

Р. В. Грушевой (Ін-т математики НАН України, Київ)

КОЛИ СУМА САМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ЦІЛОЧИСЕЛЬНИМИ СПЕКТРАМИ Є СКАЛЯРНИМ ОПЕРАТОРОМ

We describe the set Σ_{M_1, \dots, M_n} of parameters γ for which there exists a decomposition of the operator γI_H into a sum of n self-adjoint operators with the spectra belonging to the sets M_1, \dots, M_n . The description of this set is performed for $M_i = \{0, 1, \dots, k_i\}$ in the case of $n \geq 4$ and in some cases for $n = 3$.

Описано множество Σ_{M_1, \dots, M_n} параметрів γ , для которых существует разложение оператора γI_H в сумму n самосопряженных операторов со спектрами из множеств M_1, \dots, M_n , для $M_i = \{0, 1, \dots, k_i\}$ в случае $n \geq 4$ и некоторые случаи при $n = 3$.

1. Вступ. Вивчення сімей обмежених самоспряжених операторів A_1, A_2, \dots, A_n у гільбертовому просторі H із спектрами $\sigma(A_1) \subseteq M_1, \sigma(A_2) \subseteq M_2, \dots, \sigma(A_n) \subseteq M_n$, що пов'язані лінійним співвідношенням $\sum_{i=1}^n A_i = \gamma I$, де $\gamma \in \mathbb{R}$, I — одиничний оператор в H , є важливою задачею, що виникає у зв'язку з різними задачами математики: деформованими препроективними алгебрами [1], локально скалярними зображеннями графів [2], проблемою Хорна та її варіаціями [3] та ін.

Виявилось, що складність опису таких сімей операторів істотно залежить від кількості операторів A_1, A_2, \dots, A_n та кількості точок у спектрі $\sigma(A_i)$ оператора A_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Часто навіть опис множини параметрів $\sigma(A_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, та γ , при яких взагалі існує гільбертів простір і набір операторів у ньому з відповідними спектрами, що пов'язані наведеним вище співвідношенням, виявляється досить складною задачею.

Так, якщо $M_i = \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то йдеться про вивчення сімей ортопроекторів P_i , $i = 1, 2, \dots, n$, таких, що $P_1 + P_2 + \dots + P_n = \gamma I$. Такі сім'ї ортопроекторів досліджено в [4]; там, зокрема, наведено опис множин

$$\Sigma_n = \{\gamma \mid \exists \text{ гільбертів простір } H \text{ і набір ортопроекторів } P_1, P_2, \dots, P_n \\ \text{в ньому таких, що } P_1 + P_2 + \dots + P_n = \gamma I\}.$$

Опису множин

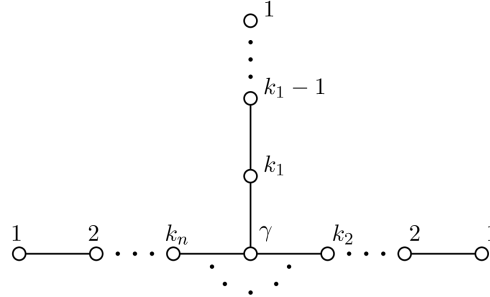
$$\Sigma_{M_1, \dots, M_n} = \{\gamma \mid \exists \text{ гільбертів простір } H \text{ і набір операторів } A_1, A_2, \dots, A_n \\ \text{в ньому таких, що } \sigma(A_i) \subseteq M_i, i = 1, 2, \dots, n, \text{ та } A_1 + A_2 + \dots + A_n = \gamma I\}$$

в конкретних випадках присвячено багато робіт (див., наприклад, [3, 5–9]).

У цій роботі наведено опис множини Σ_{M_1, \dots, M_n} для $M_i = \{0, 1, \dots, k_i\}$.

При $n = 2$ опис є очевидним ($\Sigma_{M_1, M_2} = M_1 + M_2$), при $n \geq 4$ його отримано в повному обсязі (п. 4), у випадку $n = 3$ досліджено деякі спеціальні часткові випадки (п. 3).

2. Елементарні властивості множин \sum_{M_1, \dots, M_n} . Кожному набору множин M_1, \dots, M_n можна однозначно поставити у відповідність зірчастий граф $\Gamma = T_{k_1, \dots, k_n}$ з n гілками по $k_i = |M_i| - 1$ вершин у i -й гілці.



Далі будемо писати $k = \sum k_i$ і множину \sum_{M_1, \dots, M_n} позначатимемо через \sum_{Γ} .

Корисною є наступна лема (аналогі якої доведено в роботах [4, 5]), що описує властивості \sum_{Γ} .

Лема 1. Множини \sum_{Γ} мають такі властивості:

- 1a) $\sum_{\Gamma} \subset [0, k]$;
- 1b) $\sum_{\Gamma} \supset \{0, 1, 2, 3, \dots, k\}$;
- 2) \sum_{Γ} симетрична відносно $\frac{k}{2}$, тобто $\gamma \in \sum_{\Gamma} \Rightarrow k - \gamma \in \sum_{\Gamma}$;
- 3) $\sum_{\Gamma} \cap [0, 2) = \sum_n \cap [0, 2)$;
- 4) якщо Γ_1 — зв'язний підграф Γ_2 з тим же коренем, то $\sum_{\Gamma_1} \subset \sum_{\Gamma_2}$.

Доведення. Використовуючи спектральний розклад операторів A_1, A_2, \dots, A_n , для кожного $\gamma \in \sum_{\Gamma}$ отримуємо

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_j} j P_{ij} = \gamma I, \quad (1)$$

де P_{ij} — ортопроектори в гільбертовому просторі H .

1a. Оскільки в лівій частині (1) стоїть невід'ємний оператор, то $\gamma \geq 0$. Віднявши в (1) від обох частин оператор kI , отримаємо $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_j} (j P_{ij} - k_i I) = (\gamma - k)I$, де ліворуч міститься недодатний оператор, тому $\gamma \leq k$.

1b. Розглядаючи $H = \mathbb{C}$, а оператори $A_i = l_i$, $l_i \in \{0, 1, 2, \dots, k_i\}$, можна отримати $\gamma = l$ для всіх $l = 0, 1, 2, \dots, k$.

2. Нехай $\gamma \in \sum_{\Gamma}$, тоді, за визначенням, існують гільбертів простір H і набір операторів A_i , $\sigma(A_i) \subseteq \{0, 1, 2, \dots, k_i\}$ і $\sum_{i=1}^n A_i = \gamma I$. Тоді в тому ж просторі для операторів $\hat{A}_i = k_i I - A_i$ маємо $\sum_{i=1}^n \hat{A}_i = (k - \gamma)I$, причому $\sigma(\hat{A}_i) = \sigma(A_i)$, звідки $k - \gamma \in \sum_{\Gamma}$.

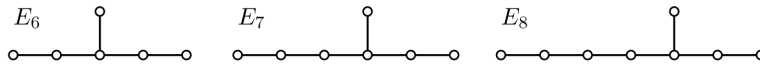
3. Припустимо, що $\gamma \in [0, 2)$ і один із ортопроекторів P_{ml} , $l \geq 2$, не дорівнює нулю, тоді з (1) отримуємо $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_j} j P_{ij} - l P_{ml} = \gamma I - l P_{ml}$. Тут у лівій частині рівності міститься невід'ємний оператор, а у правій — ні. Отже, така ситуація неможлива.

4. Те, що Γ_1 — підграф Γ_2 , означає, що у виразі (1), що відповідає Γ_1 , „не вистачає” деяких доданків, які є в аналогічному виразі для Γ_2 . Але поклавши відповідні ортопроектори рівними нулю, отримуємо ідентичні вирази, а отже, і потрібне включення.

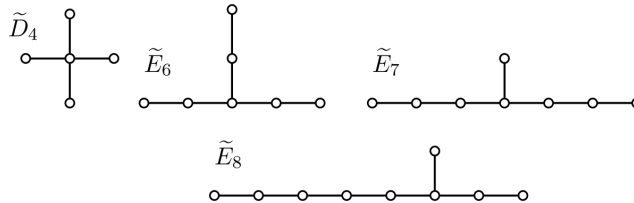
Лемму доведено.

3. Опис множин \sum_{Γ} у випадку трьох операторів. У випадку трьох операторів задача опису множини \sum_{Γ} виявилась найважчою. Тут є три принципово різні випадки, які зручно описувати в термінах графів:

Γ — одна з діаграм Динкіна



Γ — одна з чотирьох евклідових діаграм



Γ не є жодним із вказаних вище графів.

Розглянемо ці випадки окремо.

3.1. Γ — діаграма Динкіна. Опис множини \sum_{Γ} , якщо Γ — діаграма Динкіна, в інших термінах отримано в роботі [3]. Для повноти роботи наведемо цей опис.

Твердження 1. *Мають місце наступні рівності множин:*

$$\sum_{A_n} = \{0, 1, \dots, n - 2, n - 1\},$$

$$\sum_{D_4} = \left\{0, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}, \quad \sum_{D_5} = \left\{0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4\right\},$$

$$\sum_{D_n} = \left\{0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots, \frac{2n-5}{2}, n-2, n-1\right\}, \quad n \geq 5,$$

$$\begin{aligned}\sum_{E_6} &= \left\{0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, 3, \frac{7}{2}, 4, 5\right\}, \\ \sum_{E_7} &= \left\{0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, 4, \frac{9}{2}, 5, 6\right\}, \\ \sum_{E_8} &= \left\{0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, 4, \frac{13}{3}, \frac{9}{2}, \frac{14}{3}, 5, \frac{11}{2}, 6, 7\right\}.\end{aligned}$$

3.2. Γ — евклідова діаграма. В роботі [6] наведено неявний вигляд множин \sum_{Γ} (точніше, більш загальних множин: оператори не обов'язково мають такі спектри, які розглядаються в цій роботі). Але в кожному з випадків для того, щоб явно вписати ці множини, потрібно проводити додаткові обчислення, або аналіз (як в роботі [9]). Виконавши ці обчислення, отримуємо таке твердження.

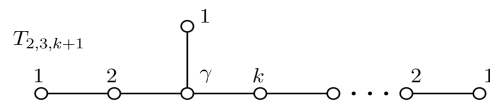
Твердження 2. *Мають місце рівності*

$$\begin{aligned}\sum_{\tilde{D}_4} &= \left\{2 \pm \frac{1}{n}, 2 \pm \frac{2}{n} \mid n \geq 1\right\} \cup \{2\}, \\ \sum_{\tilde{E}_6} &= \left\{3 \pm \frac{1}{n}, 3 \pm \frac{2}{n}, 3 \pm \frac{3}{n} \mid n \geq 1\right\} \cup \{3\}, \\ \sum_{\tilde{E}_8} &= \left\{0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, 4, \frac{13}{3}, \frac{9}{2}, \frac{14}{3}, 5, \frac{16}{3}, \frac{11}{2}, \frac{17}{3}, 6, \frac{19}{2}, 7, 8\right\}.\end{aligned}$$

Перелік точок множини $\sum_{\tilde{E}_7}$ потребує багато громіздких обчислень, тому ми його не наводимо. Але зазначимо, що множина $\sum_{\tilde{E}_7}$ є нескінченною і має єдину граничну точку $\frac{7}{2}$ (див. [9]).

Зауваження 1. Опис множин $\sum_{\tilde{D}_4}$, $\sum_{\tilde{E}_6}$ та вигляд відповідних операторів наведено в роботі [7].

3.3. Γ містить як підграф \tilde{E}_8 , але не містить інших евклідових діаграм. Якщо Γ не є ні діаграмою Динкіна, ні евклідовою діаграмою, то питання опису множини \sum_{Γ} залишається відкритим, і лише часткові випадки вдалось дослідити, а саме випадки, коли графи містять як підграф діаграму Динкіна \tilde{E}_8 , але не містять жодного з графів \tilde{D}_4 , \tilde{E}_6 , \tilde{E}_7 . Ці графи мають вигляд



З ними пов'язано сім'ї операторів A , B , Q такі, що $\sigma(A) \subseteq \{0, 1, 2, \dots, k\}$, $\sigma(B) \subseteq \{0, 1, 2\}$, а Q — ортопроектор. Опис множин $\sum_{T_{2,3,k+1}}$ дає наступна теорема.

Теорема 1. *Для $k \geq 5$ виконується*

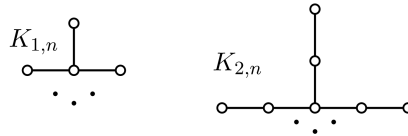
$$\sum_{T_{2,3,k+1}} = \{1, 2, \dots, k+3\} \cup \left\{ \frac{i}{2} \mid i = 3, 4, \dots, 2k+3 \right\} \cup \left\{ \frac{j}{3} \mid j = 7, 8, \dots, 3k+2 \right\}. \tag{2}$$

Доведення проведемо індукцією по k .

База індукції $k = 5$: в цьому випадку отримуємо діаграму Динкіна \tilde{E}_8 , для якої твердження теореми виконується згідно з описом множини $\sum_{\tilde{E}_8}$, наведеним у твердженні 2.

Крок індукції. Для довільного $\gamma \in \sum_{T_{2,3,k+1}} \cap \left[0, \frac{k+3}{2} \right]$, як і в доведенні п. 3 леми 1, отримуємо, що у виразі $\sum_{i=1}^k P_i + B + Q = \gamma I$ ортопроектори $P_i = 0$ для $i > \frac{k+3}{2}$. Таким чином, враховуючи, що $\frac{k+3}{2} \leq k-1$ для $k \geq 6$, маємо $\sum_{T_{2,3,k+1}} \cap \left[0, \frac{k+3}{2} \right] \subset \sum_{T_{2,3,k}} \cap \left[0, \frac{k+3}{2} \right]$. З п. 4 леми отримуємо обернене включення. Згідно з п. 3 тієї ж леми множина $\sum_{T_{2,3,k+1}}$ є симетричною відносно $\frac{k+3}{2}$. Отже, за припущенням індукції отримуємо потрібну рівність, що і завершує доведення теореми.

4. Опис множин \sum_{Γ} у випадку n операторів, $n \geq 4$. У роботах [4, 5] було розглянуто набори проекторів, асоційовані з графами $K_{1,n}$ та $K_{2,n}$ відповідно, які мають такий вигляд:



Опис множини \sum_{Γ} , коли $\Gamma = T_{k_1, \dots, k_n}$, $n \geq 4$, тобто Γ містить \tilde{D}_4 як підграф, дає наступна теорема.

Теорема 2. Нехай $\Gamma = T_{k_1, \dots, k_n}$, $n \geq 4$. Тоді

$$\sum_{\Gamma} = \Lambda_n^{(0)} \cup \Lambda_n^{(1)} \cup \left[\frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, k - \frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2} \right] \cup (k - \Lambda_n^{(1)}) \cup (k - \Lambda_n^{(0)}), \tag{3}$$

де

$$\Lambda_n^{(0)} = \left\{ 0, 1 + \frac{1}{n-1}, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{n-1}}, \dots, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{\dots - \frac{1}{n-1}}}}}, \dots \right\},$$

$$\Lambda_n^{(1)} = \left\{ 1, 1 + \frac{1}{n-2}, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{n-2}}, \dots, 1 + \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{(n-2) - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{n-2}}}} \right\}.$$

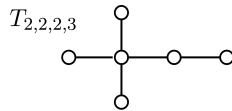
Доведення. В роботі [4] доведено, що

$$\sum_{K_{1,n}} = \Lambda_n^{(0)} \cup \Lambda_n^{(1)} \cup \left[\frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2} \right] \cup (n - \Lambda_n^{(1)}) \cup (n - \Lambda_n^{(0)}).$$

Легко перевірити, що при $n \geq 4$ виконується нерівність $\frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2} \leq 2$, причому при $n > 4$ нерівність є строгою.

Звідси, враховуючи п. 3 леми 1, отримуємо $\sum_{\Gamma} \cap [0, 2) = \Lambda_n^{(0)} \cup \Lambda_n^{(1)} \cup \left[\frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, 2 \right)$. З використанням пп. 1 та 2 леми 1 досить довести, що \sum_{Γ} містить відрізок $\left[2, \frac{m}{2} \right]$. Доведемо це індукцією за кількістю вершин графа.

База індукції — критичні графи $K_{1,5}$ та $T_{2,2,2,3}$. Для першого випадку в роботі [4] побудовано набори з 5 ортопроекторів, сума яких дорівнює γI для кожного $\gamma \in [2, 3]$. Для $T_{2,2,2,3}$, що має вигляд



теж, як в роботі [5], для кожного $\gamma \in [2, 3]$ побудуємо 5 ортопроекторів у просторі l_2 так, що $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + 2Q_4 = \gamma I$, причому $P_4 \perp Q_4$.

Розглянемо спочатку суму двох ортопроекторів:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 & \sqrt{\tau_1(1-\tau_1)} \\ \sqrt{\tau_1(1-\tau_1)} & 1-\tau_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Їхньою сумою буде самоспряжений оператор зі спектром $\{x, 2-x\}$, де $x \in [0, 2]$ (якщо $\tau_1 = (x-1)^2$). Тому оператор $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix}$ є сумою двох ортопроекторів.

Покладемо тепер

$$P_3 = \begin{pmatrix} \tau_2 & \sqrt{\tau_2(1-\tau_2)} \\ \sqrt{\tau_2(1-\tau_2)} & 1-\tau_2 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Самоспряжений оператор $P_3 + P_4 + 2Q_4$ має спектр $\{y, 4 - y\}$, де $y \in [1, 3]$, при $\tau_2 = (y - 2)^2$. Таким чином, оператор $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 4 - y \end{pmatrix}$ є сумою ортопроекторів P_3, P_4 та Q_4 , причому P_4 та Q_4 ортогональні.

Побудуємо 5 послідовностей ортопроекторів $P_1^{(i)}, P_2^{(i)}, P_3^{(i)}, P_4^{(i)}$ та $Q_4^{(i)}$ з умовою $P_4^{(i)} \perp Q_4^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, так, щоб на кожному кроці отримувати

$$P_1^{(i)} + P_2^{(i)} = \begin{pmatrix} x_i & 0 \\ 0 & 2 - x_i \end{pmatrix},$$

$$P_3^{(i)} + P_4^{(i)} + 2Q_4^{(i)} = \begin{pmatrix} y_i & 0 \\ 0 & 4 - y_i \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad P_3^{(i)} + P_4^{(i)} + 2Q_4^{(i)} = \begin{pmatrix} y_i & 0 \\ 0 & 2 - y_i \end{pmatrix}.$$

Останню рівність отримаємо, поклавши $Q_4^{(i)} = 0$. При цьому вимагатимемо, щоб послідовності з невід'ємних дійсних чисел x_i, y_i задовольняли співвідношення

$$y_1 = \gamma, \quad y_{2i} = \begin{cases} 4 - y_{2i-1}, & 4 - \gamma \leq y_{2i-1} \leq 3, \\ 2 - y_{2i-1}, & \gamma - 2 \leq y_{2i-1} \leq 4 - \gamma, \end{cases} \quad y_{2i+1} = \gamma - x_{2i},$$

$$x_{2i-1} = \gamma - y_{2i}, \quad x_{2i} = 2 - x_{2i-1}. \quad (4)$$

При такій побудові очевидно, що $x_{i-1} + y_i = \gamma$ ($x_0 = 0$). Залишилось довести коректність такого задання, тобто показати, що такі послідовності можна побудувати з використанням конструкції, наведеної вище. Для цього достатньо довести, що $x_i \in [0, 2]$, а $y_i \in [\gamma - 2, \gamma] = [\gamma - 2, 4 - \gamma] \cup [4 - \gamma, \gamma]$, $i = 1, 2, \dots$.

Зауважимо, що $x_{2i} = 2 - x_{2i-1} \in [0, 2]$ еквівалентно $x_{2i-1} \in [0, 2]$, $i \geq 1$, а це включення виконується, з урахуванням (4), тоді і тільки тоді, коли $y_{2i} \in [\gamma - 2, \gamma]$.

Покажемо, що з того, що $y_{2i-1} \in [\gamma - 2, \gamma]$, випливає, що $y_{2i} \in [\gamma - 2, \gamma]$:

$$y_{2i-1} \in [\gamma - 2, \gamma] \Rightarrow \begin{cases} y_{2i-1} \in [\gamma - 2, 4 - \gamma), \\ y_{2i-1} \in [4 - \gamma, \gamma]. \end{cases}$$

Якщо $y_{2i-1} \in [\gamma - 2, 4 - \gamma)$, то $y_{2i} = 2 - y_{2i-1} \in (\gamma - 2, 4 - \gamma) \subset [\gamma - 2, \gamma]$. Якщо ж $y_{2i-1} \in [4 - \gamma, \gamma]$, то $y_{2i} = 4 - y_{2i-1} \in [1, \gamma] \subset [\gamma - 2, \gamma]$. Оскільки $y_1 = \gamma$, то за індукцією отримуємо, що $x_i \in [0, 2]$, а $y_i \in [\gamma - 2, \gamma]$, $i = 1, 2, \dots$.

Тепер визначимо ортопроектори P_k , $k = 1, 2, 3, 4$, та Q_4 у просторі l_2 за правилом

$$P_k = (0) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} P_k^{(i)}, \quad k = 1, 2,$$

$$P_k = \bigoplus_{i=1}^{\infty} P_k^{(i)}, \quad k = 3, 4, \quad Q_4 = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_4^{(i)}.$$

За побудовою зі співвідношень (4) маємо $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + 2Q_4 = \gamma I$, що і потрібно було показати.

Крок індукції. При збільшенні кількості вершин графа Γ можливі два ви-

падки:

1. Додається гілка одиничної довжини. Це означає, що в рівності (1) додається один ортопроектор.

2. Продовжується одна з гілок, а це означає, що один з операторів A_i замінюється оператором \hat{A}_i таким, що $\sigma(\hat{A}_i) \subset \{0, 1, 2, \dots, m_i, m_i + 1\}$.

В обох випадках k замінюється на $k + 1$.

Покажемо, що в припущенні індукції $(\sum_{\Gamma} \supset [2, \frac{k}{2}])$ для графа $\hat{\Gamma}$, отриманого з Γ одним із вказаних вище способів, $\sum_{\hat{\Gamma}} \supset [2, \frac{k+1}{2}]$.

У першому випадку, обираючи „новий” проектор рівним нулю, або одиничним оператором, отримуємо $\sum_{\hat{\Gamma}} \supset \sum_{\Gamma} + \{0, 1\} \supset [2, \frac{m}{2}] \cup [3, \frac{m}{2} + 1] \supset [2, \frac{m+1}{2}]$.

Розглянемо випадок, коли граф $\hat{\Gamma}$ отримано з Γ подовженням l -ї гілки.

Нехай $\gamma \in \sum_{\Gamma}$, тобто існують гільбертів простір H та n самоспряжених операторів A_i такі, що $\sigma(A_i) \subseteq \{0, 1, 2, \dots, k_i\}$ і $\sum_{i=1}^n A_i = \gamma I$. Поряд з A_l розглянемо самоспряжений оператор $B = A_l + I$ зі спектром $\sigma(B) = \{1, 2, \dots, k_l + 1\}$. Тоді

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n A_i + B = (\gamma + 1)I \Rightarrow \gamma + 1 \in \sum_{\hat{\Gamma}}.$$

Звідси, як і вище, маємо $\sum_{\hat{\Gamma}} \supset \sum_{\Gamma} + \{0, 1\} \supset [2, \frac{m+1}{2}]$, що і завершує доведення.

Автор висловлює щирю подяку професору Ю. С. Самойленку за постановку задачі та корисні поради щодо змісту статті.

1. *Crawley-Boevey W., Holland M. P.* Noncommutative deformations of Kleinian sigulaties // *Duke Math. J.* – 1998. – **92**, № 3. – P. 605 – 635.
2. *Kruglyak S. A., Roiter A. V.* Locally scalar graph representations in the category of Hilbert spaces // *Funct. Anal. and Appl.* – 2005. – **39**, № 2. – P. 91 – 105.
3. *Kruglyak S. A., Popovich S. V., Samoilenko Yu. S.* The spectral problem and *-representations of algebras associated with Dynkin graphs // *J. Algebra and Appl.* – 2005. – **4**, № 6. – P. 761 – 776.
4. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // *Функцион. анализ и его прил.* – 2002. – **36**, № 3. – С. 20 – 25.
5. *Mellit A. S., Rabanovich V. I., Samoilenko Yu. S.* When is a sum of partial reflections equal to scalar operator // *Funct. Anal. and Appl.* – 2004. – **38**, № 2. – P. 157 – 160.
6. *Kruglyak S. A., Popovich S. V., Samoilenko Yu. S.* The spectral problem and *-representations of algebras associated with Dynkin graphs. – Getteborg, 2007. – Preprint.
7. *Островський В. Л., Самойленко Ю. С.* Про спектральні теореми для сімей лінійно пов'язаних самоспряжених операторів із заданими спектрами, що асоційовані з розширеними графами Динкіна // *Укр. мат. журн.* – 2006. – **58**, № 11. – С. 1556 – 1570.
8. *Albeverio S., Ostrovsky V., Samoilenko Yu.* On functions on graphs and representations of a certain class of *-algebras // *J. Algebra.* – 2006. – **308**, № 2. – P. 567 – 582.
9. *Yusenko K. A.* On existence of *-representations of certain algebras related to extendend Dynkin graphs // *Meth. Funct. Anal. and Top.* – 2006. – **12**, № 2. – P. 197 – 204.

Одержано 24.09.07