УДК 517.9

Л. А. Власенко (Харьков. нац. ун-т)

НЕСВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Existence and uniqueness theorems for the impulsive differential operator equation $\frac{d^2}{dt^2}[\,Au(t)\,] + Bu(t) = f(t, u(t))$ are obtained. The operator A is allowed to be noninvertible. The results are applied to differential algebraic equations and partial differential equations, which are not equations of Kovalevskaya type.

Одержано теореми існування та єдиності для диференціально-операторного рівняння $\frac{d^2}{dt^2}[\,Au(t)\,] + Bu(t) = f(t, u(t))$ з імпульсним впливом. Оператор A може бути необоротним. Результати застосовано до диференціально-алгебраїчних рівнянь та диференціальних рівнянь з частинними похідними не типу Ковалевської.

1. Введение. Ряд задач физики и техники приводит к изучению уравнения осциллятора $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ с импульсными воздействиями. Такие уравнения исследованы в [1, 2]. Если колебания не свободные, то в правой части содержится некоторая функция, вообще говоря, нелинейно зависящая от u. Математические модели резонансных электрических цепей [3] вызывают интерес к более широким классам дифференциальных уравнений, а именно, уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. Процессы в системах с распределенными параметрами, мгновенно меняющие свое состояние в определенные моменты времени, описываются импульсными уравнениями с частными производными. В общем случае эти уравнения являются не разрешенными относительно старшей производной по времени, т. е. уравнениями не типа Ковалевской или типа Соболева [4]. В абстрактной форме уравнения не типа Ковалевской записываются в виде неявного дифференциально-операторного уравнения, у которого производные по пространственным переменным заменяются дифференциальными операторами.

В данной работе будем рассматривать полулинейное дифференциально-операторное уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}[Au(t)] + Bu(t) = f(t, u(t)) \quad \text{для почти всех} \quad t_0 \le t \le t_0 + \tau_0 \tag{1}$$

с импульсными воздействиями

$$\begin{gathered} \Delta_k[\,Au(t)\,] = \Im_k^0\big((Au)(t_k - 0), (Au)'(t_k - 0)\big), \\ \Delta_k\big[\,(Au)'(t)\,\big] = \Im_k^1\big((Au)(t_k - 0), (Au)'(t_k - 0)\big), \quad k = 1, \ldots, m, \end{gathered} \tag{2}$$

и начальными условиями

$$(Au)(t_0) = y_0, \quad (Au)'(t_0) = y_1. \tag{3}$$

Здесь

$$\Delta_k[\,v(t)\,] = v(t_k + 0) - v(t_k - 0); \tag{4}$$

замкнутые линейные операторы A, B действуют из комплексного банахова пространства X в комплексное банахово пространство Y и имеют области определения D_A, D_B соответственно; $f(t, v)$ — функция из $[t_0, t_0 + \tau_0] \times X$ в Y; $\Im_k^j(v, \omega)$ — функции из $\Omega_k^1 \times \Omega_k^2$ в Y ($\overline{AD_A \bigcap D_B} \subset \Omega_k^1, \Omega_k^2 \subset Y$); моменты времени t_k занумерованы так: $t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = t_0 + \tau_0$. Уравнение (1) не является полным, так как не содержит члена с первой производной. Вообще говоря, уравнение (1) нельзя разрешить относительно производной в силу вырожденности оператора A (наличия нетривиального ядра). К исследованию вырожденных уравнений непосредственно неприменима теория косинус-оператор-функций, как это делается для явных уравнений с единичным оператором $A = E$ [5]. Неявные, а также вырожденные уравнения (1) возникают, например, в эволюционной электродинамике [6]. В импульсных воздействиях (2) и начальных условиях (3) содержится оператор A в отличие от соответствующих условий для импульсных вырожденных уравнений из [7] (подразделы 6.1, 6.2). Смысл условий (2), (3) мы поясним позже. Здесь только заметим, что для явного уравнения с единичным оператором $A = E$ эти условия согласованы с общими положениями теории систем с толчками [8].

Будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{L}(Y, X)$ — пространство ограниченных линейных операторов из Y в X, $\mathcal{L}(Y, Y) = \mathcal{L}(Y)$; $L_1(t_0, t_0 + \tau_0; Y)$ — пространство Y-значных функций, интегрируемых на $[t_0, t_0 + \tau_0]$; $W_1^m(t_0, t_0 + \tau_0; Y)$ — пространство Соболева функций из $L_1(t_0, t_0 + \tau_0; Y)$, у которых обобщенные производные до порядка m включительно принадлежат $L_1(t_0, t_0 + \tau_0; Y)$; $C^p(I, X)$, $p = 0, 1, \ldots,$ — класс X-значных функций, p раз непрерывно дифференцируемых на $I \subset \mathbb{R}$, $C(I, X) = C^0(I, X)$.

2. Разложения пространств. С уравнением (1) связан пучок операторов $\lambda A + B$, который определен на $D = D_A \bigcap D_B \neq \{0\}$. В дальнейшем будем предполагать, что в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки ($|\lambda| > C_2$) пучок операторов $\lambda A + B$ имеет резольвенту $(\lambda A + B)^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ и при некотором целом $r \geq 0$ выполнена оценка

$$\left\| (\lambda A + B)^{-1} \right\| \leq C_1 |\lambda|^r, \quad |\lambda| > C_2. \tag{5}$$

В случае оценки (5) в леммах 2.1, 2.2 из [7] уточняется возможность применения метода спектральных проекторов типа Рисса [9]. Справедливы прямые разложения линеала $D = D_1 \dot{+} D_2$ и пространства $Y = Y_1 \dot{+} Y_2$ такие, что D_2 есть линеал собственных и присоединенных векторов пучка $\mu B + A$ в точке $\mu = 0$, $Y_2 = BD_2$, $Y_1 = AD_1$, $\operatorname{Ker} A \bigcap D_1 = \{0\}$, $\operatorname{Ker} B \bigcap D_2 = \{0\}$, операторы A, B отображают D_j в Y_j, $j = 1, 2$. Пусть P_1, P_2 и Q_1, Q_2 — пары взаимно дополнительных проекторов на D_1, D_2 и Y_1, Y_2 соответственно. Замкнутый линейный оператор

$$G = AP_1 + BP_2 = Q_1 A + Q_2 B : D \to Y, \quad D_G = D,$$

отображает D_j в Y_j, имеет ограниченный обратный $G^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, характеризующийся следующими свойствами:

$$G^{-1}AP_1 = P_1, \quad G^{-1}BP_2 = P_2, \quad AG^{-1}Q_1 = Q_1, \quad BG^{-1}Q_2 = Q_2,$$
$$(F)^{r+1} = 0, \quad F = AG^{-1}Q_2. \tag{6}$$

3. Разрешимость абстрактного уравнения без импульсных воздействий. Будем предполагать, что $f(t, v)$, как функция от t, при каждом $v \in X$ принадлежит классу $L_1(t_0, t_0 + \tau_0; Y)$. *Решением начальной задачи* (1), (3) называется функция $u(t) \in L_1(t_0, t_0 + \tau_0; X)$ такая, что $Au(t) \in W_1^2(t_0, t_0 + \tau_0; Y)$, функция $u(t)$ почти всюду удовлетворяет уравнению (1) и выполнены начальные условия (3). Из определения решения $u(t)$ следует, что $u(t) \in D$ при почти всех $t \in [t_0, t_0 + \tau_0]$. Для решения из класса $L_1(t_0, t_0 + \tau_0; X)$, мы, вообще говоря, не можем рассматривать начальные условия вида

$$u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1. \tag{7}$$

Начальные условия (3) имеют смысл, поскольку функция $Au(t) \in W_1^2(t_0, t_0 + \tau_0; Y)$ является непрерывно дифференцируемой на $[t_0, t_0 + \tau_0]$, т. е. $Au(t) \in C^1([t_0, t_0 + \tau_0], Y)$, после возможного изменения на множестве меры нуль. Для явного уравнения с единичным оператором $A = E$, согласно приведенному выше определению решения, начальные условия принимают вид (7), что совпадает с известными постановками начальных задач в случае решений, принадлежащих пространству Соболева второго порядка [10] (гл. 3, раздел 8). Начальные условия на функцию $Au(t)$ для псевдопараболических дифференциальных уравнений, разрешимых относительно производной, также использовались в [11].

В пространстве Y рассмотрим вспомогательное уравнение

$$v''(t) = Wv(t) + \varphi(t) \quad \text{для почти всех} \quad t_0 \le t \le t_0 + \tau_0, \qquad W = -Q_1BG^{-1}, \tag{8}$$

с интегрируемой по Бохнеру на $[t_0, t_0 + \tau_0]$ вектор-функцией $\varphi(t)$. Пусть $C(t)$, $S(t)$ — косинус- и синус-оператор-функции (разрешающие операторы) уравнения (8), которые определяются следующими рядами, равномерно сходящимися по операторной норме на каждом компактном отрезке из $-\infty < t < \infty$ [5] (гл. 2):

$$C(t) = \operatorname{ch}\left(W^{1/2}t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{W^j t^{2j}}{(2j)!}, \qquad S(t) = W^{-1/2}\operatorname{sh}\left(W^{1/2}t\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{W^j t^{2j+1}}{(2j+1)!}. \tag{9}$$

Существуют положительные постоянные $C_0 > 0$, $\omega_0 > 0$ такие, что

$$\| C(t) \| \le C_0 e^{\omega_0 |t|}, \qquad \| S(t) \| \le C_0 e^{\omega_0 |t|}. \tag{10}$$

Приведем некоторые свойства оператор-функций $C(t)$, $S(t)$ [5]:

$$S(t) = \int_0^t C(s)\,ds, \quad C'(t) = WS(t), \quad S'(t) = C(t), \quad C(0) = E,$$
$$S(0) = 0, \quad C(t) = C(-t), \quad S(t) = -S(-t), \tag{11}$$
$$2C(s)S(t) = 2S(t)C(s) = S(t+s) + S(t-s),$$

$$2C(t)C(s) = C(t+s) + C(t-s), \qquad 2WS(t)S(s) = C(t+s) - C(t-s).$$

Любое решение $v(t)$ уравнения (8) допускает представление в виде

$$v(t) = C(t-t_0)v(t_0) + S(t-t_0)v'(t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t} S(t-s)\varphi(s)\,ds \quad \text{для почти всех} \quad t_0 \le t \le t_0 + \tau_0. \tag{12}$$

***Замечание* 1**. Из представления (12), выражений (9) для $C(t)$, $S(t)$ и определения оператора W в (8) видно, что если в начальный момент времени t_0 имеют место включения $v(t_0)$, $v'(t_0) \in Y_1$, а также для почти всех $t \in [t_0, t_0 + \tau_0]$ правая часть $\varphi(t)$ лежит в Y_1, то и решение $v(t)$ лежит в Y_1 для почти всех $t \in [t_0, t_0 + \tau_0]$.

Теорема 1. *Пусть выполнено ограничение* (5); *функция* $f(t, v)$: $[t_0, t_0 + \tau_0] \times X \to Y$ *по аргументу* t *принадлежит пространству* $L_1(t_0, t_0 + \tau_0; Y)$ *при каждом* $v \in X$, *а по аргументу* v *удовлетворяет условию Липшица*

$$\| f(t, v) - f(t, w) \| \le M \| v - w \| \quad \forall v, w \in X \quad \textit{и почти всех} \quad t_0 \le t \le t_0 + \tau_0, \tag{13}$$

с константой M, *не зависящей от* t *и такой, что*

$$M \left\| G^{-1} Q_2 \right\| < 1; \tag{14}$$

функция $Ff(t, v) = h(t)$ *не зависит от* v *и* $F^j h(t) \in W_1^{2j+1}(t_0, t_0 + \tau_0 : Y)$, $j = 0, \ldots, r$. *Тогда для любых начальных векторов* y_0, y_1 *в* (3) *таких, что*

$$Q_2 y_0 = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^{2j}}{dt^{2j}} \left[F^j h(t) \right]_{t=t_0}, \quad Q_2 y_1 = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^{2j+1}}{dt^{2j+1}} \left[F^j h(t) \right]_{t=t_0}, \tag{15}$$

существует единственное решение $u(t)$ *начальной задачи* (1), (3). *Разрешимость задачи* (1), (3) *эквивалентна разрешимости интегрального уравнения*

$$u(t) = \Phi(u)(t) \equiv G^{-1} \left[C(t-t_0) Q_1 y_0 + S(t-t_0) Q_1 y_1 + \int_{t_0}^{t} S(t-s) Q_1 f(s, u(s))\,ds \right] + \\ + G^{-1} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^{2j}}{dt^{2j}} \left[F^j Q_2 f(t, u(t)) \right] \quad \textit{для почти всех} \quad t_0 \le t \le t_0 + \tau_0. \tag{16}$$

При прочих условиях теоремы соотношения (15) *являются необходимыми для разрешимости начальной задачи* (1), (3).

***Замечание* 2.** Из свойства (13) следует, что функция $t \to f(t, u(t))$ является элементом пространства $L_1(t_0, t_0 + \tau_0; Y)$, если $u(t) \in L_1(t_0, t_0 + \tau_0; X)$.

***Замечание* 3.** Если оценка (5) выполняется при $r = 0$, то оператор F в (6) тривиален: $F = 0$. Поэтому функция $Ff(t, v) = 0$ не зависит от v, а условия согласования (15) на начальные векторы y_0, y_1 принимают вид

$$Q_2 y_0 = 0, \qquad Q_2 y_1 = 0.$$

В этом случае соотношение (16) с учетом $F^0 = 0^0 = E$ принимает вид

$$u(t) = G^{-1} \left[C(t-t_0) y_0 + S(t-t_0) y_1 + \int_{t_0}^{t} S(t-s) Q_1 f(s, u(s))\,ds + Q_2 f(t, u(t)) \right].$$

***Доказательство теоремы* 1.** Применение проекторов Q_1, Q_2 к левой и правой частям уравнения (1) приводит к эквивалентной системе уравнений

$$\frac{d^2}{dt^2}[Q_1Au(t)] = W[Q_1Au(t)] + Q_1f(t, u(t)), \tag{17}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}[FQ_2Bu(t)] + Q_2Bu(t) = Q_2f(t, u(t)). \tag{18}$$

Используя формулу (12) для представления решения неоднородного уравнения (8), уравнение (17) с начальными условиями (3) перепишем в эквивалентной форме

$$Q_1Au(t) = C(t-t_0)Q_1y_0 + S(t-t_0)Q_1y_1 + \int_{t_0}^{t} S(t-s)Q_1f(s, u(s))\,ds. \tag{19}$$

Поскольку r — индекс нильпотентности оператора F (6), уравнение (18) преобразуется в уравнение

$$Q_2Bu(t) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\frac{d^{2j}}{dt^{2j}}\left[F^jQ_2f(t, u(t))\right]. \tag{20}$$

Отсюда следует необходимость ограничений (15) на начальные данные (3).

Таким образом, уравнение (1) эквивалентно системе уравнений (19), (20). Следовательно, при сделанных предположениях функция $u(t) \in L_1(t_0, t_0 + \tau_0; X)$ является решением начальной задачи (1), (3), если и только если она удовлетворяет уравнению (16).

В пространстве $L_1(t_0, t_0 + \tau_1; X)$, где число $\tau_1 \in (0, \tau_0]$ будет определено ниже, рассмотрим отображение Φ, определенное на функциях $u(t)$ по формуле (16). Покажем, что при подходящем выборе $\tau_1 \in (0, \tau_0]$ отображение Φ будет сжимающим. С помощью неравенств (10), (13) оцениваем норму

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{L_1} \le \left[MC_0\left\|G^{-1}\right\|\cdot\|Q_1\|\int_0^{\tau_1}e^{\omega_0 s}\,ds + M\left\|G^{-1}Q_2\right\|\right]\|u-v\|_{L_1}.$$

Соотношение (14) позволяет выбрать число $\tau_1 \in (0, \tau_0]$ так, чтобы отображение Φ было сжимающим

$$MC_0\left\|G^{-1}\right\|\cdot\|Q_1\|\left(e^{\omega_0\tau_1} - 1\right) < \left(1 - M\left\|G^{-1}Q_2\right\|\right)\omega_0.$$

Поэтому существует единственная неподвижная точка $u \in L_1(t_0, t_0 + \tau_1; X)$, которая является решением уравнения (16), а потому и задачи (1), (3) на $[t_0, t_0 + \tau_1]$. Если $\tau_1 < \tau_0$, то, рассуждая, как и выше, мы продолжим решение $u(t)$ на $[t_0 + \tau_1, t_0 + \min\{2\tau_1, \tau_0\}]$. Понятно, что за конечное число шагов мы однозначно продолжим решение на весь отрезок $[t_0, t_0 + \tau_0]$.

Теорема доказана.

***Замечание* 4.** Из доказательства теоремы 1 видно, что условие (14) можно заменить на условие $\tilde{M} < 1$, где $\tilde{M}$ является константой Липшица функции $G^{-1}Q_2f(t, v)$: $\left\|G^{-1}Q_2f(t, v) - G^{-1}Q_2f(t, w)\right\| \le \tilde{M}\|v - w\|$.

4. Разрешимость уравнения с импульсными воздействиями. *Решением начальной задачи* (1), (3) *с импульсными воздействиями* (2) *на отрезке* $[t_0, t_0 + \tau_0]$ называется функция $u(t) \in L_1(t_0, t_0 + \tau_0; X)$ такая, что $Au(t) \in$

$\in W_1^2\left(t_k, t_{k+1}; Y\right)$, $k = 0, 1, \dots, m$, функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для почти всех $t \in [t_0, t_0 + \tau_0]$, импульсным воздействиям (2) и начальным условиям (3). Из определения решения следует, что после возможного изменения на множестве меры нуль функция $Au(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \neq t_1, \dots, t_m$. В точках $t \neq t_1, \dots, t_m$ функция $Au(t)$ и ее производная $(Au)'(t)$ имеют скачки. Поэтому импульсные воздействия (2) имеют смысл. При исследовании неявного уравнения в классе интегрируемых функций мы, вообще говоря, не можем рассматривать операции Δ_k (4) над решениями в отличие от явного уравнения с единичным оператором $A = E$, как, например, в [12], и от исследования неявных уравнений в класе кусочно-непрерывных функций [7] (подразделы 6.2, 6.3).

Теорема 2. *Пусть выполнено ограничение* (5); *функция* $f(t, v)$: $[t_0, t_0 + \tau_0] \times X \to Y$ *по аргументу* t *принадлежит пространству* $L_1(t_0, t_0 + \tau_0; Y)$ *при каждом* $v \in X$, *а по аргументу* v *удовлетворяет условию Липшица* (13) *с константой* M, *не зависящей от* t *и удовлетворяющей неравенству* (14); *функция* $Ff(t, v) = h(t)$ *не зависит от* v *и* $F^j h(t) \in W_1^{2j+1}(t_0, t_0 + \tau_0; Y)$, $j = 0, \dots, r$; *начальные векторы* y_0, y_1 *в* (3) *удовлетворяют ограничению* (15); *для импульсных воздействий* $\Im_k^i(v, w)$: $\Omega_k^1 \times \Omega_k^2 \to Y$ *в* (2) *выполнены соотношения*

$$Q_2 \Im_k^i(v, w) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad i = 0, 1, \quad v \in \Omega_k^1, \quad w \in \Omega_k^2. \tag{21}$$

Тогда существует единственное решение задачи (1) – (3) *на отрезке* $[t_0, t_0 + \tau_0]$, *и это решение удовлетворяет уравнению*

$$\begin{aligned} u(t) = {} & G^{-1}\left[C(t - t_0) Q_1 y_0 + S(t - t_0) Q_1 y_1 + \int_{t_0}^{t} S(t - s) Q_1 f(s, u(s))\, ds \right] + \\ & + G^{-1} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^{2j}}{dt^{2j}} \left[F^j Q_2 f(t, u(t)) \right] + \\ & + G^{-1} \sum_{t_0 < t_k < t} C(t - t_k) \Im_k^0\big((Au)(t_k - 0), (Au)'(t_k - 0)\big) + \\ & + G^{-1} \sum_{t_0 < t_k < t} S(t - t_k) \Im_k^1\big((Au)(t_k - 0), (Au)'(t_k - 0)\big) \end{aligned} \tag{22}$$

для почти всех $t_0 \le t \le t_0 + \tau_0$.

Доказательство. Пусть $u_k(t)$ — решение уравнения (1) на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ с начальными условиями $(Au_k)(t_k) = y_k^0$, $(Au_k)'(t_k) = y_k^1$, $k = 0, 1, \dots, m$, где

$$y_0^i = y_i, \qquad y_k^i = \left(Au_{k-1}\right)^{(i)}(t_k) + \Im_k^i\big((Au_{k-1})(t_k), (Au_{k-1})'(t_k)\big), \tag{23}$$
$$k = 1, 2, \dots, m, \quad i = 0, 1.$$

Покажем, что выполнены соотношения

$$Q_2 y_k^i \;=\; \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^{2j+i}}{dt^{2j+i}} \left[F^j h(t) \right]_{t=t_k}, \quad i = 0, 1. \tag{24}$$

Тогда в силу теоремы 1 существует единственное решение $u_k(t)$, которое удовлетворяет интегральному уравнению

$$u_k(t) \;=\; G^{-1}\left[C(t-t_k)Q_1 y_k^0 + S(t-t_k)Q_1 y_k^1 + \int\limits_{t_k}^{t} S(t-s)Q_1 f(s, u_k(s))\,ds \right] +$$

$$+\; G^{-1}\sum_{j=0}^{r}(-1)^j \frac{d^{2j}}{dt^{2j}}\left[F^j Q_2 f(t, u_k(t)) \right] \quad \text{для почти всех} \quad t_k \le t \le t_{k+1}. \tag{25}$$

Поскольку выполнены ограничения (15), соотношения (24) справедливы при $k = 0$. Следовательно, существует единственное решение $u_0(t)$. Из (25) при $k = 0$ получаем

$$Q_2 (Au_0)^{(i)}(t_1) \;=\; \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \frac{d^{2j+i}}{dt^{2j+i}}\left[F^j h(t) \right]_{t=t_1}, \quad i = 0, 1.$$

Отсюда, а также из предположений (21) и определений (23) при $k = 1$ следует справедливость равенств (24) при $k = 1$. Тогда существует единственное решение $u_1(t)$, которое удовлетворяет интегральному уравнению (25) при $k = 1$. Рассуждая аналогичным образом, последовательно однозначно находим решения $u_2(t), \ldots, u_m(t)$ и убеждаемся, что они являются решениями интегральных уравнений (25) соответственно при $k = 2, \ldots, m$. Решение $u(t)$ задачи (1) – (3) совпадает с $u_k(t)$ почти всюду на $\left[t_k, t_{k+1} \right]$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Убедимся в справедливости формулы (22). Из (23), (25) при $k = 0$ получаем, что $u(t)$ удовлетворяет уравнению (22) при почти всех $t_0 \le t \le t_1$. С помощью (22) находим y_1^0, y_1^1. Имеем

$$\begin{aligned} Q_1 y_1^0 \;&=\; C(t_1 - t_0)Q_1 y_0 \;+\; S(t_1 - t_0)Q_1 y_1 \;+\; \int\limits_{t_0}^{t_1} S(t_1 - s)Q_1 f(s, u(s))\,ds \;+ \\ &\quad +\; \Im_1^0\big((Au)(t_1 - 0), (Au)'(t_1 - 0)\big), \\ Q_1 y_1^1 \;&=\; WS(t_1 - t_0)Q_1 y_0 \;+\; C(t_1 - t_0)Q_1 y_1 \;+\; \int\limits_{t_0}^{t_1} C(t_1 - s)Q_1 f(s, u(s))\,ds \;+ \\ &\quad +\; \Im_1^1\big((Au)(t_1 - 0), (Au)'(t_1 - 0)\big). \end{aligned} \tag{26}$$

Из (23), (25) при $k = 1$ с использованием представлений (26) и свойств косинус- и синус-оператор-функций $C(t)$ и $S(t)$ (11) устанавливаем, что функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (22) при почти всех $t_1 \le t \le t_2$. Проводя аналогичные рассуждения последовательно для отрезков $[t_2, t_3], \ldots, [t_m, t_{m+1}]$, получаем требуемый результат.

Теорема доказана.

***Замечание* 5.** Ограничения на функции $\Im_k^i(v, w)$ (21) являются не только достаточными для разрешимости задачи (1) – (3), но и необходимыми при $v = (Au)(t_k - 0)$, $w = (Au)'(t_k - 0)$. Ограничения (21) характерны только для вырожденного уравнения с импульсным воздействием, когда $Q_2 \ne 0$.

Действительно, решение $u(t)$ при почти всех $t_k \le t \le t_{k+1}$, $k = 1, \ldots, m$, удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям

$$(Au)^{(i)}(t_k + 0) = (Au)^{(i)}(t_k - 0) + \Im_k^i\big((Au)(t_k - 0), (Au)'(t_k - 0)\big), \quad i = 1, 2. \tag{27}$$

Применяя теорему 1 на отрезках $[t_k, t_{k+1}]$, получаем необходимые ограничения на решение $u(t)$ задачи (1) – (3):

$$Q_2(Au)^{(i)}(t_k + 0) = Q_2(Au)^{(i)}(t_k - 0) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^{2j+i}}{dt^{2j+i}} \big[F^j h(t) \big]_{t=t_k}.$$

Отсюда и из (27) следует требуемый результат.

При исследовании задачи (1) – (3) в вещественных пространствах X, Y следует перейти к комплексным оболочкам пространств X, Y и комплексным расширениям операторов A, B, как, например, в [13].

5. Приложения. Рассмотрим приложения полученных результатов к уравнениям в конечномерных пространствах — дифференциально-алгебраическим и к уравнениям в частных производных, не разрешенным относительно старшей производной по времени, — не типа Ковалевской.

5.1. Приложение к импульсным дифференциально-алгебраическим уравнениям. Дифференциально-алгебраические или вырожденные уравнения в конечномерном пространстве в последнее время являются областью интенсивного исследования (см. монографию [14], где приведен обзор соответствующих результатов). Здесь мы рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$u_2''(t) + u_1(t) = f_1\big(t, u_1(t), u_2(t)\big), \qquad u_2''(t) + u_2(t) = f_2\big(t, u_1(t), u_2(t)\big) \tag{28}$$
$$\text{для почти всех} \quad t_0 \le t \le t_{m+1}$$

с импульсными воздействиями

$$\Delta_k\big[u_2(t) \big] = u_2(t_k + 0) - u_2(t_k - 0) = d_k\big(u_2(t_k - 0), u_2'(t_k - 0)\big),$$
$$\Delta_k\big[u_2'(t) \big] = u_2'(t_k + 0) - u_2'(t_k - 0) = e_k\big(u_2(t_k - 0), u_2'(t_k - 0)\big), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{29}$$

и начальными условиями

$$u_2(t_0) = a, \qquad u_2'(t_0) = b. \tag{30}$$

Функции $f_i(t, x, y)$; $[t_0, t_{m+1}] \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, при фиксированных $x, y \in \mathbb{C}$ являются элементами комплексного пространства $L_1(t_0, t_{m+1})$ и для почти всех $t_0 \le t \le t_{m+1}$ удовлетворяют условиям Липшица

$$| f_i(t, x_1, y_1) - f_i(t, x_2, y_2) | \le M_i \sqrt{| x_1 - x_2 |^2 + | y_1 - y_2 |^2}, \quad i = 1, 2,$$
$$\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{C},$$

с константами M_i, не зависящими от t; функции $d_k(x, y)$, $e_k(x, y)$, $k = 1, \ldots, m$, действуют из $\mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}$. В пространстве $\mathbb{C}^2$ задача (28) – (30) записывается в абстрактной форме (1) – (3):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t, v) = \begin{pmatrix} f_1(t, v_1, v_2) \\ f_2(t, v_1, v_2) \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix},$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \quad \Im_k^0(v, w) = \begin{pmatrix} d_k(t, v_2, w_2) \\ d_k(t, v_2, w_2) \end{pmatrix}, \quad \Im_k^1(v, w) = \begin{pmatrix} e_k(t, v_2, w_2) \\ e_k(t, v_2, w_2) \end{pmatrix}.$$

Решение $u_1(t)$, $u_2(t)$ задачи (28) – (30) понимаем в смысле решения абстрактной задачи (1) – (3): $u_1(t)$, $u_2(t) \in L_1(t_0, t_{m+1})$; $u_2(t) \in W_1^2(t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \ldots m$; функции $u_1(t)$, $u_2(t)$ удовлетворяют уравнению (28) для почти всех $t_0 \le t \le t_{m+1}$; функция $u_2(t)$ удовлетворяет импульсным воздействиям (29) и начальным условиям (30). Условие (5) выполнено с $r = 0$. Находим

$$D_1 = Y_1 = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad D_2 = Y_2 = \mathrm{Lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}, \quad Q_1 = P_1 = A,$$

$$Q_2 = P_2 = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad G = G^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad W = -A,$$

$$C(t) = \begin{pmatrix}1 & \cos t - 1\\ 0 & \cos t\end{pmatrix}, \quad S(t) = \begin{pmatrix}t & \sin t - t\\ 0 & \sin t\end{pmatrix}.$$

Предположим, что $M_1 + M_2 < 1$. С учетом замечания 4 условия теоремы 2 выполнены. Поэтому задача (28) – (30) имеет единственное решение $u_1(t)$, $u_2(t)$, при этом

$$u_2(t) = a\cos(t - t_0) + b\sin(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \sin(t - s) f_2(s, u_1(s), u_2(s))\, ds +$$

$$+ \sum_{t_0 < t_k < t} \left[\cos(t - t_k) d_k\big(u_2(t_k - 0), u_2'(t_k - 0)\big) + \sin(t - t_k) e_k\big(u_2(t_k - 0), u_2'(t_k - 0)\big)\right],$$

$$u_1(t) = u_2(t) + f_1\big(t, u_1(t), u_2(t)\big) - f_2\big(t, u_1(t), u_2(t)\big).$$

5.2. Приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных не типа Ковалевской с импульсными воздействиями. При исследовании эволюционных режимов электромагнитного поля в цилиндрическом волноводе с дисперсной средой [6] возникает однородное уравнение не типа Ковалевской. Здесь мы исследуем нелинейное возмущение этого уравнения

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x)\right] + \left[-\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + k^2 u(t,x)\right] =$$

$$= g(t, x, u(t,x)) \quad \text{для почти всех} \quad t_0 \le t \le t_{m+1}, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{31}$$

где ε^2, k^2 — положительные постоянные, $g(t, x, z)$ — функция из $[t_0, t_{m+1}] \times$ $\times [0, \pi] \times \mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Обозначим

$$l_0[u] = (l_0[u])(t,x) = \left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x)\right),$$

$$l_1[u] = (l_1[u])(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x)\right).$$

Любую функцию $u\colon t,\ x \to u(t,x)$ будем также рассматривать как функцию от t со значениями в пространстве функций от x и записывать как $u(t)(x)$. Для уравнения (31) рассматриваем краевые условия

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad t_0 \le t \le t_{m+1}, \tag{32}$$

начальные условия

$$(l_0[u])(0,x) = y_0(x), \quad (l_1[u])(0,x) = y_1(x) \quad \text{для почти всех} \quad 0 \le x \le \pi, \tag{33}$$

и импульсные воздействия

$$\Delta_k\left[(l_i[u])(0,x)\right] = (l_i[u])(t_k+0,x) - (l_i[u])(t_k-0,x) =$$
$$= J_k^i(x,(l_0[u])(t_k-0,x),(l_i[u])(t_k-0,x)), \quad k=1,\ldots,m, \quad i=0,1, \tag{34}$$
$$\text{для почти всех} \quad 0\le x\le\pi,$$

где $J_k^i(x,z_1,z_2)$ — функции из $[0,\pi]\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Будем предполагать, что функция $g(t,x,z)$ при фиксированном z принадлежит классу $g(t,z)(x)\in \in L_1(t_0,t_{m+1};L_2(0,\pi))$, где $L_2(0,\pi)$ — пространство интегрируемых с квадратом функций; функции $J_k^i(x,z_1,z_2)$ при фиксированных z_1, z_2 принимают значения в $L_2(0,\pi)$. Пусть выполняются условия Липшица

$$|g(t,x,z_1)-g(t,x,z_2)| \le M|z_1-z_2|, \tag{35}$$
$$z_1,\ z_2\in\mathbb{C}, \quad \text{для почти всех} \quad t\in[t_0,t_{m+1}], \quad x\in[0,\pi],$$

с константой M, не зависящей от t, x, и

$$\left|J_k^i(x,z_1,z_2)-J_k^i(x,z_1',z_2')\right| \le M_k^i\left(|z_1-z_1'|+|z_2-z_2'|\right), \tag{36}$$
$$z_1,\ z_1',\ z_2,\ z_2'\in\mathbb{C}, \quad \text{для почти всех} \quad x\in[0,\pi],$$

с константами M_k^i, не зависящими от x.

При сделанных предположениях функция $g\colon\ x\to g(t,x,v(x))$ при почти всех фиксированных t и функции $J_k^i\colon\ x\to J_k^i(x,v(x),w(x))$ являются элементами пространства $L_2(0,\pi)$, если $v(x)$, $w(x)\in L_2(0,\pi)$. В пространстве $X = Y = L_2(0,\pi)$ смешанная задача (31) – (34) записывается в абстрактной форме (1) – (3). Дифференциальные операторы A, B определяются как

$$Av = \varepsilon^2\left[\frac{d^2v(x)}{dx^2}+v(x)\right], \qquad Bv = \left[-\frac{d^2v(x)}{dx^2}+k^2v(x)\right],$$
$$D = D_A = D_B = \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\pi) = \left\{v(x)\in W_2^2(0,\pi),\, v(0) = v(\pi) = 0\right\},$$

где $W_2^2(0,\pi)$ — пространство Соболева порядка 2 функций из $L_2(0,\pi)$. Полагаем $f(t,v)\colon\ t,\ v(x)\to g(t,x,v(x))$, $\mathfrak{I}_k^i(v,w)\colon\ v(x),\ w(x)\to J_k^i(x,v(x),w(x))$. Решение смешанной задачи (31) – (34) будем понимать в смысле решения абстрактной задачи (1) – (3).

Для всех

$$\lambda \ne \lambda_n^2 = \frac{n^2+k^2}{\varepsilon^2(n^2-1)}, \quad n=2,3,\ldots,$$

существует резольвента

$$(\lambda A+B)^{-1}v(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n\sin nx}{k^2+n^2+\lambda\varepsilon^2(1-n^2)}, \qquad v_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}v(x)\sin nx\,dx,$$

для которой выполнена оценка (5) с $r=0$. В данном случае

$$Y_2 = D_2 = \operatorname{Ker}A = \{\sin x\}, \qquad Y_1 = (\operatorname{Ker}A)^{\perp}, \qquad D_1 = (\operatorname{Ker}A)^{\perp}\cap D,$$
$$P_2v(x) = Q_2v(x) = v_1\sin x, \qquad P_1 = Q_1 = E-P_2,$$
$$Gv(x) = \varepsilon^2\left(v''(x)+v(x)\right) + \left(1+k^2\right)v_1\sin x,$$

$$G^{-1}v(x) = \frac{v_1}{1+k^2}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{v_n}{\varepsilon^2(1-n^2)}\sin nx, \qquad Wv(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n^2 v_n \sin nx,$$

$$C(t)v(x) = \sum_{n=2}^{\infty} v_n \operatorname{ch}\lambda_n t \sin nx, \qquad S(t)v(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{v_n \operatorname{sh}\lambda_n t}{\lambda_n}\sin nx.$$

Выполняется неравенство

$$\left\| G^{-1}Q_2 f(t,v)(x) - G^{-1}Q_2 f(t,w)(x)\right\|_{L_2} \le \frac{M}{1+k^2}\,\| v(x) - w(x)\|_{L_2}.$$

Будем предполагать, что

$$M < 1 + k^2. \tag{37}$$

Пусть для всех $i = 0, 1$, $k = 1, \ldots, m$, $v(x)$, $w(x) \in L_2(0,\pi)$ выполняются соотношения

$$\int_0^{\pi} y_i(x)\sin x\, dx = 0, \qquad \int_0^{\pi} J_k^i(x, v(x), w(x))\sin x\, dx = 0. \tag{38}$$

С помощью замечания 4 и теоремы 2 можно сформулировать следующий результат.

Утверждение. *Пусть значения* $g(t,z)(x)$, *как функции от* t, *при фиксированных* z *принадлежат* $L_1\big(t_0, t_{m+1}; L_2(0,\pi)\big)$; *функции* $J_k^i(x, z_1, z_2)$, $k = 1, \ldots, m$, $i = 0, 1$, *при фиксированных* z_1, z_2 *принимают значения в* $L_2(0,\pi)$; *справедливы условия Липшица* (35), (36) *с константами* M, M_k^i, *не зависящими от* t, x, *и неравенство* (37); *для всех* $i = 0, 1$, $k = 1, \ldots, m$, $v(x)$, $w(x) \in L_2(0,\pi)$ *выполняются соотношения* (38). *Тогда смешанная задача* (31) – (34) *имеет единственное решение* $u(t,x)$ *такое, что* $u(t)(x) \in L_1\big(t_0, t_{m+1}; L_2(0,\pi)\big)$, $u(t)(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\pi)$ *для почти всех* t *и* $l_0[u](t)(x) \in W_1^2\big(t_k, t_{k+1}; L_2(0,\pi)\big)$, $k = 0, \ldots, m$. *При почти всех* $t_0 \le t \le t_{m+1}$ *и* $0 \le x \le \pi$ *решение* $u(t,x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\begin{aligned} u(t,x) = {} & \sum_{n=2}^{\infty}\frac{y_{0n}}{\varepsilon^2(1-n^2)}\operatorname{ch}\lambda_n(t-t_0)\sin nx + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{y_{1n}}{\varepsilon^2\lambda_n(1-n^2)}\operatorname{sh}\lambda_n(t-t_0)\sin nx + \\ & + \int_{t_0}^{t}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g_n(s,u)}{\varepsilon^2\lambda_n(1-n^2)}\operatorname{sh}\lambda_n(t-s)\sin nx\right]ds + \\ & + \frac{g_1(t,u)}{1+k^2}\sin x + \sum_{t_0<t_k<t}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{J_{kn}^0(u)}{\varepsilon^2(1-n^2)}\operatorname{ch}\lambda_n(t-t_k)\sin nx + \\ & + \sum_{t_0<t_k<t}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{J_{kn}^1(u)}{\varepsilon^2\lambda_n(1-n^2)}\operatorname{sh}\lambda_n(t-t_k)\sin nx, \end{aligned}$$

где

$$y_{in} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y_i(x)\sin nx\,dx,$$

$$J_{kn}^i(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} J_k^i(x, l_0[u](t_k - 0, x), l_1[u](t_k - 0, x))\sin nx\,dx,$$

$$g_n(t, u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t, x, u(t, x))\sin nx\,dx, \qquad k = 1, \ldots, m, \quad i = 0, 1, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

В связи с изучением нестационарных систем и процессов представляет интерес исследование уравнения (1) с нестационарными операторами $A(t)$, $B(t)$. Для исследования вырожденного уравнения (1) в статье предложено выполнить специальные разложения пространств X, Y (п. 2) и соответствующее этим разложениям разбиение уравнения на систему двух уравнений (17), (18). Этот метод допускает распространение на случай нестационарных операторов $A(t)$, $B(t)$ [15].

1. *Самойленко А. М., Стрижак Т. Г.* О движении осциллятора под действием мгновенной силы // Тр. сем. по мат. физике и нелинейным колебаниям. – Киев, 1968. – Вып. 4. – С. 213 – 218.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
3. *Митропольский Ю. А., Молчанов А. А.* Машинный анализ нелинейных резонансных цепей. – Киев: Наук. думка, 1981. – 240 с.
4. *Соболев С. Л.* Задача Коши для частного случая систем, не принадлежащих типу Ковалевской // Докл. АН СССР. – 1952. – **82**, № 2. – С. 205 – 208.
5. *Fattorini H. O.* Second order linear differential equations in Banach spaces // North-Holland Math. Stud. Notas Mat. – 1985. – **99**. – 313 p.
6. *Rutkas A., Vlasenko L.* Implicit operator differential equations and applications to electrodynamics // Math. Meth. Appl. Sci. – 2000. – **23**, № 1. – P. 1 – 15.
7. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Систем. технологии, 2006. – 273 с.
8. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. – 1967. – **74**, № 2. – С. 202 – 208.
9. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 11. – С. 1996 – 2010.
10. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
11. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
12. *Самойленко А. М., Илолов М.* Неоднородные эволюционные уравнения с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 1. – С. 93 – 100.
13. *Rutkas A. G., Vlasenko L. A.* Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations // Nonlinear Anal. TMA. – 2003. – **55**, № 1-2. – P. 125 – 139.
14. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – Київ: Вища шк., 2000. – 296 с.
15. *Vlasenko L. A.* Degenerate time-dependent neutral functional differential equations in Banach spaces // Funct. Different. Equat. – 2007. – **14**, № 2 – 4. – P. 423 – 438.

Получено 11.09.07