УДК 517.938

М. Илолов, А. А. Эльназаров (АН Республики Таджикистан, Душанбе)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ В ДИНАМИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

We consider problems of controlability in oscillatory dynamical systems. The solution of local control problem for a class of systems of differential equations is found. An example of application of main results is presented.

Розглядаються питання керованості в динамічних коливальних системах. Знайдено розв'язок локальної задачі управління для одного класу систем диференціальних рівнянь. Наведено приклад застосування основних результатів.

Введение. Рассмотрим семейство систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \varepsilon), \tag{0.1}$$

зависящих от параметра ε. Допустим, что при значении $\varepsilon = 0$ автономная система

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) \tag{0.2}$$

имеет инвариантное тороидальное многообразие вида

$$x = f(\varphi), \tag{0.3}$$

где $f(\varphi) = (f_1(\varphi), \ldots, f_n(\varphi))$ — функция переменной $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным φ_i до порядка r включительно и периодическая по каждой из переменных φ_i, $i = \overline{1, m}$, с периодом 2π.

Проблеме сохранения инвариантного тороидального многообразия семейства систем дифференциальных уравнений (0.1) посвящено много работ.

В 50 – 60-х годах прошлого столетия в пионерских работах А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда и Ю. Мозера были указаны условия сохранения инвариантного тора для одного класса систем — гамильтоновых. Широкое развитие данных результатов привело к созданию знаменитой КАМ-теории [1 – 5].

В 70 – 90-х годах А. М. Самойленко, развивая идеи Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [6, 7], ввел „функцию Грина – Самойленко", которая обозначает ядро интегрального оператора, связанного с задачей об инвариантном торе динамической системы. С ее помощью стало возможным исследование условий сохранения, устойчивости, экспоненциальной дихотомии и гладкости инвариантных торов различных систем дифференциальных уравнений [8 – 12]. Основная суть указанных выше работ заключается в том, что при любых достаточно малых ε диофантовый тор сохраняется. В то же время при исследовании многих физических систем возникают ситуации, когда необходимо найти оценку малости параметра ε. Как отмечают И. Боллт и Дж. Меисс [13], „мера возмущения, при которой происходит разрушение тора, обычно чрезвычайно мала: намного меньше меры численного вычисления для специальных возмущений на специальных торах". Однако, следует отметить, что существуют оценки меры возмущения не только для гамильтоновых, но и для более общих симплектических преобразований, сохраняющих объем, в которых происходит разрушение инвариантных КАМ-торов [14, 15]. Например, в работе [16] с помощью метода ренормализации групп для системы дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона

$$H(p,x,t) = \frac{1}{2}p^2 + \varepsilon\big(\cos(x) + \cos(x-t)\big) \tag{0.4}$$

было выяснено, что при $\varepsilon \geq 0{,}02759$ инвариантные КАМ-торы не существуют. Физический смысл данного факта означает, что устойчивость системы нарушается и происходит диффузия в фазовом пространстве. Данное явление выражает хаотическое поведение динамической системы. Исследование и идентификация хаоса в различных областях науки, естествознания и техники являлись объектом анализа ученых, работающих на стыке двух или нескольких направлений науки [17, 18]. Начиная с 1990 г. внимание было смещено в сторону проблем управления хаосом. Основная задача теории управления состояла в том, чтобы выяснить каким образом можно уменьшить хаос или, наоборот, увеличить его в зависимости от цели задачи [19]. Сначала изучали возможность преодоления „эффекта бабочки", т. е. свойства чувствительности поведения системы в зависимости от начальных данных и параметров [19]. Для этого были предложены множество методов, в большинстве из которых управление происходит с помощью „нацеливания" отдельных траекторий. Например, идея одного метода, называемого методом Отт – Гребори – Йорке, заключается в том, что посредством соответствующего возмущения доступного параметра неустойчивую периодическую орбиту динамической системы заставляют следовать желаемому поведению, отличному от хаотического [20]. Однако в случае, когда необходимо одновременно управлять огромным числом траекторий, подобные методы неэффективны. Это происходит во многих физических экспериментах, таких как магнитное удержание плазмы или турбулентные потоки [21]. Один из таких экспериментов подробно описан в работе [22], где экспериментальная установка называется „трубой бегущей волны". Динамика в этой установке представляется гамильтонианом

$$H(p,x,t) = \frac{1}{2}p^2 + \varepsilon_1\cos(k_1x - \omega_1t + \varphi_1) + \varepsilon_2\cos(k_2x - \omega_2t + \varphi_2), \tag{0.5}$$

который описывает взаимодействие заряженной частицы единичной массы с моментом p и положением x с двумя электростатическими волнами. Здесь использованы обозначения $\varepsilon_i,\ k_i,\ \omega_i,\ \varphi_i,\ i = 1, 2,$ соответственно амплитуды, числа волны, частоты и фазы для двух волн. Если рассматривать время t как новую угловую переменную, то гамильтониан (0.5) с 1,5 степени свободы отображается в гамильтониан с 2 степенями свободы. Тогда при выполнении условий КАМ-теоремы для достаточно малых значений амплитуд инвариантный тор невозмущенной системы сохраняется. Однако при переходе некоторого порога значений амплитуд происходит хаотическая диффузия в динамике экспериментальной установки, которую исследовали в работе [22]. Для того чтобы управлять данным хаосом, к гамильтониану (0.5) необходимо добавить так называемый „управляющий член" u так, чтобы у модифицированного гамильтониана существовал инвариантный тор. Этот тор будет служить в качестве барьера для хаотических траекторий динамической системы, вследствие чего уменьшится диффузия в системе. Данный метод был назван локальным методом управления [23] и также применен в таких физических процессах, как ионизация микроволновых полей [24] или процесс синтеза в магнетических установках [22].

Рассмотрим задачу локального управления для общей системы дифференциальных уравнений. Для этого представим возмущенную систему (0.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) + \varepsilon X_1(x), \tag{0.6}$$

где функция $X_1(x)$ удовлетворяет некоторым определенным условиям, при которых инвариантное тороидальное многообразие (0.3) невозмущенной системы (0.2) при достаточно малых ε сохраняется.

Исходя из изложенного, будем рассматривать следующие предположения относительно системы (0.6):

I. Существует некоторое критическое значение параметра $\varepsilon = \varepsilon_c > 0$, при котором инвариантные торы возмущенной системы (0.6) разрушаются.

II. Данное критическое значение удовлетворяет неравенству $\varepsilon_c << 1$.

Задача состоит в нахождении некоторых необходимых условий на „управляющий вектор" $u(x, \varepsilon)$, так чтобы система

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) + \varepsilon X_1(x) + u(x, \varepsilon) \tag{0.7}$$

имела инвариантное тороидальное многообразие

$$x = f(\varphi, \varepsilon), \tag{0.8}$$

где $\varepsilon \in (\varepsilon_c, \varepsilon_c + \delta)$ и δ — достаточно малое положительное число.

В данной работе поставленная задача решена для одного класса систем дифференциальных уравнений, для которого можно ввести локальные координаты в окрестности инвариантного тороидального многообразия. При этом используется метод функции Грина задачи об инвариантном торе, впервые предложенный в работе [8]. В первом пункте приведены основные обозначения и факты, которые необходимы для дальнейшего изложения основных результатов. Здесь также сформулирована изложенная выше задача для более конкретных систем дифференциальных уравнений. Второй пункт содержит основные результаты статьи. В третьем пункте приведен пример применения основных результатов данной работы.

1. Предварительные замечания, обозначения и результаты. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) \tag{1.1}$$

в евклидовом пространстве E^n, где функция $X_0(x)$ удовлетворяет условиям существования и единственности решений системы дифференциальных уравнений.

Пусть данная система уравнений имеет инвариантное многообразие

$$M = \{(x, \varphi) : x = f(\varphi),\ \varphi \in T_m\}, \tag{1.2}$$

где функция $f(\varphi)$ принадлежит $C^r(T_m)$ — пространству 2π-периодических по φ_i функций гладкости r. Система уравнений (1.1), заданная на многообразии M, сводится к динамической системе на T_m вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(\varphi), \qquad a_0(\varphi) \in C^r(T_m). \tag{1.3}$$

В монографии [9] приведены условия, при которых окрестность инвариантного многообразия M можно представить в виде произведения $T_m \times K_\delta$, где K_δ является $(n-m)$-мерным кубом со стороной h и вместо евклидовых координат $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ введены координаты φ на T_m и h в K_δ.

К этим условиям относятся следующие:

1) функция $f(\varphi)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{rank}\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi} = m \qquad \forall\varphi\in T_m; \tag{1.4}$$

2) матрица $\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}$ дополняема до периодического базиса в E^n и матрица $B(\varphi)\in C^{r+1}(T_m)$ является дополняемой матрицей, так что

$$\det\left[\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}, B(\varphi)\right] \neq 0, \qquad \varphi\in T_m. \tag{1.5}$$

Уравнение, связывающее переменную x с переменными φ и h, задается равенством

$$x = f(\varphi) + B(\varphi)h. \tag{1.6}$$

При этом имеет место следующая лемма.

Лемма [10]. *Для каждого достаточно малого* $\delta > 0$ *можно указать такое* $\delta_1 = \delta_1(\delta) > 0$, $\delta_1(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *что любая из точек* x, *удовлетворяющих условию*

$$\rho(x, M) < \delta,$$

имеет локальные координаты φ *и* h *такие, что*

$$\|h\| < \delta_1, \qquad \varphi\in T_m.$$

В [10] утверждается, что из асимптотической устойчивости, устойчивости или неустойчивости инвариантного многообразия M следуют такие же свойства тора T_m.

В окрестности многообразия M система уравнений (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi, h),\\ \frac{dh}{dt} &= P(\varphi, h).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Возмущение системы (1.1) в окрестности M в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi, h, \varepsilon),\\ \frac{dh}{dt} &= P(\varphi, h, \varepsilon)h + z(\varphi, \varepsilon).\end{aligned} \tag{1.8}$$

В работах [9, 10] доказано, что для достаточно малых ε инвариантный тор системы (1.8) сохраняется, в частности имеет место следующая теорема.

Теорема [9]. *Пусть функции* a, P *и* z *имеют непрерывные по* φ, h *из области*

$$\|h\| \le d, \qquad \varphi\in T_m$$

частные производные по φ, h *до порядка* r *включительно. Предположим, что система*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(\varphi),$$
$$\frac{dh}{dt} = P_0(\varphi)h, \tag{1.9}$$

где $a_0(\varphi) = a(\varphi, 0, 0)$, $P_0(\varphi) = P(\varphi, 0, 0)$, *имеет грубую функцию Грина с показателем гладкости* r.

Тогда если $r \geq 1$, *то можно указать достаточно малое* ε_0 *такое, что для любого* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *система уравнений* (1.8) *имеет инвариантный тор*

$$h = h(\varphi, \varepsilon), \qquad \varphi \in T_m. \tag{1.10}$$

С учетом системы (1.1) систему (1.8) представим в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(\varphi) + \varepsilon a_1(\varphi, h),$$
$$\frac{dh}{dt} = [P_0(\varphi) + P(\varphi, h, \varepsilon)]h + z(\varphi, \varepsilon). \tag{1.11}$$

Допустим, что выполняются предположения I и II относительно системы (1.11), т. е. при некотором значении параметра ε система (1.11) не имеет инвариантного тора.

Прибавим к правой части системы (1.11) вектор-функцию $u = (u_1, u_2)$, называемую управляющим вектором. Тогда (1.11) примет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(\varphi) + \varepsilon a_1(\varphi, h) + u_1(\varphi, h, \varepsilon),$$
$$\frac{dh}{dt} = [P_0(\varphi) + P_1(\varphi, h, \varepsilon)]h + z(\varphi, \varepsilon) + u_2(\varphi, h, \varepsilon). \tag{1.12}$$

Перейдем к постановке задачи.

Локальная задача управления. Найти условия на управляющий вектор $u = (u_1, u_2)$, так чтобы система (1.12) имела инвариантный тор.

Введем вторую координату $u_2(\varphi, h, \varepsilon)$ в виде

$$u_2(\varphi, h, \varepsilon) = u_{21}(\varphi, h, \varepsilon)h + u_{22}(\varphi, \varepsilon).$$

Тривиальный случай

$$u_1(\varphi, h, \varepsilon) = -\varepsilon a_1(\varphi, h),$$
$$u_{21}(\varphi, h, \varepsilon) = -P_1(\varphi, h, \varepsilon),$$
$$u_{22}(\varphi, \varepsilon) = -z(\varphi, \varepsilon)$$

не представляет интереса.

В следующем пункте мы рассмотрим два случая, когда возможно построение тора системы (1.12) при некоторых ограничениях на управляющий вектор $u(\varphi, h, \varepsilon)$.

2. Построение инвариантного тора системы (1.12). ***2.1.*** Рассмотрим частный случай системы (1.12):

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(\varphi),$$
$$\frac{dh}{dt} = [P_0(\varphi) + P_1(\varphi, 0, \varepsilon) + u_{21}(\varphi, 0, \varepsilon)]h + z(\varphi, \varepsilon). \tag{2.1}$$

Пусть G является оператором, заданным на функциях $z \in C^r(T_m)$ следующим образом:

$$Gz = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\tau, \varphi) z(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau, \tag{2.2}$$

где $G_0(\tau, \varphi)$ — функция Грина задачи об инвариантном торе. Допустим, что система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(\varphi),$$
$$\frac{dh}{dt} = [P_0(\varphi) + P_1(\varphi, 0, \varepsilon))]h + z(\varphi, \varepsilon) \tag{2.3}$$

удовлетворяет предположениям I и II. Предположим, что $\varepsilon \in (\varepsilon_c, \varepsilon_c + \delta)$ и δ является достаточно малым положительным числом.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть система уравнений* (2.1) *удовлетворяет условиям*:

1) *система уравнений в вариациях* (1.9) *имеет грубую функцию Грина* $G_0(\tau, \varphi)$;

2) $u_{21}(\varphi, 0, \varepsilon) \in C^r(T_m)$;

3) *функция* $u_{21} = u_{21}(\varphi, 0, \varepsilon)$ *удовлетворяет условию*

$$\| G[P_1 + u_{21}] \| \le q < 1. \tag{2.4}$$

Тогда система (2.1) *имеет инвариантный тор, удовлетворяющий неравенству*

$$|h|_r \le K|z|_r, \tag{2.5}$$

где постоянная K *не зависит от* z.

Доказательство теоремы 2.1 следует из явного представления инвариантного тора системы (2.1), являющегося решением операторного уравнения

$$h = G[P_1 + u_{21}]h + z. \tag{2.6}$$

2.2. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(\varphi),$$
$$\frac{dh}{dt} = [P_0(\varphi) + P_1(\varphi, h, \varepsilon) + u_{21}(\varphi, 0, \varepsilon)]h + z(\varphi, \varepsilon) + u_{22}(\varphi, \varepsilon). \tag{2.7}$$

Пусть соответствующая (2.7) система без управляющего вектора

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(\varphi),$$

$$\frac{dh}{dt} = [P_0(\varphi) + P_1(\varphi, h, \varepsilon))]h + z(\varphi, \varepsilon) \tag{2.8}$$

удовлетворяет предположениям I и II.

Выберем функцию $u_{22}(\varphi, \varepsilon)$ следующим образом:

$$u_{22}(\varphi, \varepsilon) = \begin{cases} -z(\varphi, \varepsilon) & \text{при} \quad \varepsilon = \varepsilon_c, \\ 0 & \text{при} \quad \varepsilon > \varepsilon_c, \end{cases} \tag{2.9}$$

где ε_c — значение параметра ε, при котором система (2.8) не имеет инвариантного тора. Тогда при $\varepsilon = \varepsilon_c$ система уравнений (2.7) имеет тривиальный инвариантный тор

$$h_0 = h_0(\varphi) \equiv 0 \qquad \forall \varphi \in T_m. \tag{2.10}$$

Выберем функцию $u_{21} = u_{21}(\varphi, 0, \varepsilon)$ таким образом, чтобы выполнялись условия теоремы 2.1. Введем обозначение $P_{10}(\varphi, \varepsilon) = P_1(\varphi, 0, \varepsilon)$. Тогда система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(\varphi),$$
$$\frac{dh}{dt} = [P_0(\varphi) + P_{10}(\varphi, \varepsilon) + u_{21}(\varphi, 0, \varepsilon)]h + z(\varphi, \varepsilon) + u_{22}(\varphi, \varepsilon) \tag{2.11}$$

имеет тривиальный инвариантный тор, который можно представить в виде

$$h_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (G[P_{10} + u_{21}])^k G[z + u_{22}]. \tag{2.12}$$

При выполнении условий теоремы 2.1 система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(\varphi),$$
$$\frac{dh}{dt} = [P_0(\varphi) + P_{11}(\varphi, \varepsilon) + u_{21}(\varphi, \varepsilon)]h + z(\varphi, \varepsilon) + u_{22}(\varphi, \varepsilon), \tag{2.13}$$

где $P_{11}(\varphi, \varepsilon) = P_1(\varphi, h_1, \varepsilon)$, также имеет инвариантный тор. Продолжая данный процесс, получаем последовательность инвариантных торов, которая сходится к непрерывной функции $h = h(\varphi, \varepsilon)$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть для системы уравнений* (2.7) *выполняются следующие условия*:

1) *система уравнений в вариациях* (1.11) *имеет грубую функцию Грина* $G_0(\tau, \varphi)$;

2) *функция* $u_{22} \in C^r(T_m)$ *удовлетворяет соотношению* (2.9);

3) $u_{21} = u_{21}(\varphi, \varepsilon) \in C^r(T_m)$;

4) *функция* $u_{21} = u_{21}(\varphi, \varepsilon)$ *удовлетворяет условию*

$$\| G[P_1 + u_{21}] \| \leq q < 1 \tag{2.14}$$

с функцией $P_1 = P_1(\varphi, g(\varphi), \varepsilon)$ *при произвольном выборе функции* $g(\varphi) \in \in C^r(T_m)$.

Тогда система (2.7) *имеет инвариантный тор*

$$h = h(\varphi, \varepsilon), \qquad \varphi \in T_m, \tag{2.15}$$

при $\varepsilon \in (\varepsilon_c, \varepsilon_c + \delta)$.

3. Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \sin\varphi, \\ \frac{dh}{dt} &= \left[-1 + \varepsilon \sin^2\varphi\right]h + \sin\varphi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Функция Грина системы (3.1) при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} e^{-\tau}, & \text{если} \quad \tau > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \tau \le 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

При некотором значении параметра ε, меньшем единицы, прибавим ко второму уравнению системы (3.1) управляющий член, функцию $u_0(\varphi) = \varepsilon\cos^2\varphi h$, так, что система примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \sin\varphi, \\ \frac{dh}{dt} &= [-1 + \varepsilon]h + \sin\varphi. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Для системы (3.3) выполняются условия теоремы 2.1, поэтому инвариантный тор системы (3.3) с управлением $u_0(\varphi)$ можно представить в виде

$$h = h(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau} \sin\varphi_\tau(\varphi) d\tau, \tag{3.4}$$

где

$$\sin\varphi_\tau(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{2e^{\tau}\operatorname{tg}(\varphi/2)}{e^{2\tau} + \operatorname{tg}^2(\varphi/2)} & \text{при} \quad \varphi \ne k\pi, \\ 0 & \text{при} \quad \varphi = k\pi, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots. \end{cases}$$

После элементарных преобразований получим следующее представление инвариантного тора (3.4):

$$h = h(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\operatorname{tg}(\varphi/2)\ln\sin^2(\varphi/2) & \text{при} \quad \varphi \ne k\pi, \\ 0 & \text{при} \quad \varphi = k\pi. \end{cases}$$

1. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. – 1954. – **98**, № 4. – С. 527 – 530.
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 5. – С. 13 – 40.
3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике // Там же. – № 6. – С. 91 – 192.
4. *Мозер Ю.* О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды // Там же. – 1969. – **24**, № 2. – С. 165 – 211.

5. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. – М.: Мир, 1973. – 164 с.
6. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 246 с.
8. *Самойленко А. М.* Функция Грина линейного расширения динамической системы на торе, условия ее единственности и свойства, вытекающие из этих условий // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 6. – С. 791 – 797.
9. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
10. *Самойленко А. М.* Исследование динамической системы в окрестности квазипериодической траектории. – Киев, 1990. – 43 с. – Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.35).
11. *Самойленко А. М., Илолов М.* Инвариантные торы дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1998. – **44**, № 1. – С. 93 – 100.
12. *Илолов М., Эльназаров А.* Инвариантные торы дифференциальных уравнений с запаздыванием в банаховом пространстве // Докл. АН Республики Таджикистан. – 2006. – **49**, № 2. – С. 101 – 105.
13. *Bollt E., Meiss J.* Break-up of invariant tori for the four-dimensional semi-standard map // Physica D. – 1993. – P. 282 – 297.
14. *Berretti A., Marmi S.* Standard map as complex rotation numbers: creation of natural boundaries // Phys. Rev. Lett. – 1992. – **68**. – P. 1443 – 1446.
15. *MacKay R. S., Meiss J. D., Stark J.* Converse KAM theory for symplectic twist maps // Nonlinearity. – 1989. – **2**. – P. 555 – 570.
16. *Chandre C., Jausin H. R.* Renormalization-group analysis for the transition to chaos in Hamiltonian systems // Phys. Rept. – 2002. – **365**, Issue 1.
17. *Stephen E.* Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. – Second edition. – New York: Springer, 2003. – 808 p.
18. *Ott E., Grebogi C., Yorke J. A.* Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. – 1990. – **64**.
19. *Shinbrot T., Grebogi C., Ott E., Yorke J. A.* Using small perturbations to control chaos // Nature. – 1993. – **363**.
20. *Gauthier D. J.* Controlling chaos // Amer. J. Phys. – 2003. – **71**.
21. *Chandre C., Ciraolo G., Doveil F. et all.* Chanelling chaos by building barriers // Phys. Rev. Lett. – 2005. – **94**.
22. *Macor A., Doveil F., Chandre C. et all.* Chanelling chaotic transport in a wave-particle experiment // Arch. in http://arxive.org/physics/0608119 (2006).
23. *Doveil F., Auhmani Kh., Macor A., Guyomarc'h D.* Experimental observation of resonance overlap responsible for Hamiltonian chaos // Phys. Plasmas. – 2005. – **12**.
24. *Huang S., Chandre C., User T.* Reducing multiphoton ionization in a linearity polarized microwave field by local control // Phys. Rev. A. – 2006. – **74**.
25. *Chandre C., Vittot M., Ciraolo G. et all.* Control of stochasticity in magnetic field lines // Nucl. Fusion. – 2006. – **46**. – P. 33 – 45.

Получено 15.10.07