УДК 517.9

Н. З. Дільна, А. М. Ронто (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАГАЛЬНІ УМОВИ ОДНОЗНАЧНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ*

We establish general conditions sufficient for the unique solvability of the Cauchy problem for systems of nonlinear functional-differential equations.

Установлены общие условия однозначной разрешимости задачи Коши для систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачі. Будемо розглядати початкову задачу

$$u_k'(t) = (f_k u)(t), \qquad t \in [a,b], \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

$$u_k(a) = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

де $-\infty < a < b + \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $f_k\colon \mathcal{D}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big) \to \mathcal{D}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — неперервні оператори (взагалі кажучи, нелінійні), а $\{c_k \,|\, k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$.

Метою роботи є встановлення загальних умов однозначної розв'язності задачі (1), (2) за припущення, що нелінійності в системі рівнянь (1) можна оцінити за допомогою певних лінійних операторів, які породжують однозначно розв'язні початкові задачі із позитивними операторами Гріна. Відшукання таких операторів, взагалі кажучи, не є простою задачею, але за їх наявності, як показано нижче, для дослідження розв'язності нелінійної задачі (1), (2) можна використовувати результати лінійної теорії.

2. Основні означення. Поняття розв'язку початкової задачі (1), (2) розуміємо у сенсі наступного стандартного означення (див., наприклад, [1]).

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1), (2) *називаємо абсолютно неперервну вектор-функцію* $u = (u_k)_{k=1}^n\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$, *для якої майже скрізь на* $[a,b]$ *справджується рівність* (1) *і яка в точці* a *має властивість* (2).

Далі знадобиться природне поняття позитивності лінійного оператора, визначеного на просторі вектор-функцій з абсолютно неперервними компонентами.

Означення 2. *Лінійний оператор* $l = (l_k)_{k=1}^n\colon\ \mathcal{D}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big) \to L_1\big([a,b],\ \mathbb{R}^n\big)$ *називаємо позитивним, якщо*

$$\operatorname*{vrai\,min}_{t \in [a,b]} (l_k u)(t) \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

при довільному $u = (u_k)_{k=1}^n$ *з* $\mathcal{D}^+\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$.

Розглянемо лінійну напіводнорідну задачу вигляду

$$u_k'(t) = (l_k u)(t) + q_k(t), \quad t \in [\,a, b\,], \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$u_k(a) = 0, \tag{4}$$

де $l_k\colon \mathcal{D}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big) \to L_1\big([a,b], \mathbb{R}\big)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — лінійні оператори, $\{\, q_k \,|\, k = 1, 2, \ldots, n\} \subset L_1\big([a,b], \mathbb{R}\big)$.

* Виконано за часткової підтримки AS CR, Institutional Research Plan No. AV0Z10190503, GA CR (Grant No. 201/06/0254), Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант № 0107U003322) та National Scholarship Programme of the Slovak Republic.

Означення 3. *Будемо говорити, що лінійний оператор* $l = (l_k)_{k=1}^n : \mathcal{D}([a,b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a,b], \mathbb{R}^n)$ *належить множині* $S_a([a,b], \mathbb{R}^n)$, *якщо напіводнорідна задача* (3), (4) *має лише єдиний розв'язок* $u = (u_k)_{k=1}^n$ *для кожного* $\{ q_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset L_1([a,b], \mathbb{R})$, *і, більше того, розв'язок задачі* (3), (4) *має властивість*

$$\min_{t \in [a,b]} u_k(t) \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

якщо функції q_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *невід'ємні майже скрізь на* $[a,b]$.

3. Позначення. У роботі будемо використовувати наступні позначення:

1) $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$;

2) $\|x\| := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ для $x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$;

3) $\mathcal{D}([a,b], \mathbb{R}^n)$ — банахів простір абсолютно неперервних функцій $[a,b] \to \to \mathbb{R}^n$ з нормою

$$\mathcal{D}([a,b], \mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \|u\| + \int_a^b \|u'(s)\| ds;$$

4) множину $\mathcal{D}^+([a,b], \mathbb{R}^n)$ задано формулою

$$\mathcal{D}^+([a,b], \mathbb{R}^n) := \Big\{ u = (u_k)_{k=1}^n \in \mathcal{D}([a,b], \mathbb{R}^n) \Big| \min_{\xi \in [a,b]} u_k(\xi) \geq 0$$

$$\text{для всіх} \quad k = 1, 2, \ldots, n \Big\};$$

5) множину $\mathcal{D}^{++}([a,b], \mathbb{R}^n)$ визначено за формулою

$$\mathcal{D}^{++}([a,b], \mathbb{R}^n) := \Big\{ u = (u_k)_{k=1}^n \in \mathcal{D}([a,b], \mathbb{R}^n) \Big| \min_{\xi \in [a,b]} u_k(\xi) \geq 0$$

$$\text{і} \ \operatorname{vrai\,min}_{\xi \in [a,b]} u_k'(\xi) \geq 0 \quad \text{для всіх} \quad k = 1, 2, \ldots, n \Big\};$$

6) $\mathcal{D}_0([a,b], \mathbb{R}^n)$ (відповідно, $\mathcal{D}_0^+([a,b], \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}_0^{++}([a,b], \mathcal{R}^n)$) — множина всіх $u = (u_k)_{k=1}^n$ з $\mathcal{D}([a,b], \mathbb{R}^n)$ (відповідно, $\mathcal{D}^+([a,b], \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}^{++}([a,b], \mathbb{R}^n)$), для яких $u_k(a) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

7) $L_1([a,b], \mathbb{R}^n)$ — банахів простір усіх інтегровних за Лебегом вектор-функцій $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ зі стандартною нормою

$$L_1([a,b], \mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \int_a^b \|u(s)\| ds.$$

4. Загальна умова розв'язності початкової задачі. Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай існують лінійні оператори* $p_i = (p_{ik})_{k=1}^n : \mathcal{D}([a,b], \mathbb{R}^n) \to \to L_1([a,b], \mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$, *для яких при довільних абсолютно неперервних функціях* $u = (u_k)_{k=1}^n : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $v = (v_k)_{k=1}^n : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *із властивостями*

$$u_k(a) = v_k(a), \quad u_k(t) \geq v_k(t) \quad \text{для} \quad t \in [a,b], \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

справджуються оцінки

$$p_{2k}(u-v)(t) \;\le\; (f_k u)(t) - (f_k v)(t) \;\le\; p_{1k}(u-v)(t),$$
$$t \in [\,a, b\,], \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

Нехай, крім цього, для операторів p_1 *та* p_2 *мають місце включення*

$$p_1 \in S_a\big([a,b], \mathbb{R}^n\big), \qquad \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \in S_a\big([a,b], \mathbb{R}^n\big). \tag{7}$$

Тоді задача Коші (1), (2) *є однозначно розв'язною при довільних дійсних* c_k, $k = 1, 2, \dots, n$.

Питання про належність лінійного оператора $p: \mathcal{D}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big) \to L_1([\,a, b\,],$ $\mathbb{R}^n)$ множині $S_a\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$ тісно пов'язане з виконанням для породженої ним початкової задачі твердження про інтегрування диференціальної нерівності. Ряд умов, що гарантують виконання включення

$$p \in S_a\big([\,a, b\,], \mathbb{R}^n\big) \tag{8}$$

для деяких класів лінійних операторів p, що допускають неперервне розширення на простір усіх неперервних функцій, отримано в [2 – 8].

5. Допоміжні твердження. При доведенні теореми 1 нам знадобиться результат роботи [9] щодо однозначної розв'язності абстрактного рівняння в напівупорядкованому банаховому просторі (див. також [10]).

Розглянемо абстрактне операторне рівняння

$$Fx \;=\; z, \tag{9}$$

в якому $F: E \to E$ — нелінійний оператор, що діє у нормованому банаховому просторі $\langle E, \|\cdot\|_E \rangle$ над полем $\mathbb{R}$, $K_i \subset E$, $i = 1, 2,$ — замкнені конуси, а z — довільний елемент із E.

Конуси K_i, $i = 1, 2$, породжують природні часткові впорядкування простору E. Будемо писати, що $x \leqq_{K_i} y$ і $y \geqq_{K_i} x$, тоді і тільки тоді, коли $\{x, y\} \subset E$ і $y - x \in K_i$, $i = 1, 2$.

Зауваження. Монотонної залежності розв'язку рівняння (9) від z, попри зауваження за теоремою 7 із [9] та за доведенням теореми 49.4 із [10] за умов сформульованої теореми 2, у загальному випадку немає. В цьому можна переконатись, зауваживши, що у випадку лінійного оператора $f = (f_k)_{k=1}^n$ умови теореми, взагалі кажучи, монотонної залежності не гарантують.

Теорема 2 (теорема 49.4 із [10]). *Нехай конус* K_2 *є нормальним та відтворюючим. Крім цього, нехай виконується умова*

$$B_1(x-y) \leqq_{K_2} Fx - Fy \leqq_{K_2} B_2(x-y), \quad (x, y) \in E^2, \quad x \geqq_{K_1} y, \tag{10}$$

де $B_i: E \to E$, $i = 1, 2$, — *такі лінійні оператори, що існують* B_1^{-1} *та* $(B_1 +$ $+ B_2)^{-1}$, *причому справджуються включення*

$$B_1^{-1}(K_2) \subset K_1, \qquad (B_1 + B_2)^{-1}(K_2) \subset K_1. \tag{11}$$

Тоді рівняння (9) *має єдиний розв'язок* $x \in E$ *при довільному* $z \in E$.

Наступна лема встановлює зв'язок між властивістю, описаною в означенні 3, та позитивною оборотністю певного лінійного оператора.

Лема 1. *Якщо* $p = (p_k)_{k=1}^n: \mathcal{D}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big) \to L_1\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$ — *лінійний оператор з властивістю* (8), *то лінійний оператор* $V_p: \mathcal{D}_0\big([a,b], \mathcal{R}^n\big)\big) \to$

$\to \mathcal{D}_0([a,b]\,,\,\mathbb{R}^n)$, *заданий формулою*

$$\mathcal{D}_0\big([a,b],\mathbb{R}^n\big) \ni u \;\mapsto\; V_p u := u - \int_a^{\cdot} (pu)(t)\,dt,$$

буде оборотним і для оберненого оператора V_p^{-1} *виконується включення*

$$V_p^{-1}\Big(\mathcal{D}_0^{++}\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)\Big) \subset \mathcal{D}_0^{+}\big([a,b],\mathbb{R}^n\big).$$

Твердження леми 1 випливає із властивостей множини $S_a\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$.

Лема 2. *Для довільних лінійних операторів* $p_i : \mathcal{D}\big([a,b],\mathbb{R}^n\big) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n\big)$, $i = 1, 2$, *справджується рівність*

$$V_{p_1} + V_{p_2} = 2V_{\frac{1}{2}(p_1+p_2)}. \tag{12}$$

Справедливість формули (12) перевіряється безпосередньо.

6. Доведення теореми 1. Очевидно, що задача (1), (2) рівносильна системі рівнянь

$$u_k(t) = c_k + \int_a^t (f_k u)(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Нехай $c = (c_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ — довільний фіксований вектор. Для кожної вектор-функції $v = (v_k)_{k=1}^n \in \mathcal{D}_0\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$ покладемо

$$(F_k v)(t) := v_k(t) - \int_a^t \big(f_k(v+c)\big)(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Очевидно, що відповідне до відображень (13) відображення $F = (F_k)_{k=1}^n$ є оператором у банаховому просторі E, де, за означенням,

$$E = \mathcal{D}_0\big([a,b],\mathbb{R}^n\big). \tag{14}$$

Легко бачити, що функція u з $\mathcal{D}\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$ є розв'язком задачі (1), (2) тоді і тільки тоді, коли функція $v = u - c$ задовольняє рівняння

$$Fv = 0. \tag{15}$$

Отже, достатньо показати, що рівняння (15) має єдиний розв'язок v у просторі (14).

Співвідношення (6) рівносильне співвідношенню

$$-p_{1k}(u-v)(t) \le -\big(f_k(u+c)\big)(t) + \big(f_k(v+c)\big)(t) \le -p_{2k}(u-v)(t),$$

$$t \in [a,b], \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

для кожної пари функцій $\{u, v\} \subset \mathcal{D}_0\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$ із властивістю (5). Тому для всіх таких пар u та v при майже всіх $t \in [a,b]$ виконується нерівність

$$u_k'(t) - v_k'(t) - p_{1k}(u-v)(t) \le u_k'(t) - v_k'(t) -$$

$$- \big[\big(f_k(u+c)\big)(t) - \big(f_k(v+c)\big)(t)\big] \le u_k'(t) - v_k'(t) - p_{2k}(u-v)(t). \tag{16}$$

Інтегруючи члени нерівностей (16), отримуємо нерівності

$$u_k(t) - v_k(t) - \int_a^t \big(p_{1k}(u-v)\big)(s)\,ds \;\le\; u_k(t) - v_k(t) - \int_a^t (f_k(u+c))(s)\,ds \;+$$

$$+\int_a^t (f_k(v+c))(s)\,ds \;\le\; u_k(t) - v_k(t) - \int_a^t \big(p_{2k}(u-v)\big)(s)\,ds,$$

$$t \in [a,b], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Беручи до уваги позначення (13), звідси одержуємо, що для всіх функцій $u = (u_k)_{k=1}^n$, $v = (v_k)_{k=1}^n$ з $\mathcal{D}_0\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$, які мають властивість (5), справджуються оцінки

$$u_k(t) - v_k(t) - \int_a^t \big(p_{1k}(u-v)\big)(s)\,ds \;\le\; (F_k u)(t) - (F_k v)(t) \;\le$$

$$\le\; u_k(t) - v_k(t) - \int_a^t \big(p_{2k}(u-v)\big)(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Для довільного x з $\mathcal{D}_0\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$ покладемо

$$(B_1 x)(t) \;=\; x(t) - \int_a^t (p_1 x)(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \tag{17}$$

$$(B_2 x)(t) \;=\; x(t) - \int_a^t (p_2 x)(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \tag{18}$$

та означимо множини K_1 і K_2 наступними рівностями (див. позначення 4 – 6 із п. 3):

$$K_1 \;=\; \mathcal{D}_0^{+}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big), \qquad K_2 \;=\; \mathcal{D}_0^{++}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big). \tag{19}$$

Належність лінійного оператора p_1 множині $S_a\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$ у термінах леми 1 означає, що відповідний оператор V_{p_1} є оборотним і, крім того, справджується включення

$$V_{p_1}^{-1}(K_2) \subset K_1. \tag{20}$$

Далі в умові (7) припускається, що оператор $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ належить множині $S_a\big([a,b],\ \mathbb{R}^n\big)$. З огляду на леми 1 та 2 це означає, що існує оператор $\frac{1}{2} V^{-1}_{\frac{1}{2}(p_1+p_2)}$, який є позитивним оберненим до оператора $V_{p_1} + V_{p_2}$. Отже, справджується включення

$$\Big(V_{p_1} + V_{p_2}\Big)^{-1}(K_2) \subset K_1. \tag{21}$$

Таким чином, ми встановили, що для відображення (13) виконується умова (10) при E, K_1 і K_2, заданих формулами (14), (19), і операторах B_1, B_2, визначених рівностями (17), (18). При цьому, з огляду на співвідношення (20) і (21) та рівності $B_i = V_{p_i}$, $i = 1, 2,$ оператори (17), (18) мають властивості (11).

Множини (19) є конусами в банаховому просторі $\mathcal{D}_0([a,b],\mathbb{R}^n)$, при цьому конус $\mathcal{D}_0^{++}([a,b],\mathbb{R}^n)$, як неважко переконатися, є відтворюючим і нормальним. Застосовуючи теорему 2, встановлюємо однозначну розв'язність нелінійної початкової задачі (1), (2) і цим, з огляду на довільність дійсного вектора $c = (c_k)_{k=1}^n$ в формулі (13), завершуємо доведення теореми 1.

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. *Bravyi E., Hakl R., Lomtatidze A.* Optimal conditions for unique solvability of the Cauchy problem for first order linear functional differential equations // Czech. Math. J. – 2002. – **52**, № 3. – P. 513 – 530.
3. *Halk R., Lomtatidze A., Půža B.* New optimal conditions for unique solvability of the Cauchy problem for first order linear functional differential equations // Math. Bohem. – 2002. – **127**, № 4. – P. 509 – 524.
4. *Ronto A. N.* Exact solvability conditions of the Cauchy problem for system of linear first-order functional differential equations determined by $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-positive operators // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 11. – P. 1853 – 1884.
5. *Дильная Н. З., Ронто А. Н.* Некоторые новые условия разрешимости задачи Коши для систем линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 7. – С. 867 – 884.
6. *Rontó A.* On the initial value problem for systems of linear differential equations with argument deviations // Miskolc Math. Notes. – 2005. – **6**, № 1. – P. 105 – 127.
7. *Hakl R., Lomtatidze A., Půža B.* On nonnegative solutions of first order scalar functional differential equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. – 2001. – **23**. – P. 51 – 84.
8. *Самойленко А. М., Дільна Н. З., Ронто А. М.* Розв'язність задачі Коші для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 3. – С. 388 – 403.
9. *Положительно* обратимые линейные операторы и разрешимость нелинейных уравнений / М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, Ю. В. Покорный, В. Я. Стеценко // Докл. АН ТаджССР. – 1974. – **17**, № 1. – С. 12 – 14.
10. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

Одержано 05.10.07