия), что для любой функции $\psi \in \Omega$ при определенных условиях на $\left\{ E_\upsilon(f)_\psi \right\}$ можно утверждать наличие некоторой гладкости функции f как элемента нормированного пространства L_1. Доказательство будет проведено стандартным методом теории приближений (см. [8]), основанным на „неравенствах разных метрик” для полиномов. Отметим, что этот результат справедлив для любой функции $\psi \in \Omega$. В качестве следствий при условии $\gamma_\psi > 0$ получены соотношения между модулями непрерывности f в L_ψ и L_1 и некоторые теоремы вложения классов $\operatorname{Lip}(\alpha,\psi)$ в L_1.

В частности, для классов $\operatorname{Lip}(\alpha,p)$ при $\alpha \ne 1$ наши теоремы вложения совпали с известными [9], однако при $\alpha = 1$ наш результат является слабее.

В связи с этим в п. 3 в случае $\gamma_\psi > 0$ исследуем другим методом теоремы вложения $\operatorname{Lip}(\alpha,\psi)$ в L_1. Для пространств L_p, $0 < p < 1$, основным результатом здесь является неравенство Э. А. Стороженко [9]:

$$\omega(f,h)_1 \le C_p \int_0^h \left(\frac{\omega(f,x)_p}{x} \right)^{1/p} dx, \quad 0 < h < \frac{1}{3}. \tag{1}$$

В теореме 2 устанавливается аналогичное (1) соотношение для функций из L_ψ, $\gamma_\psi > 0$. Метод доказательства — аппроксимация f из L_ψ кусочно-постоянными функциями с плавающими узлами — оказался полезным и при исследовании связи между модулями непрерывности в L_ψ и соответствующими K-функционалами (см. п. 4).

В п. 5 исследуются аналоги в пространствах L_ψ следующих двух результатов, полученных в пространствах L_p, $0 < p < 1$:

1) если $f \in AC$, $f \neq \mathrm{const}$, то $f \in \mathrm{Lip}(p, p)$ [5];

2) в случае $0 < p < 1$ следующие условия эквивалентны [10]:

1) $f \in \mathrm{Lip}(1, p)$;

2) f эквивалентна функции ограниченной p-вариации;

3) f эквивалентна функции f_d вида

$$f_d = d_0 + \sum_{x_k < x} d_k, \tag{2}$$

где $\{x_k\}$ — последовательность попарно различных точек из $[0,1)$, и $\sum_{k=1} |d_k|^p < \infty$.

Напомним, что по известной теореме Харди – Литтлвуда [11] при $p \in (1;\infty)$ $f \in \mathrm{Lip}(1, L_p)$ тогда и только тогда, когда f эквивалентна функции из AC с производной из L_p, а при $p = 1$ если $f \in AC$, то $f \in \mathrm{Lip}(1, L_1)$.

Отмеченные выше результаты показывают, что в L_p при $p \in (0,1)$ ситуация иная: класс AC принадлежит $\mathrm{Lip}(p, p)$, а класс $\mathrm{Lip}(1, p)$ становится достаточно „бедным” и состоит только из функций скачков (2).

Из теорем 4, 5 следует, что в L_ψ расположение класса AC в шкале Липшица для любой ψ из Ω зависит от показателей растяжения ψ. При $\gamma_\psi > 0$ сохраняется аналог теоремы В. Г. Кротова, однако при $\gamma_\psi = 0$ картина может измениться. Например, в пространстве L_0 класс AC „возвращается” в класс Липшица с показателем 1.

Заметим, что в работах [5, 6, 9, 10] в пространствах L_p, $0 < p < 1$, значение символа $\| f \|_p$ отличается от нашего; в этих работах $\| f \|_p := \left(\int_T | f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$.

Мы при цитировании результатов этих работ вносим соответствующие изменения, следуя нашим обозначениям.

Исследуемые свойства пространств L_ψ существенно зависят от поведения соответствующей функции растяжения M_ψ. Напомним ее определение и основные свойства [15, с. 75 – 78].

Если $\psi(t)$ — положительная всюду конечная на $(0,\infty)$ функция, то ее функция растяжения M_ψ, определенная равенством

$$M_\psi(s) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\psi(st)}{\psi(t)}, \quad 0 < s < \infty,$$

имеет следующие свойства:

1) $M_\psi(s_1 s_2) \le M_\psi(s_1) M_\psi(s_2)$;

2) если $M_\psi(s)$ всюду конечна, то для нее существуют два числа: γ_ψ (нижний индекс растяжения) и δ_ψ (верхний индекс растяжения), $0 \le \gamma_\psi \le \delta_\psi < \infty$, такие, что

$M_\psi(s) \ge s^{\gamma_\psi}$ при $s<1$, $M_\psi(s) \ge s^{\delta_\psi}$ при $s>1$ и для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших s $M_\psi(s) \le s^{\delta_\psi+\varepsilon}$, а при достаточно малых s $M_\psi(s) \le s^{\gamma_\psi-\varepsilon}$.

Из этих свойств следует, что если $\psi \in \Omega$, то $0 \le \gamma_\psi \le \delta_\psi \le 1$, и для любого $\varepsilon>0$ найдутся постоянные C'_ε, C''_ε такие, что

$$M_\psi(s) \le C'_\varepsilon s^{\delta_\psi+\varepsilon} \quad \text{при всех} \quad s \ge 1,$$

$$M_\psi(s) \le C''_\varepsilon s^{\gamma_\psi-\varepsilon} \quad \text{при всех} \quad s \in (0,1].$$

2. Связь между приближением в L_ψ и гладкостью в L_1. Будем использовать следующий вариант „неравенства разных метрик” для полиномов [3] (следствие 4): пусть $\psi \in \Omega$, $n \in N$, $k,r = 0,1,\ldots, h \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$, тогда для любого полинома T_n выполняется неравенство

$$\psi\left(\frac{\left\|\Delta_h^k T_n^{(r)}\right\|_1}{h^k}\right) \le Cn\, M_\psi\left(n^{r-1}\min\left(n^k, h^{-k}\right)\right)\|T_n\|_\psi \tag{3}$$

с некоторой постоянной $C = C_\psi(k,r)$.

Теорема 1. *Пусть* $\psi \in \Omega$, f *из* L_ψ *такова, что при некотором* $r = 0,1,\ldots$ *сходится ряд*

$$\sum_{\upsilon=1}^{\infty} M_\psi\left(\upsilon^{r-1}\right)E_{\upsilon-1}(f)_\psi < \infty. \tag{4}$$

Тогда если $r>0$, *то функция* f *эквивалентна функции, имеющей* $(r-1)$*-ю абсолютно непрерывную производную,* $f^{(r)} \in L_1$, *и для любого* $h \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ *и всех* $k = 1,2,\ldots$ *выполняются неравенства*

$$\psi\left(\frac{\omega_k\left(f^{(r)},h\right)_1}{h^k}\right) \le$$

$$\le C_\psi(k,r)\sum_{\upsilon\le 1/h} M_\psi\left(\upsilon^{r-1+k}\right)E_{\upsilon-1}(f)_\psi + \sum_{\upsilon>1/h} M_\psi\left(\upsilon^{r-1}h^{-k}\right)E_{\upsilon-1}(f)_\psi. \tag{5}$$

Если же $r=0$, *то из* (4) *следует, что* $f \in L_1$, *и выполнено* (5).

Доказательство. Пусть $r>0$, T_n — полином наилучшего L_ψ-приближения f и $T_0 = 0$ (без ограничения общности). Рассмотрим ряды

$$\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(T^{(j)}_{2^{\upsilon+1}-1}-T^{(j)}_{2^{\upsilon}-1}\right), \qquad j=0,1,\ldots,r. \tag{6}$$

Из (3) (при $k=0$) и (4) следует, что эти ряды сходятся в L_1. Действительно, последовательности $S_n^{(j)} := \sum_{\upsilon=0}^{n}\left(T^{(j)}_{2^{\upsilon+1}-1}-T^{(j)}_{2^{\upsilon}-1}\right)$ являются фундаментальными:

$$\psi\left(\left\|S^{(j)}_{n+q}-S^{(j)}_{n}\right\|_1\right) \le \sum_{\upsilon=n+1}^{n+q}\psi\left(\left\|T^{(j)}_{2^{\upsilon+1}-1}-T^{(j)}_{2^{\upsilon}-1}\right\|_1\right) \le$$

$$\le C_1\sum_{\upsilon=n+1}^{n+q}2^{\upsilon+1}M_\psi\left(2^{(\upsilon+1)(j-1)}\right)E_{2^\upsilon-1}(f)_\psi \le C_2\sum_{\upsilon=2^{n+1}}^{2^{n+q}}M_\psi\left(\upsilon^{j-1}\right)E_{\upsilon-1}(f)_\psi .$$

Пусть функции g_j из L_1, $j=0,1,\ldots,r$, являются суммами рядов (6). Покажем сначала, что почти всюду $g_0=f$.

Если $\overline{\psi}$ — наименьшая выпуклая вверх мажоранта функции ψ из Ω, то (см., например, [15], гл. II, § 1) для всех $y>0$

$$\psi(y) \le \overline{\psi}(y) \le 2\psi(y).$$

Поэтому

$$\left\|g_0-S_n^{(0)}\right\|_\psi \le \overline{\psi}\left(\int_T\left|g_0(x)-S_n^{(0)}(x)\right|dx\right) \le 2\psi\left(\left\|g_0-S_n^{(0)}\right\|_1\right),$$

$$\|f-g_0\|_\psi \le \left\|f-S_n^{(0)}\right\|_\psi+\left\|g_0-S_n^{(0)}\right\|_\psi \le$$

$$\le \left\|f-S_n^{(0)}\right\|_\psi+2\psi\left(\left\|g_0-S_n^{(0)}\right\|_1\right) \to 0, \quad n\to\infty,$$

а значит, $g_0(x)=f(x)$ почти всюду.

Теперь покажем, что функция g_0 имеет абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка, $g_0^{(r-1)}=g_{r-1}$, и r-ю производную из L_1, $g_0^{(r)}=g_r$.

Из сходимости частных сумм $S_n^{(j)}(x)$ в L_1 следует, что существует подпоследовательность $S_{n_m}^{(j)}(x)$, которая при всех j сходится к $g_j(x)$ почти всюду. Пусть x_0 — одна из точек сходимости при всех $j=1,\ldots,r$. Рассмотрим разность

$$g_{j-1}(x)-g_{j-1}(x_0)-\int_{x_0}^{x}g_j(t)\,dt =$$

$$= \left(g_{j-1}(x)-S_{n_m}^{(j-1)}(x)\right)-\left(g_{j-1}(x_0)-S_{n_m}^{(j-1)}(x_0)\right)-\int_{x_0}^{x}\left(g_j(t)-S_{n_m}^{(j)}(t)\right)dt .$$

Поскольку

$$\left\| g_{j-1}(x) - g_{j-1}(x_0) - \int_{x_0}^{x} g_j(t)\,dt \right\|_1 \le$$

$$\le \left\| g_{j-1}(x) - S_{n_m}^{(j-1)}(x) \right\|_1 + \left| g_{j-1}(x_0) - S_{n_m}^{(j-1)}(x_0) \right| + \left\| g_j(x) - S_{n_m}^{(j)}(x) \right\|_1$$

и правая часть при неограниченном увеличении m стремится к нулю, почти при всех x и $j = 1, 2, \ldots, r$

$$g_{j-1}(x) - g_{j-1}(x_0) = \int_{x_0}^{x} g_j(t)\,dt .$$

Таким образом, с точностью до значений на множестве меры нуль $f^{(r-1)} \in AC$ и $f^{(r)} \in L_1$.

Заметим, что мы по существу повторили рассуждения [12, с. 347] для аналогичного факта в шкале нормированных пространств L_p, $p \ge 1$.

Докажем (5). Так как $f^{(r)} = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} D^r \left(T_{2^{\upsilon+1}-1} - T_{2^{\upsilon}-1} \right)$, где равенство в смысле L_1, используя (3), получаем

$$\psi\left(\frac{\left\| \Delta_h^k f^{(r)} \right\|_1}{h^k} \right) \le \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \psi\left(\left\| \frac{\Delta_h^k}{h^k} D^r \left(T_{2^{\upsilon+1}-1} - T_{2^{\upsilon}-1} \right) \right\|_1 \right) \le$$

$$\le c \sum_{\upsilon=0}^{\infty} 2^{\upsilon} M_\psi \left(2^{\upsilon(r-1)} \min\left(2^{\upsilon k}, h^{-k} \right) \right) \left\| T_{2^{\upsilon+1}-1} - T_{2^{\upsilon}-1} \right\|_\psi \le$$

$$\le 2c \left(\sum_{\upsilon : 2^{\upsilon} \le 1/h} 2^{\upsilon} M_\psi \left(2^{\upsilon(r-1)} 2^{\upsilon k} \right) E_{2^{\upsilon}-1}(f)_\psi + \sum_{\upsilon : 2^{\upsilon} > 1/h} 2^{\upsilon} M_\psi \left(2^{\upsilon(r-1)} h^{-k} \right) E_{2^{\upsilon}-1}(f)_\psi \right).$$

Дальнейшие преобразования к виду (5) стандартные (см., например, [4], теорема 1).

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\psi \in \Omega$, δ_ψ — *верхний показатель растяжения* ψ. *Если при некоторых* $r = 0, 1, \ldots$, $\varepsilon > 0$ *и* $\alpha > 0$ *для функции* $f \in L_\psi$ *выполняются неравенства*

$$E_{\upsilon-1}(f)_\psi \le \frac{C_{f,\varepsilon}}{M_\psi\left(\upsilon^{r-1}\right) \upsilon^{1+\alpha+\varepsilon}}, \quad \upsilon = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

то для этой функции справедливо утверждение теоремы 1, *и для любого* $k = 1, 2, \ldots$ *при всех* $h \in \left(0, \frac{1}{2} \right]$

$$\psi\left(\frac{\omega_k\left(f^{(r)},h\right)_1}{h^k}\right) \le \begin{cases} C\left(\dfrac{1}{h}\right)^{k\delta_\psi-\alpha}, & k\delta_\psi-\alpha>0, \\ C\ln\dfrac{1}{h}, & k\delta_\psi-\alpha=0, \\ C, & k\delta_\psi-\alpha<0, \end{cases} \tag{8}$$

где постоянная $C=C(r,k,\alpha,f)$ *не зависит от* h.

Доказательство. Очевидно, что условие (4) выполнено.

Из (5) и (7) следует

$$\psi\left(\frac{\omega_k\left(f^{(r)},h\right)_1}{h^k}\right) \le$$

$$\le C_1\left(\sum_{1\le\upsilon\le1/h}\frac{M_\psi\left(\upsilon^{r-1+k}\right)}{M_\psi\left(\upsilon^{r-1}\right)\upsilon^{1+\alpha}}+\sum_{\upsilon>1/h}\frac{M_\psi\left(\upsilon^{r-1}h^{-k}\right)}{M_\psi\left(\upsilon^{r-1}\right)\upsilon^{1+\alpha}}\right)=:C_1\left(\Sigma_1+\Sigma_2\right).$$

Поскольку

$$M_\psi\left(\upsilon^{r-1+k}\right)\le M_\psi\left(\upsilon^{r-1}\right)M_\psi\left(\upsilon^k\right)\le M_\psi\left(\upsilon^{r-1}\right)C_\varepsilon\upsilon^{k\delta_\psi+\varepsilon},$$

то

$$\Sigma_1\le C_\varepsilon\sum_{1\le\upsilon\le1/h}\upsilon^{k\delta_\psi-1-\alpha}.$$

Далее,

$$M_\psi\left(\upsilon^{r-1}h^{-k}\right)\le M_\psi\left(\upsilon^{r-1}\right)M_\psi\left(h^{-k}\right)\le M_\psi\left(\upsilon^{r-1}\right)C_\varepsilon h^{-k\delta_\psi-\varepsilon},$$

поэтому

$$\Sigma_2\le C_\varepsilon h^{-k\delta_\psi-\varepsilon}\sum_{\upsilon>1/h}\upsilon^{-1-\alpha-\varepsilon}\le C_2\left(\frac{1}{h}\right)^{k\delta_\psi-\alpha}.$$

Следовательно, при любом $\alpha>0$

$$\psi\left(\frac{\omega_k\left(f^{(r)},h\right)_1}{h^k}\right)\le C_3\left(\sum_{1\le\upsilon\le1/h}\upsilon^{k\delta_\psi-1-\alpha}+\left(\frac{1}{h}\right)^{k\delta_\psi-\alpha}\right).$$

Отсюда следует (8).

3. Связь между модулями непрерывности в L_ψ и L_1. С помощью аппроксимации функций тригонометрическими полиномами из теоремы 1 получаем следующие утверждения.

***Следствие* 2.** *Пусть* $\gamma_\psi > 0$. *Если функция* f *из* L_ψ *такова, что сходится интеграл*

$$\int_0^1 \frac{M_\psi(x)}{x} \frac{\omega(f,x)_\psi}{x} dx < \infty, \tag{9}$$

то $f \in L_1$ *и для всех* $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ *выполняется неравенство*

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \le C_{\psi,f} \left(\int_h^1 \frac{\omega(f,x)_\psi}{x^2} dx + \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{M_\psi(x)}{x} \frac{\omega(f,hx)_\psi}{x} dx\right) \tag{10}$$

с некоторой постоянной $C_{\psi,f}$, *не зависящей от* h.

Доказательство. В [2] доказано, что в случае $\gamma_\psi > 0$ (и только в этом случае) в пространстве L_ψ справедлива теорема Джексона:

$$\sup_{f\in L_\psi, f\neq \mathrm{const}} \sup_{\upsilon\in N} \frac{E_{\upsilon-1}(f)_\psi}{\omega(f,1/\upsilon)_\psi} < \infty.$$

Отсюда и из (9) следует, что при $r = 0$ выполняется условие (4). Используем утверждение (5) (в случае $r = 0$, $k = 1$):

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \le C_1\left(\sum_{\upsilon\le 1/h} E_{\upsilon-1}(f)_\psi + \sum_{\upsilon>1/h} M_\psi\left(\frac{1}{h\upsilon}\right) E_{\upsilon-1}(f)_\psi\right) \le$$

$$\le C_2\left(\sum_{\upsilon\le 1/h} \omega\left(f,\frac{1}{\upsilon}\right)_\psi + \sum_{\upsilon>1/h} M_\psi\left(\frac{1}{h\upsilon}\right)\omega\left(f,\frac{1}{\upsilon}\right)_\psi\right) \le$$

$$\le C_3\left(\int_h^1 \frac{\omega(f,x)_\psi}{x^2} dx + \int_0^h M_\psi\left(\frac{x}{h}\right)\frac{\omega(f,x)_\psi}{x^2} dx\right) =$$

$$= C_3\left(\int_h^1 \frac{\omega(f,x)_\psi}{x^2} dx + \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{M_\psi(x)}{x}\frac{\omega(f,hx)_\psi}{x} dx\right).$$

Доказанное утверждение позволяет, в частности, получить теоремы вложения классов $\mathrm{Lip}(\alpha,\psi)$, $\alpha \in (0,1]$, в L_1.

***Следствие* 3.** *Пусть* $\gamma_\psi > 0$, $f \in \mathrm{Lip}(\alpha,\psi)$ *и показатель* α *удовлетворяет условию* $1-\gamma_\psi < \alpha < 1$. *Тогда* $f \in L_1$ *и для ее* L_1*-модуля непрерывности при всех* $h \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ *выполняются неравенства*

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \le C_f \frac{1}{h^{1-\alpha}}, \quad \alpha \in \left(1-\gamma_\psi, 1\right). \tag{11}$$

Для доказательства надо использовать (10) и тот факт, что при $x \in (0,1]$ $M_\psi(x) \le$ $\le C_\varepsilon x^{\gamma_\psi - \varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Заметим, что при $\alpha = 1$ эти же рассуждения позволяют доказать неравенство $\psi\left(\omega(f,h)_1 h^{-1}\right) \le C_f \ln\left(\frac{1}{h}\right)$, которое, однако, уже не является „хорошим" даже в пространстве L_p (см. [9]). В дальнейшем (см. следствие 5) другим методом докажем для случая $\alpha = 1$ более точный результат.

Отметим еще следующий факт, вытекающий из теоремы 1 в случае $r = 1$.

***Следствие* 4.** *Какова бы ни была функция* ψ *из* Ω, *из условия* $\sum_{\upsilon=1}^{\infty} E_{\upsilon-1}(f)_\psi < \infty$ *вытекает, что функция* f *эквивалентна абсолютно непрерывной функции.*

Теперь для исследования связи между модулями непрерывности в L_ψ и L_1 вместо аппроксимации полиномами используем приближение кусочно-постоянными функциями.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$ *и* f *из* L_ψ *такова, что конечен интеграл*

$$\int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega(f,t)_\psi}{t} dt < \infty. \tag{12}$$

Тогда f *принадлежит* L_1 *и для всех* $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ *выполняется неравенство*

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \le C_{\psi,f} \int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega(f,ht)_\psi}{ht} dt \tag{13}$$

с некоторой постоянной $C_{\psi,f}$, *не зависящей от* h.

Заметим, что существование функций f $(f \ne \mathrm{const})$, удовлетворяющих условию (12), гарантируется лишь в случае $\gamma_\psi > 0$. Действительно, если $\gamma_\psi = 0$, то $M_\psi(t) = 1$ при $t \in (0,1]$, и (12) невозможно ни для какого нетривиального модуля непрерывности.

***Доказательство*.** Принадлежность f пространству L_1 установлена в следствии 2, однако этот факт легко увидеть и в приводимом ниже доказательстве (13) (см. (17)). Будем использовать связь между модулями непрерывности и K-функционалами (см., например, [13]) в L_1:

$$\omega(f,h)_1 \approx K(f,h;L_1,V) := \inf_{f_1+f_2=f}\left(\|f_1\|_1 + hV(f_2)\right), \tag{14}$$

где $V(f_2)$ — вариация функции f_2 на периоде.

Для оценки $K(f)$ сверху построим специальные сплайн-функции. Для каждого натурального k построим разбиение периода $[0,1]$ равноотстоящими точками

$$x_{j,k} = j2^{-k}, \quad j = 0,1,\ldots,2^k.$$

Снимем значения f в этих точках и определим кусочно-постоянную функцию $S_{2^k}(f,x)$: для $j = 0,1,\ldots,2^k - 1$

$$S_{2^k}(f,x) := f(x_{j,k}) \quad \text{при} \quad x \in \left[x_{j,k}, x_{j+1,k}\right). \tag{15}$$

Если функция f непрерывна, то определение (15) интерполяционного сплайна $S_{2^k}(f,x)$ корректно. Однако для эквивалентных в L_1 функций соответствующие сплайны (15) могут различаться как элементы пространства L_1. Для исправления этого недостатка используем тот факт, что неравенство (13) инвариантно относительно сдвигов функций f.

Для каждого фиксированного $t \in R$ обозначим через f_t сдвиг функции f на параметр t:

$$f_t(x) := f(x+t).$$

Поскольку $\omega(f,h)_1 = \omega(f_t,h)_1$, из (14) следует, что

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) = \int_0^1 \psi\left(\frac{\omega(f_t,h)_1}{h}\right)dt \le C_1\int_0^1 \psi\left(h^{-1}K(f_t,h;L,V)\right)dt =$$

$$= C_1\int_0^1 \psi\left(\inf_{f_{1,t}+f_{2,t}=f_t}\left(h^{-1}\|f_{1,t}\|_1 + V(f_{2,t})\right)\right)dt. \tag{16}$$

В качестве функций $f_{1,t}$ и $f_{2,t}$ будем выбирать сплайны вида (15). Отметим, что если функции f и g эквивалентны, то сплайны $S_{2^k}(f_t)$ и $S_{2^k}(g_t)$ совпадают при почти всех t. Поэтому теперь их использование в (16) является корректным.

Пусть сначала h имеет вид $h = 2^{-n}$, $n \in N$. Положим в (16)

$$f_{2,t} := S_{2^n}(f_t).$$

Легко видеть, что имеет место равенство в смысле L_1

$$f_t = S_{2^n}(f_t) + \sum_{k>n}\left(S_{2^k}(f_t) - S_{2^{k-1}}(f_t)\right), \tag{17}$$

поэтому

$$f_{1,t} = \sum_{k>n}\left(S_{2^k}(f_t) - S_{2^{k-1}}(f_t)\right).$$

Далее,

$$\left\| S_{2^k}(f_t) - S_{2^{k-1}}(f_t) \right\|_1 =$$

$$= \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{x_{j,k}}^{x_{j+1,k}} \left| S_{2^k}(f_t, x) - S_{2^{k-1}}(f_t, x) \right| dx \le \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} \left| f_t(x_{j+1,k}) - f_t(x_{j,k}) \right|,$$

$$\psi\left(2^n \|f_{1,t}\|_1\right) \le \psi\left(\sum_{k>n} 2^n \left\| S_{2^k}(f_t) - S_{2^{k-1}}(f_t) \right\|_1 \right) \le$$

$$\le \sum_{k>n} \psi\left(2^n \left\| S_{2^k}(f_t) - S_{2^{k-1}}(f_t) \right\|_1\right) \le$$

$$\le \sum_{k>n} \psi\left(2^{n-k} \sum_{j=0}^{2^k-1} \left| f_t(x_{j+1,k}) - f_t(x_{j,k}) \right| \right) \le$$

$$\le \sum_{k>n} M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{j=0}^{2^k-1} \psi\left(\left| f_t(x_{j+1,k}) - f_t(x_{j,k}) \right| \right),$$

$$\int_0^1 \psi\left(2^n \|f_{1,t}\|_1\right) dt \le \sum_{k>n} M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_0^1 \psi\left(\left| f_t(x_{j+1,k}) - f_t(x_{j,k}) \right| \right) dt =$$

$$= \sum_{k>n} M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{j=0}^{2^k-1} \left\| \Delta_{1/2^k} f \right\|_\psi = \sum_{k>n} M_\psi\left(2^{n-k}\right) 2^k \left\| \Delta_{1/2^k} f \right\|_\psi. \tag{18}$$

Аналогичным образом

$$V(f_{2,t}) = V\left(S_{2^n}(f_t)\right) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \left| f_t(x_{j+1,n}) - f_t(x_{j,n}) \right|,$$

$$\psi\left(V(f_{2,t})\right) \le \sum_{j=0}^{2^n-1} \psi\left(\left| f_t(x_{j+1,n}) - f_t(x_{j,n}) \right| \right),$$

$$\int_0^1 \psi\left(V(f_{2,t})\right) dt \le \sum_{j=0}^{2^n-1} \left\| \Delta_{1/2^n} f \right\|_\psi = 2^n \left\| \Delta_{1/2^n} f \right\|_\psi. \tag{19}$$

Теперь из (16) при $h = 2^{-n}$, (18) и (19) следует, что

$$\psi\left(2^n \omega\left(f, 2^{-n}\right)_1\right) \le C_1 \int_0^1 \psi\left(2^n \|f_{1,t}\|_1 + V(f_{2,t})\right) dt \le$$

$$\le C_1 \left(\sum_{k>n} M_\psi\left(2^{n-k}\right) 2^k \left\| \Delta_{1/2^k} f \right\|_\psi + 2^n \left\| \Delta_{1/2^n} f \right\|_\psi \right) \le$$

$$\leq C_1 \sum_{k \geq n} M_\psi\left(2^n \frac{1}{2^k}\right) \frac{\omega\left(f, 1/2^k\right)_\psi}{1/2^k} \leq C_2 \int\limits_0^{1/2^n} M_\psi\left(2^n y\right) \frac{\omega(f,y)_\psi}{y} \frac{dy}{y} =$$

$$= C_2 \int\limits_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega\left(f, 2^{-n} t\right)_\psi}{2^{-n} t} dt .$$

Неравенство (13) доказано в случае $h = 2^{-n}$. Для произвольного $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ найдем $n \in N$ такое, что $2^{-n} \leq h < 2^{-(n-1)}$. Тогда

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \leq \psi\left(\frac{\omega\left(f, 2 \cdot 2^{-n}\right)_1}{2^{-n}}\right) \leq$$

$$\leq \psi\left(2 \frac{\omega\left(f, 2^{-n}\right)_1}{2^{-n}}\right) \leq M_\psi(2) \psi\left(\frac{\omega\left(f, 2^{-n}\right)_1}{2^{-n}}\right) \leq$$

$$\leq M_\psi(2) C_2 \int\limits_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega\left(f, 2^{-n} t\right)_\psi}{2^{-n} t} dt \leq$$

$$\leq M_\psi(2) C_2 2 \int\limits_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \frac{\omega(f, ht)_\psi}{ht} dt .$$

Теорема 2 доказана.

Из неравенства (13) для классов $\operatorname{Lip}(\alpha, \psi)$ при $\alpha < 1$ вытекают те же теоремы вложения в L_1, что и в следствии 3. Однако в случае $\alpha = 1$ теперь можно утверждать большее.

***Следствие* 5.** *Если* $\gamma_\psi > 0$, *то из условия* $f \in \operatorname{Lip}(\alpha, \psi)$ *следует, что* $f \in \operatorname{Lip}(1, L_1)$.

4. Модули непрерывности в L_ψ и K-функционалы. При доказательстве теоремы 2 для оценки сверху K-функционала использовалась аппроксимация функций интерполяционными сплайнами нулевого порядка с плавающими узлами. Заметим, что теоремы Джексона (прямая и обратная) для такой аппроксимации в метрических пространствах доказаны в [14].

Сейчас используем ту же идею для доказательства аналога соотношения (14) в пространстве L_ψ.

Пусть

$$L_\psi^1 := \operatorname{Lip}(1, \psi), \qquad \|f\|_{\psi,1} \equiv \|f\|_{L_\psi^1} := \sup_{s>0} \frac{\omega(f,s)_\psi}{s},$$

$$K\left(f, h; L_\psi, L_\psi^1\right) := \inf_{f_1 + f_2 = f} \left(\|f_1\|_\psi + h \|f_2\|_{\psi,1}\right),$$

$\overline{\omega}(f,h)_\psi$ — наименьшая выпуклая вверх мажоранта функции $\omega(f,h)_\psi$. Напомним (см., например, [15]), что

$$\omega(f,h)_\psi \leq \overline{\omega}(f,h)_\psi \leq 2\omega(f,h)_\psi. \tag{20}$$

Теорема 3. *Для любых* $\psi \in \Omega$ *и* $f \in L_\psi$ *при всех* $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ *имеют место неравенства*

$$\frac{1}{2}\overline{\omega}(f,2h)_\psi \leq K\left(f,h;L_\psi,L_\psi^1\right) \leq 2\omega(f,2h)_\psi. \tag{21}$$

Доказательство. Левое неравенство является простым следствием определений. Поскольку для любого $h > 0$

$$\frac{1}{2}\omega(f,2h)_\psi \leq \|f\|_\psi, \qquad \omega(g,h)_\psi \leq \|g\|_{\psi,1}h, \quad g \in L_\psi^1,$$

то для любой функции $g \in L_\psi^1$

$$\frac{1}{2}\omega(f,2h)_\psi \leq \frac{1}{2}\Big(\omega(f-g,2h)_\psi + \omega(g,2h)_\psi\Big) \leq \frac{1}{2}\Big(2\|f-g\|_\psi + \|g\|_{\psi,1}2h\Big),$$

поэтому

$$\frac{1}{2}\omega(f,2h)_\psi \leq \inf_{g\in L_\psi^1}\Big(\|f-g\|_\psi + h\|g\|_{\psi,1}\Big) = K\left(f,h;L_\psi,L_\psi^1\right).$$

Так как $K(f,h)$ — выпуклая вверх функция аргумента h, левое неравенство (21) доказано.

Для доказательства правой части (21) достаточно показать, что для всех $n \in N$

$$K\left(f,\frac{1}{n};L_\psi,L_\psi^1\right) \leq 2\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_\psi. \tag{22}$$

Действительно, если выполнено (22), то для произвольного $h \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ найдем $n \in N$ такое, что $2^{-n} \leq h < 2^{-(n-1)}$, тогда

$$K\left(f,h;L_\psi,L_\psi^1\right) \leq K\left(f,2^{-(n-1)};L_\psi,L_\psi^1\right) \leq 2\omega\left(f,2^{-(n-1)}\right)_\psi \leq 2\omega(f,2h)_\psi.$$

Итак, для доказательства (22) зафиксируем n, и для каждого сдвига f_t функции f построим интерполяционный сплайн $S_n(f_t)$ (15) с n равноотстоящими узлами $y_{j,n} := jn^{-1}$, $j = 0,1,\ldots,n$. Тогда

$$K\left(f,\frac{1}{n};L_\psi,L_\psi^1\right)=\int_0^1 K\left(f_t,\frac{1}{n};L_\psi,L_\psi^1\right)dt\le$$

$$\le\int_0^1\left(\|f_t-S_n(f_t)\|_\psi+\frac{1}{n}\|S_n(f_t)\|_{\psi,1}\right)dt, \tag{23}$$

$$\int_0^1\|f_t-S_n(f_t)\|_\psi dt=\int_0^1\sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_{j,n}}^{y_{j+1,n}}\psi\left(\left|f_t(x)-f_t\left(y_{j,n}\right)\right|\right)dx\,dt=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^1\int_0^{1/n}\psi\left(\left|f_t\left(x+y_{j,n}\right)-f_t\left(y_{j,n}\right)\right|\right)dx\,dt=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^{1/n}\int_0^1\psi\left(\left|f\left(t+x+y_{j,n}\right)-f\left(t+y_{j,n}\right)\right|\right)dt\,dx=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\int_0^{1/n}\|\Delta_x f\|_\psi\,dx=n\int_0^{1/n}\|\Delta_x f\|_\psi\,dx. \tag{24}$$

Для оценки второго слагаемого в (23) вычислим $\omega\left(S_n(f_t),h\right)_\psi$. Пусть сначала $h\le\frac{1}{n}$. Тогда для почти всех t

$$\|\Delta_h S_n(f_t)\|_\psi=\sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j,n}}^{y_{j,n}+h}\psi\left(\left|f_t\left(y_{j,n}\right)-f_t\left(y_{j-1,n}\right)\right|\right)dx=$$

$$=h\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\left|f_t\left(y_{j,n}\right)-f_t\left(y_{j-1,n}\right)\right|\right),$$

а значит, при $h\le\frac{1}{n}$

$$\omega\left(S_n(f_t),h\right)_\psi=h\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\left|f_t\left(y_{j,n}\right)-f_t\left(y_{j-1,n}\right)\right|\right). \tag{25}$$

Если $h>\frac{1}{n}$, то найдем $k\in N$ такое, что $h\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)$. Тогда $h=\frac{k}{n}+h'$, где $h'<\frac{1}{n}$, и с помощью (25) получим

$$\omega\left(S_n(f_t),h\right)_\psi\le\omega\left(S_n(f_t),\frac{k}{n}\right)_\psi+\omega\left(S_n(f_t),h'\right)_\psi\le$$

$$\leq k\omega\left(S_n(f_t), \frac{1}{n}\right)_\psi + \omega\left(S_n(f_t), h'\right)_\psi =$$

$$= \left(k\frac{1}{n} + h'\right)\sum_{j=1}^{n}\psi\left(\left|f_t\left(y_{j,n}\right) - f_t\left(y_{j-1,n}\right)\right|\right). \tag{26}$$

Из (25) и (26) следует, что для почти всех t

$$\|S_n(f_t)\|_{\psi,1} = \sum_{j=1}^{n}\psi\left(\left|f_t\left(y_{j,n}\right) - f_t\left(y_{j-1,n}\right)\right|\right),$$

поэтому

$$\int_0^1 \|S_n(f_t)\|_{\psi,1} dt = n\left\|\Delta_{1/n} f\right\|_\psi. \tag{27}$$

Теперь из (23), (24) и (27) следует

$$K\left(f, \frac{1}{n}; L_\psi, L_\psi^1\right) \leq n\int_0^{1/n}\|\Delta_x f\|_\psi\, dx + \left\|\Delta_{1/n} f\right\|_\psi .$$

Отсюда вытекает (22).

Теорема 3 доказана.

5. Классы Липшица и абсолютно непрерывные функции в L_ψ.

Теорема 4. *Если* $f \in AC$, $f \neq \mathrm{const}$, *то для любой* $\psi \in \Omega$ *найдутся постоянные* $C_1 = C_1(\psi, f)$ *и* $C_2 = C_2(\psi, f)$ *такие, что при всех* $h \in [0,1)$ *выполняются неравенства*

$$\frac{C_1}{M_\psi(1/h)} \leq \omega(f,h)_\psi \leq C_2\psi(h). \tag{28}$$

Доказательство. Правое неравенство является следствием (20) и неравенства Йенсена:

$$\|\Delta_h f\|_\psi = \int_0^1 \psi\left(|\Delta_h f(x)|\right) dx \leq \int_0^1 \overline{\psi}\left(|\Delta_h f(x)|\right) dx \leq$$

$$\leq \overline{\psi}\left(\|\Delta_h f\|_1\right) \leq 2\psi\left(\|\Delta_h f\|_1\right) \leq$$

$$\leq 2\psi\left(V(f)h\right) \leq 2M_\psi\left(V(f)\right)\psi(h).$$

Для доказательства левого неравенства используем следующую лемму.

Лемма 1. *Если для* $f \in AC$ *найдется бесконечная последовательность попарно различных* $\{h_i\} \downarrow 0$ *такая, что*

$$\left\| \frac{\Delta_{h_i} f}{h_i} \right\|_\psi \to 0 \quad \textit{при} \quad i \to \infty,$$

то $f \equiv \text{const}$.

Для пространств L_p, $0 < p < 1$, это утверждение доказано в [5] (лемма 1.5), и доказательство остается справедливым для всех L_ψ.

Из леммы вытекает, что если $f \in AC$, $f \neq \text{const}$, то найдется постоянная $K > 0$ такая, что для всех достаточно малых $h > 0$

$$\left\| \frac{\Delta_h f}{h} \right\|_\psi \ \geq\ K > 0. \tag{29}$$

С другой стороны,

$$\left\| \frac{\Delta_h f}{h} \right\|_\psi \ \leq\ M_\psi\left(\frac{1}{h}\right) \| \Delta_h f \|_\psi \ \leq\ M_\psi\left(\frac{1}{h}\right) \omega(f,h)_\psi. \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует левая часть (28).

Теорема 4 доказана.

Заметим, что $\psi(1) = \psi\left(\frac{1}{h} h\right) \leq M_\psi\left(\frac{1}{h}\right) \psi(h)$, т. е.

$$\frac{\psi(1)}{M_\psi(1/h)} \ \leq\ \psi(h), \tag{31}$$

однако в (31) возможен и знак строгого неравенства.

Нам не известно, можно ли усилить нижнюю оценку в (28) для произвольной $\psi \in \Omega$. А вот верхняя оценка в (28) неулучшаемая для каждой ψ. Действительно, пример функции $g \in AC$,

$$g(x) \ =\ \begin{cases} x, & x \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right], \\[2ex] \dfrac{1}{2} - x, & x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right], \end{cases} \qquad g\left(x + \frac{1}{2}\right) \ =\ -g(x),$$

показывает, что оценка $\omega(f,h)_\psi = 0(\psi(h))$, $h \to 0$, на классе $f \in AC$, $f \neq \text{const}$, невозможна.

Пусть $\overline{\Omega}$ — класс выпуклых вверх функций ψ из Ω,

$$\overline{\Omega}_1 \ =\ \left\{ \psi \in \overline{\Omega} :\ \lim_{s \to 0} \frac{\psi(s)}{s} = 1 \right\}. \tag{32}$$

Легко видеть (см. [3]), что для $\psi \in \overline{\Omega}_1$ $M_\psi(s) = s$ $\forall s \geq 1$.

Таким образом, получаем следующее утверждение.

***Следствие* 6.** *Если* $\psi \in \overline{\Omega}_1$, *то все абсолютно непрерывные функции* f $(f \neq \mathrm{const})$ *принадлежат классу* $\mathrm{Lip}(1,\psi)$.

Это справедливо, например, в пространствах L_0, $\ln(1+L)$, для которых $\gamma_\psi = 0$. Если же $\psi(t) := \min(t, t^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, то $\psi \in \overline{\Omega}_1$ и $\gamma_\psi = \alpha$. Таким образом, для функций ψ из $\overline{\Omega}_1$ γ_ψ может принимать любое значение из $[0,1]$.

Однако, как мы сейчас покажем, если изменить условие (32) на (33), то в случае $\gamma_\psi > 0$ класс $\mathrm{Lip}(1,\psi)$ уже не содержит абсолютно непрерывных функций.

Для заданной $\psi \in \Omega$ скажем, что функция f имеет ограниченную ψ-вариацию $(f \in V_\psi)$, если

$$V_\psi(f) := \sup\nolimits_{0 = x_0 < \ldots < x_n = 1} \sum\nolimits_{k=1}^{n} \psi\left(|f(x_k) - f(x_{k-1})|\right) < \infty .$$

Следующая теорема об описании классов $\mathrm{Lip}(1,\psi)$ в случае пространств L_p, $0 < p < 1$, доказана В. Г. Кротовым [10]. При доказательстве мы по существу повторяем рассуждения из [10], внося лишь необходимые технические изменения.

Теорема 5. *Пусть* $\psi \in \Omega$ *такова, что* $\gamma_\psi > 0$ *и*

$$\limsup_{s \to 0} \frac{\psi(s)}{s} = \infty . \tag{33}$$

Тогда следующие условия равносильны:

1) $f \in \mathrm{Lip}(1,\psi)$;

2) f *эквивалентна функции класса* V_ψ;

3) f *эквивалентна функции вида*

$$f_d(x) = d_0 + \sum_{x_k < x} d_k , \tag{34}$$

где $\{x_k\}$ — *последовательность попарно различных точек из* $[0,1]$, *и* $\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \psi(|d_k|) < \infty$.

Таким образом, при указанных условиях на ψ класс $\mathrm{Lip}(1,\psi)$ состоит только из функций скачков (34).

Ясно, что от условия (33) избавиться нельзя; достаточно положить $L_\psi = L_1$.

Доказательство. Покажем, что 1) $\Rightarrow$ 3). Поскольку $\gamma_\psi > 0$, согласно следствию 5 $f \in \mathrm{Lip}(1, L_1)$, а значит, $f \in V$ (после изменения ее значений на множестве меры нуль). Пусть ее разложение Лебега

$$f = f_a + f_s + f_d\,, \tag{35}$$

где f_a — абсолютно непрерывная составляющая, f_s — сингулярная часть, f_d — функция скачков вида (34).

Покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi\left(|d_k|\right) < \infty\ . \tag{36}$$

Следуя [10], для фиксированного $n \in N$ выберем $h > 0$ настолько малым, что

$$(x_k - h, x_k) \cap (x_i - h, x_i) = \varnothing, \qquad i \neq k, \quad i, k = 1,\ldots,n\,,$$

$$|d_k| \leq 2\left|f(x+h) - f(x)\right|, \qquad x \in (x_k - h, x_k), \quad k = 1,\ldots,n\,.$$

Тогда в силу того, что $\|\Delta_h f\|_\psi \leq C_f h$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \psi\left(|d_k|\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{h} \int_{x_k - h}^{x_k} \psi\left(\left|f(x+h) - f(x)\right|\right) dx \leq$$

$$\leq M_\psi(2) \frac{1}{h} \int_0^h \psi\left(\left|\Delta_h f(x)\right|\right) dx \leq M_\psi(2) C_f$$

для всех $n \in N$. Отсюда следует (36), а значит, наряду с $f \in \mathrm{Lip}(1,\psi)$ и $f_d \in \mathrm{Lip}(1,\psi)$.

Следовательно (см. (35)), функция $g := f_a + f_s$ тоже принадлежит $\mathrm{Lip}(1,\psi)$. Кроме того, $g \in C$. Отсюда выведем, что $g \equiv \mathrm{const}$. Тогда из (35) будет следовать данное утверждение.

Оценим приращение g в L_1:

$$\|\Delta_h g\|_1 := \int_0^1 \left|\Delta_h g(x)\right| dx = \int_0^1 \psi\left(\left|\Delta_h g(x)\right|\right) \left(\frac{\left|\Delta_h g(x)\right|}{\psi\left(\left|\Delta_h g(x)\right|\right)}\right) dx \leq$$

$$\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{\left|\Delta_h g(x)\right|}{\psi\left(\left|\Delta_h g(x)\right|\right)} \|\Delta_h g\|_\psi \leq C_f h \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{\left|\Delta_h g(x)\right|}{\psi\left(\left|\Delta_h g(x)\right|\right)}. \tag{37}$$

Поскольку

$$\psi(y) \leq \overline{\psi}(y) \leq 2\psi(y), \qquad \frac{\overline{\psi}(y)}{y} \downarrow,$$

то

$$\sup_{0\le y\le b}\frac{y}{\psi(y)} \le 2\sup_{0\le y\le b}\frac{y}{\overline{\psi}(y)} = 2\frac{b}{\overline{\psi}(b)} \le 2\frac{b}{\psi(b)},$$

поэтому

$$\sup_{0\le x\le 1}\frac{|\Delta_h g(x)|}{\psi(|\Delta_h g(x)|)} \le 2\frac{\|\Delta_h g\|_C}{\psi(\|\Delta_h g\|_C)} \le 2\frac{\omega(g,h)_C}{\psi(\omega(g,h)_C)}.$$

В силу условия (33)

$$\frac{\omega(g,h)_C}{\psi(\omega(g,h)_C)} = o(1), \quad h\to 0. \tag{38}$$

Из (37) и (38) следует, что $\|\Delta_h g\|_1 = o(h)$, и $g = \mathrm{const}$. Таким образом, $f = f_d + \mathrm{const}$. Остальные утверждения теоремы достаточно очевидны.

1. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 122 – 133.
2. *Пичугов С. А.* О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 11. – С. 1524 – 1533.
3. *Пичугов С. А.* Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1657 – 1671.
4. *Пичугов С. А.* Обратные теоремы Джексона в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 3. – С. 351 – 362.
5. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0<p<1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
6. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0<p<1$ // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 5. – С. 641 – 658.
7. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1982. – **45**, № 1. – С. 3 – 22.
8. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
9. *Стороженко Э. А.* О некоторых теоремах вложения // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 2. – С. 187 – 200.
10. *Кротов В. Г.* О дифференцируемости функций из L_p, $0<p<1$ // Мат. сб. – 1982. – **117**, № 1. – С. 95 – 113.
11. *Hardy G. H., Littlewood J.* Some properties of functional integrals. I // Math. Z. – 1928. – **27**. – P. 565 – 606.
12. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
13. *Bennett C., Sparsley R.* Interpolation of operators. – New York: Acad. Press, 1988. – 469 p.
14. *Пичугов С. А.* Аппроксимация измеримых периодических функций по мере кусочно-постоянными функциями // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 711 – 715.
15. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

Получено 10.10.11,
после доработки — 24.03.12