УДК 517.9

В. В. Миронюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ СУМАМИ ФУР'Є У ПРОСТОРІ L_p ПРИ $p = 1, \infty$

We obtain an exact-order estimate for the deviation of Fourier sums of periodic functions of many variables from the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ in the space L_p for $p = 1, \infty$.

Получена точная по порядку оценка отклонения частных сумм Фурье периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в пространстве L_p при $p = 1, \infty$.

Вступ. Роботу присвячено дослідженню наближення „кубічними" сумами Фур'є періодичних функцій багатьох змінних з узагальнених класів Бєсова $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_p при $p = 1, \infty$. З точки зору теорем вкладення ці класи розглядалися в роботах М. Л. Гольдмана [1] і Г. А. Калябіна [2]. Пізніше їхні апроксимативні характеристики вивчались у роботах Li Yungping, Xu Guiqiao [3], Xu Guiqiao [4]. Подальше дослідження класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ проводилось у роботах С. А. Стасюка [5], [6], С. П. Войтенка [7, 8], К. В. Соліч [9] та ін.

У даній роботі продовжено вивчення апроксимативних характеристик функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Для більш детальної постановки задачі наведемо необхідні означення та позначення.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, позначає d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1 \leq p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ і $h \in \mathbb{R}^d$ позначимо

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x)$$

і визначимо кратну різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ функції f у точці x з кроком h згідно з формулою

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_h \Delta_h^{l-1} f(x), \qquad \Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Кратну різницю $\Delta_h^l f(x)$ також можна записати у вигляді

$$\Delta_h^l f(x) = \sum_{j=0}^{l} (-1)^{j+l} C_l^j f(x + jh).$$

Відштовхуючись від кратної різниці $\Delta_h^l f(x)$, визначимо модуль неперервності l-го порядку функції $f \in L_p(\pi_d)$, який будемо позначати $\Omega_l(f, t)_p$, згідно з формулою

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{|h|\le t} \left\| \Delta_h^l f(\cdot) \right\|_p,$$

де $|h| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} h_j^2}$ — евклідова норма h.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l, тобто $\Omega(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\Omega(0) = 0$, $\Omega(t) > 0$ для $t > 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}_+$;

3) $\Omega(t)$ неспадна на $\mathbb{R}_+$;

4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ $\Omega(nt) \le C n^l \Omega(t)$, де $C > 0$ не залежить від n і t.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f \in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f,\cdot)_p \in \Psi_l$.

Підпорядкуємо функції $\Omega \in \Psi_l$ додатковим умовам, які опишемо в термінах двох понять, уведених С. Н. Бернштейном [10]:

а) невід'ємна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in [0;\infty)$, майже зростає, якщо існує стала $C_1 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \le C_1 \varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 \le \tau_1 < \tau_2$;

б) додатна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0;\infty)$, майже спадає, якщо існує стала $C_2 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \ge C_2 \varphi(\tau_2)$ для будь-яких τ_1, τ_2, $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Будемо вважати, що Ω належить множинам S^α і S_l. Умови належності до цих множин часто в літературі називають умовами Барі – Стєчкіна [11]. Це означає наступне:

I) $\Omega \in S^\alpha$ $(\alpha > 0)$, якщо функція $\dfrac{\Omega(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при $\tau > 0$;

II) $\Omega \in S_l$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\dfrac{\Omega(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при $\tau > 0$.

Покладемо також $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$. Варто зазначити, що функції $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ можуть мати, наприклад, вигляд

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r \left(\log^+ \left(\dfrac{1}{t} \right) \right)^\beta, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

де $\log^+(t) = \max\{1, \log(t)\}$, $0 < r < l$, а β — фіксоване дійсне число.

Для $1 \le p, \theta \le \infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, простір $B^\Omega_{p,\theta}$ визначається таким чином:

$$B^\Omega_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) \colon \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \overset{\mathrm{df}}{=} \|f\|_p + |f|_{b^\Omega_{p,\theta}} < \infty \right\},$$

де напівнорма $|f|_{b^\Omega_{p,\theta}}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{b^\Omega_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\dfrac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \dfrac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} \dfrac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простір $B^{\Omega}_{p,\theta}$ — лінійний нормований простір із нормою

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{b^{\Omega}_{p,\theta}}.$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, $0 < r < l$, то простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з просторами О. В. Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$ [13] і, зокрема, при $\theta = \infty$ та $\Omega(t) = t^r$ $B^{r}_{p,\infty} \equiv H^r_p$, де H^r_p — простори, введені С. М. Нікольським [12]. Таким чином, простори $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є узагальненням (за гладкісним параметром) відомих просторів Нікольського – Бєсова.

Далі по тексту використовується запис $A \asymp B$, який означає, що для невід'ємних величин A та B, залежних від деякої сукупності параметрів, існує додатна стала C така, що $C^{-1}A \leq$ $\leq B \leq CA$. Якщо тільки $B \leq CA$ ($B \geq C^{-1}A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$). Із контексту буде зрозуміло від яких параметрів не залежить стала $C > 0$. Ми не будемо акцентувати на цьому увагу щоразу при використанні символів $\asymp$, $\ll$, $\gg$.

У подальших міркуваннях нам буде зручно користуватися еквівалентним (з точністю до абсолютних сталих множників) зображенням норми функцій з одиничних куль просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Пояснимо це.

Нехай $V_m(\cdot)$, $m \in \mathbb{N}$, позначає одновимірне ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \frac{2m-k}{m} \cos kt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тоді в точці $x = (x_1, \ldots, x_d)$ багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, визначимо згідно з формулою

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Через $\mathbb{V}_m$ позначимо оператор, який задає згортку функції $f \in L_p(\pi_d)$ з багатовимірним ядром V_m, тобто

$$\mathbb{V}_m f(x) := (f * V_m)(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) V_m(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Для $f \in L_1(\pi_d)$ покладемо

$$\sigma_0(f,x) = \mathbb{V}_1 f(x), \qquad \sigma_s(f,x) = \mathbb{V}_{2^s} f(x) - \mathbb{V}_{2^{s-1}} f(x), \qquad s \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Далі, якщо не стверджується інше, під поняттям „класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$" будемо розуміти одиничні кулі у просторі $B^{\Omega}_{p,\theta}$, тобто клас $B^{\Omega}_{p,\theta} := \{f \in L_p(\pi_d) \colon \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \leq 1\}$.

Відомо (див., наприклад, [4]), що при $1 \leq p \leq \infty$ для функцій f із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \left(\dfrac{\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s \in \mathbb{Z}_+} \dfrac{\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Зазначимо, що для просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ справедливі вкладення

$$B^{\Omega}_{p,1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta'} \subset B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_{p}, \qquad 1 < \theta < \theta' < \infty.$$

1. Основні результати. Визначимо величини, які будуть досліджуватись у роботі.

Для $f \in L_1(\pi_d)$ і $n \in \mathbb{N}$ через $S_n(f,x)$ позначимо кратну суму Фур'є

$$S_n(f,x) = \sum_{k \in K(n)} \widehat{f}(k) e^{i(k,\,x)},$$

де $K(n) = \big\{k = (k_1, \ldots, k_d) \colon |k_j| \le n,\, j = \overline{1,d}\big\}$, $(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$ і

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(x) e^{-i(k,\,x)} dx$$

— коефіцієнти Фур'є функції f. Дану суму природно називати „кубічною" сумою Фур'є функції f. Зауважимо, що її можна записати у вигляді згортки з багатовимірним ядром Діріхле:

$$S_n(f,x) = (f * D_n)(x), \tag{2}$$

де $D_n(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx_j \right)$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

Отже, для $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, позначимо

$$\mathcal{E}_n(f)_p = \|f(\cdot) - S_n(f,\cdot)\|_p \tag{3}$$

і для функціонального класу $F \subset L_p(\pi_d)$ покладемо

$$\mathcal{E}_n(F)_p = \sup_{f \in F} \mathcal{E}_n(f)_p\,.$$

Нехай

$$T_n = \left\{ t \colon t(x) = \sum_{k \in K(n)} c_k e^{i(k,\,x)},\ c_k \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ покладемо

$$E_n(f)_p = \inf_{t \in T_n} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_p \tag{4}$$

і

$$E_n(F)_p = \sup_{f \in F} E_n(f)_p, \qquad F \subset L_p(\pi_d).$$

Нижче при встановленні оцінки зверху в теоремі 1 нам знадобиться допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай $f \in L_p(\pi_d)$, $p = 1, \infty$, тоді виконується порядкова нерівність*

$$\mathcal{E}_n(f)_p \ll \ln^d(n+1) E_n(f)_p. \tag{5}$$

Зауважимо, що в одновимірному випадку для неперервних 2π-періодичних функцій порядкову нерівність (5) отримав Лебег (див., наприклад, [14, с. 116]), а для сумовних 2π-періодичних функцій див., наприклад, [15] (розділ 1). Нерівність (5) при $d \geq 2$ встановлюється аналогічно одновимірному випадку. Для зручності наведемо відповідне міркування.

Нехай $t_n^* \in T_n$ — поліном найкращого наближення функції f у просторі $L_p(\pi_d)$. Враховуючи, що $\left\| \dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right\|_1 \asymp \ln(n+1)$, $t \in \mathbb{R}$ (див., наприклад, [14, с. 112]), згідно з рівністю $S_n(t_n^*, x) \equiv t_n^*(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, та (2) отримуємо

$$\mathcal{E}_n(f)_p = \|f(\cdot) - S_n(f, \cdot)\|_p = \|f(\cdot) - t_n^*(\cdot) - S_n(f - t_n^*, \cdot)\|_p \leq$$

$$\leq \|f(\cdot) - t_n^*(\cdot)\|_p + \|((f - t_n^*) * D_n)(\cdot)\|_p \leq$$

$$\leq E_n(f)_p + E_n(f)_p \|D_n(\cdot)\|_1 = E_n(f)_p + E_n(f)_p \prod_{j=1}^{d} \left\| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx_j \right\|_1 \ll$$

$$\ll \ln^d(n+1) E_n(f)_p.$$

Отже, оцінку (5) встановлено.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $p = 1, \infty$ *і* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $1 \leq \theta \leq \infty$ *має місце порядкова оцінка*

$$\mathcal{E}_n(B_{p,\theta}^{\Omega})_p \asymp \Omega(n^{-1}) \ln^d(n+1). \tag{6}$$

Доведення. Оцінку зверху отримуємо згідно з (5) із результату

$$E_n(B_{p,\theta}^{\Omega})_p \asymp \Omega(n^{-1}), \qquad p = 1, \infty, \quad 1 \leq \theta \leq \infty,$$

який встановлено в [6].

Відповідну оцінку знизу в (6) достатньо довести при $\theta = 1$, оскільки $B_{p,1}^{\Omega} \subset B_{p,\theta}^{\Omega}$ при $1 < \theta \leq \infty$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $p = 1$. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що $n = 3 \cdot 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. Побудуємо функцію, яка реалізовує оцінку знизу в (6).

Нехай $K_N(t)$, $t \in \mathbb{R}$, позначає ядро Фейєра порядку $N \in \mathbb{N}$:

$$K_N(t) = \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{ikt}.$$

Тоді багатовимірне ядро $K_N(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $N \in \mathbb{N}$, визначимо згідно з формулою

$$K_N(x) = \prod_{j=1}^{d} K_N(x_j).$$

Розглянемо функцію

$$f(x) = C_3\, \Omega(2^{-m}) \prod_{j=1}^{d} \varphi(x_j), \quad C_3 > 0,$$

де $\varphi(x_j) = e^{i(2^m + 2^{m+1})x_j} K_{2^m}(x_j)$, $x_j \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$.

Покажемо, що при певному виборі сталої $C_3 > 0$ функція f належить класу $B^{\Omega}_{1,1}$. Оскільки поліном f містить гармоніки тільки з „номерами”, які належать кубу $\prod_{j=1}^{d}[2^{m+1}+1; 2^{m+2}-1]$, то за винятком, можливо, $\sigma_{m+1}(f,x)$ та $\sigma_{m+2}(f,x)$, для всіх інших $\sigma_s(f,x)$ виконується рівність $\sigma_s(f,x) = 0$. Позначимо

$$\upsilon_{s+1}(x) = \prod_{j=1}^{d} V_{2^{s+1}}(x_j) - \prod_{j=1}^{d} V_{2^s}(x_j).$$

Тоді, беручи до уваги, що $\|K_N(t)\|_1 = 1$, $t \in \mathbb{R}$ (див., наприклад, [14, с. 118]), отримуємо

$$\|\upsilon_{m+1}(x)\|_1 = \left\| \prod_{j=1}^{d} V_{2^{m+1}}(x_j) - \prod_{j=1}^{d} V_{2^m}(x_j) \right\|_1 \leq$$

$$\leq \left\| \prod_{j=1}^{d} (2K_{2^{m+1}}(x_j) - K_{2^m}(x_j)) \right\|_1 + \left\| \prod_{j=1}^{d} (2K_{2^m}(x_j) - K_{2^{m-1}}(x_j)) \right\|_1 \leq 2 \cdot 3^d$$

і згідно з властивістю згортки

$$\|\sigma_{m+1}(f,x)\|_1 \ll \Omega(2^{-m}) \|\upsilon_{m+1}(x)\|_1 \left\| \prod_{j=1}^{d} e^{i(2^m + 2^{m+1})x_j} K_{2^m}(x_j) \right\|_1 \ll \Omega(2^{-m}). \qquad (7)$$

Аналогічно для $\sigma_{m+2}(f,x)$ маємо

$$\|\sigma_{m+2}(f,x)\|_1 \ll \Omega(2^{-m}). \qquad (8)$$

Враховуючи (7) та (8), одержуємо

$$\sum_{s \in Z_+} \Omega^{-1}(2^{-s}) \, \|\sigma_s(f,\cdot)\|_1 =$$

$$= \Omega^{-1}(2^{-(m+1)}) \, \|\sigma_{m+1}(f,\cdot)\|_1 + \Omega^{-1}(2^{-(m+2)}) \, \|\sigma_{m+2}(f,\cdot)\| \ll$$

$$\ll \frac{\Omega(2^{-m})}{\Omega(2^{-(m+1)})} + \frac{\Omega(2^{-m})}{\Omega(2^{-(m+2)})} \leq C_4, \quad C_4 > 0,$$

а отже, згідно з (1) функція f при відповідному виборі сталої $C_3 > 0$ належить класу $B^{\Omega}_{1,1}$.

Розглянемо наближення в $L_1(\pi_d)$ функції f за допомогою її частинної суми Фур'є $S_n(f,x)$, $n = 3 \cdot 2^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Маємо

$$\|f(x) - S_n(f,x)\|_1 \geq \left| \|S_n(f,x)\|_1 - \|f(x)\|_1 \right| \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-m}) \left| \prod_{j=1}^{d} \|S_n(\varphi, x_j)\|_1 - \prod_{j=1}^{d} \|\varphi(x_j)\|_1 \right| =$$

$$= \Omega(2^{-m}) \left| \prod_{j=1}^{d} \|S_n(\varphi, x_j)\|_1 - 1 \right|. \tag{9}$$

Далі розглянемо частинну суму Фур'є $S_n(\varphi, t)$, $t \in \mathbb{R}$, функції φ. За допомогою елементарних перетворень можна показати, що

$$S_n(\varphi, t) = e^{i(2^m + 2^{m+1})t} \sum_{k=-2^m}^{0} \left(1 - \frac{|k|}{2^m}\right) e^{ikt},$$

а тому, беручи до уваги співвідношення $|a + ib| \geq \max\{|a|, |b|\}$, a, $b \in \mathbb{R}$, отримуємо

$$\|S_n(\varphi, t)\|_1 = \left\| \sum_{k=-2^m}^{0} \left(1 - \frac{|k|}{2^m}\right) e^{ikt} \right\|_1 =$$

$$= \left\| \sum_{k=-2^m}^{0} \left(1 - \frac{|k|}{2^m}\right) \cos kt + i \sum_{k=-2^m}^{0} \left(1 - \frac{|k|}{2^m}\right) \sin kt \right\|_1 \geq$$

$$\geq \left\| \sum_{k=-2^m}^{0} \left(1 - \frac{|k|}{2^m}\right) \sin kt \right\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kt \right\|_1. \tag{10}$$

Для того щоб продовжити оцінку (10), позначимо

$$F(t) = \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kt$$

і розглянемо функцію

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}.$$

Відомо (див., наприклад, [16, с. 447]), що

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi - t}{2}, & t \in (0, 2\pi), \\ 0, & t \in \{0, 2\pi\}. \end{cases}$$

Позначимо через ψ^* 2π-періодичне продовження функції ψ на дійсну вісь.

Нехай

$$I = (F, \psi^*) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} F(x) \overline{\psi^*(x)} dx.$$

Тоді, з одного боку,

$$I = \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{2^m} \frac{1}{k}, \tag{11}$$

а з іншого, згідно з нерівністю Гельдера, можемо записати

$$I \leq \|F\|_1 \|\psi^*\|_\infty = \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kt \right\|_1 \left\| \frac{\pi - t}{2} \right\|_\infty \ll \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kt \right\|_1 . \qquad (12)$$

Із (10), враховуючи (11) та (12), отримуємо

$$\|S_n(\varphi, t)\|_1 \geq \left\| \sum_{k=1}^{2^m} \left(1 - \frac{k}{2^m}\right) \sin kt \right\|_1 \gg \sum_{k=2}^{2^m} \frac{1}{k} \gg \ln 2^m. \qquad (13)$$

Таким чином, беручи до уваги (9) та (13), знаходимо

$$\mathcal{E}_n(B^{\Omega}_{1,\theta})_1 \geq \|f(x) - S_n(f, x)\|_1 \gg \Omega(2^{-m}) \prod_{j=1}^{d} \ln 2^m \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-m}) \ln^d 2^m \asymp \Omega(n^{-1}) \ln^d (n+1).$$

Оцінку знизу у випадку $p = 1$ встановлено.

Перейдемо тепер до встановлення оцінки знизу у випадку $p = \infty$. Як і у попередньому випадку, шукану оцінку достатньо встановити при $n = 4 \cdot 2^m + 2$, $m \in \mathbb{N}$. Почнемо з побудови екстремальної функції.

Нехай

$$g(x) = C_7 \Omega(2^{-m}) \prod_{j=1}^{d} e^{i(3 \cdot 2^m + 1)x_j} G_m(x_j), \quad C_5 > 0,$$

де

$$G_m(x_j) = \sum_{|k|=1}^{2^m} \frac{e^{ikx_j}}{2^m + 1 - |k|} + \sum_{|k|=2^m+2}^{2^{m+1}+1} \frac{e^{ikx_j}}{2^m + 1 - |k|}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що при певному виборі сталої $C_5 > 0$ функція g належить класу $B^{\Omega}_{\infty,1}$. Для цього виконаємо наступні перетворення полінома $G_m(x_j)$:

$$G_m(x_j) = \sum_{|k|=1}^{2^m} \frac{e^{ikx_j}}{2^m + 1 - |k|} - \sum_{|k|=2^m+2}^{2^{m+1}+1} \frac{e^{ikx_j}}{|k| - (2^m + 1)} =$$

$$= 2\left(\frac{\cos x_j}{2^m} + \frac{\cos 2x_j}{2^m - 1} + \ldots + \frac{\cos 2^m x_j}{1} \right) -$$

$$-2\left(\frac{\cos(2^m + 2)x_j}{1} + \frac{\cos(2^m + 3)x_j}{2} + \ldots + \frac{\cos(2^{m+1} + 1)x_j}{2^m} \right) =$$

$$= 2\left(\frac{\cos 2^m x_j - \cos(2^m + 2)x_j}{1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(2^m - 1)x_j - \cos(2^m + 3)x_j}{2} + \ldots + \frac{\cos x_j - \cos(2^{m+1} + 1)x_j}{2^m} \right) =$$

$$= 4\sin(2^m+1)x_j \sum_{k=1}^{2^m} \frac{\sin kx_j}{k}.$$

Як зазначалось вище, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kt}{k}$ збігається в кожній точці $t \in \mathbb{R}$ і його сума є функцією із $L_\infty([-\pi,\pi])$, а тому частинні суми $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin kt}{k}$ є рівномірно обмеженими в $L_\infty\big([-\pi,\pi]\big)$. Звідси випливає, що і $G_m \in L_\infty([-\pi,\pi])$.

Зауважимо, що тригонометричний поліном g містить гармоніки лише з „номерами", які належать кубу $\prod_{j=1}^{d}[2^m; 5\cdot 2^m+2]$. Отже, як і у випадку $p=1$, можна стверджувати, що за винятком, можливо, $\sigma_m(g,x)$, $\sigma_{m+1}(g,x)$, $\sigma_{m+2}(g,x)$ та $\sigma_{m+3}(g,x)$ для усіх інших $\sigma_s(g,x)$ виконується рівність $\sigma_s(g,x)=0$.

Оцінимо $\|\sigma_s(g,x)\|_\infty$ при $s=\overline{m,m+3}$. Маємо

$$\|\sigma_m(g,x)\|_\infty \ll \Omega(2^{-m})\|\upsilon_m(x)\|_1 \left\| \prod_{j=1}^{d} e^{i(3\cdot 2^m+1)x_j} G_{2^m}(x_j) \right\|_\infty \ll \Omega(2^{-m}) \tag{14}$$

і аналогічно

$$\|\sigma_s(g,x)\|_\infty \ll \Omega(2^{-m}) \tag{15}$$

при $s=m+1,\, m+2,\, m+3$.

Для функції g, як наслідок співвідношення (1), враховуючи (14) та (15), отримуємо

$$\|g\|_{B^\Omega_{\infty,1}} \ll \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \Omega^{-1}(2^{-s})\|\sigma_s(g,\cdot)\|_\infty =$$

$$= \Omega^{-1}(2^{-m})\|\sigma_m(g,\cdot)\|_\infty + \Omega^{-1}(2^{-(m+1)})\|\sigma_{m+1}(g,\cdot)\|_\infty +$$

$$+ \Omega^{-1}(2^{-(m+2)})\|\sigma_{m+2}(g,\cdot)\|_\infty + \Omega^{-1}(2^{-(m+3)})\|\sigma_{m+3}(g,\cdot)\|_\infty \ll$$

$$\ll \frac{\Omega(2^{-m})}{\Omega(2^{-m})} + \frac{\Omega(2^{-m})}{\Omega(2^{-(m+1)})} + \frac{\Omega(2^{-m})}{\Omega(2^{-(m+2)})} + \frac{\Omega(2^{-m})}{\Omega(2^{-(m+3)})} \le C_6, \quad C_6 > 0.$$

Звідси випливає, що при певному виборі сталої $C_5>0$ функція g належить класу $B^\Omega_{\infty,1}$.

Розглянемо наближення в $L_\infty(\pi_d)$ функції g її частинною сумою Фур'є $S_n(g,x)$, $n=4\cdot 2^m+2$, $m\in\mathbb{N}$. Маємо

$$\mathcal{E}_n(B^\Omega_{\infty,\theta})_\infty \ge \|g(\cdot)-S_n(g,\cdot)\|_\infty \ge \Big| \|S_n(g,\cdot)\|_\infty - \|g(\cdot)\|_\infty \Big| \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-m}) \left| \prod_{j=1}^{d} \left\| \sum_{k=2^m+2}^{2^{m+1}+1} \frac{e^{i(k+3\cdot 2^m+1)x_j}}{2^m+1-k} \right\|_\infty - \prod_{j=1}^{d} \|G_m(x_j)\|_\infty \right| \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-m}) \prod_{j=1}^{d} \sum_{k=2^m+2}^{2^{m+1}+1} \frac{1}{k-2^m-1} =$$

$$= \Omega(2^{-m}) \prod_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \asymp \Omega(2^{-m}) \ln^d 2^m \asymp \Omega(n^{-1}) \ln^d (n+1).$$

Оцінку знизу при $p = \infty$ і разом з нею теорему 1 доведено.

Сформулюємо наслідок теореми 1 для класів $B^r_{p,\theta}$, тобто у випадку, коли $\Omega(t) = t^r$, $r > 0$.

Наслідок. *Нехай* $p = 1, \infty$, $1 \le \theta < \infty$ *і* $r > 0$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n(B^r_{p,\theta})_p \asymp n^{-r} \ln^d (n+1).$$

Зауваження. **1.** У випадку $\theta = \infty$, який не охоплено наслідком, тобто для класів H^r_p, порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(H^r_p)_p$, $p = 1, \infty$, знайдено В. М. Темляковим (див., наприклад, [15], розділ 2).

2. В одновимірному випадку ($d = 1$) при $p = 1$ наслідок і теорему 1 встановлено відповідно А. С. Романюком [17] та С. А. Стасюком [5].

Користуючись нагодою, висловлюю щиру подяку моєму науковому керівникові Анатолію Сергійовичу Романюку за постановку задачі, корисні зауваження та поради у роботі.

1. *Гольдман М. Л.* Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского – Бесова с модулями непрерывности общего вида // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1984. – **170**. – С. 84 – 106.
2. *Калябин Г. А.* Теоремы вложения для обобщенных пространств Бесова и Лиувилля // Докл. АН СССР. – 1977. – **232**, № 6. – С. 1245 – 1248.
3. *Liu Yongping, Xu Cuiqiao* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // J. Complexity. – 2002. – **18**. – P. 815 – 832.
4. *Xu Guiqiao* The n-widths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. Ser. B. Engl. Ed. – 2005. – **25B**, № 4. – P. 663 – 671.
5. *Стасюк С. А.* Приближение суммами Фурье классов $B^{\omega}_{1,\theta}$ периодических функций в пространстве L_1 // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 338 – 344.
6. *Стасюк С. А.* Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях // Мат. студ. – 2011. – **35**, № 1. – С. 66 – 73.
7. *Войтенко С. П.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 9. – С. 1189 – 1199.
8. *Войтенко С. П.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1473 – 1484.
9. *Соліч К. В.* Білінійні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 325 – 337.
10. *Бернштейн С. Н.* Конструктивная теория функций (1931–1953) // Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – **2.** – 626 с.
11. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
12. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
13. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
14. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
15. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 272 p.
16. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука 1976. – Т 3. – 656 с.
17. *Романюк А. С.* Приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций одной и многих переменных // Мат. заметки. – 2010. – **87**, № 3. – С. 429 – 442.

Одержано 09.04.12