УДК 517.929

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

For a class of systems of nonlinear differential-functional equations, we study asymptotic characteristics of their solutions continuously differentiable and bounded for $t \geq T > 0$ (along with the first derivative).

Вивчаються асимптотичні властивості неперервно диференційовних і обмежених при $t \geq T > 0$ (разом із першою похідною) розв'язків одного класу систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь.

Системы нелинейных дифференциально-функциональных уравнений вида

$$qx'(qt) = x'(t) + F\big(t, x(t), x(f(t)), x'(\varphi(t))\big), \tag{1}$$

где $q = \mathrm{const}$, $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, имеют широкие приложения во многих областях естествознания. При различных предположениях относительно q, F, f, φ такие уравнения были объектом исследования многих математиков (см. [1, 2] и цитируемую в них литературу), и в настоящее время ряд вопросов их теории достаточно хорошо исследован. Особенно это касается существования различного рода решений задачи Коши, основной начальной задачи и исследования их свойств. Наряду с этим в последнее время наблюдается повышенный интерес к изучению структуры множества ее непрерывно дифференцируемых решений [3 – 5], которая исследуется также в настоящей работе. Основной ее целью является исследование структуры множества непрерывно дифференцируемых и ограниченных при $t \geq T > 0$ (вместе с первой производной) решений системы уравнений (1), удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \to +\infty} \big[x(qt) - x(t)\big] = 0. \tag{2}$$

Поскольку в классе непрерывно дифференцируемых функций изучение задачи (1), (2), которую будем называть предельной, эквивалентно изучению системы уравнений

$$x(qt) = x(t) - \int_t^{+\infty} F\big(\tau, x(\tau), x(f(\tau)), x'(\varphi(\tau))\big) d\tau, \tag{3}$$

дальнейшей нашей целью будет исследование структуры множества непрерывно дифференцируемых и ограниченных при $t \geq T > 0$ (вместе с первой производной) решений системы уравнений (3).

Структура множества непрерывно дифференцируемых и ограниченных при $t \geq T > 0$ (вместе с первой производной) решений системы уравнений (3) достаточно полно характеризуется наличием q-разностного асимптотического равновесия, определение которого дается ниже.

Определение. *Будем говорить, что система уравнений* (3) *имеет непрерывно дифференцируемое и ограниченное при* $t \geq T > 0$ (*вместе с первой производной*) *q-разностное асимптотическое равновесие, если*:

а) *произвольное непрерывно дифференцируемое и ограниченное при* $t \geq T > 0$ (*вместе с первой производной*) *решение* $x(t)$ *удовлетворяет при* $t \to +\infty$ *соотношению*

$$x(t) = \omega(t) + o(1), \tag{4}$$

где $\omega(t)$ — *непрерывно дифференцируемая и ограниченная при* $t \geq T > 0$ (*вместе с первой производной*) *вектор-функция, удовлетворяющая условию* $\omega(qt) = \omega(t)$;

b) *для произвольной непрерывно дифференцируемой и ограниченной при* $t \geq T > 0$ (*вместе с первой производной*) *вектор-функции* $\omega(t)$, *удовлетворяющей условию* $\omega(qt) = \omega(t)$, *существует непрерывно дифференцируемое и ограниченное при* $t \geq T > 0$ (*вместе с первой производной*) *решение системы уравнений* (3), *удовлетворяющее при* $t \to +\infty$ *соотношению* (4).

Принимая во внимание определение q-разностного асимптотического равновесия системы уравнений (3), естественно ожидать, что оно может существовать лишь при выполнении некоторых дополнительных условий, установление которых и будет теперь нашей главной задачей.

Сначала рассмотрим случай, когда $0 < q < 1$.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *вектор-функция* $F(t, x, y, z)$ *является непрерывной при* $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $F(t, 0, 0, 0) \equiv 0$, *и удовлетворяет соотношению*

$$|F(t, x', y', z') - F(t, x'', y'', z'')| \leq \eta(t)\big(|x' - x''| + |y' - y''| + |z' - z''|\big),$$

где $x', y', z', x'', y'', z'' \in \mathbb{R}^n$, *функции* $\eta(t)$ *и* $\int_t^\infty \eta(\tau)d\tau$ *являются неотрицательными, непрерывными и ограниченными при всех* $t \geq T > 0$;

2) *ряды*

$$H_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i}\eta(q^{-i}t), \qquad H_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i}\int_t^{+\infty}\eta(q^{-i}\tau)d\tau$$

равномерно сходятся при всех $t \geq T > 0$ *и* $3H_i(t) \leq \theta_i < 1$, $i = 1, 2$;

3) *функции* $f(t)$, $\varphi(t)$ *являются непрерывными и такими, что* $f(t) \geq t$, $\varphi(t) \geq t$ *при всех* $t \geq T > 0$.

Тогда для произвольного непрерывно дифференцируемого и ограниченного при $t \geq T$ (*вместе с первой производной*) *решения* $\gamma(t)$ *системы уравнений* (3) *существует непрерывно дифференцируемая и ограниченная при* $t \geq T$ (*вместе с первой производной*) *вектор-функция* $\omega(t)$ *такая, что* $\omega(qt) = \omega(t)$ *и при* $t \to +\infty$ *выполняется соотношение* (4).

Доказательство. Пусть $\gamma(t)$ — некоторое непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T$ (вместе с первой производной) решение системы уравнений (3). Тогда в силу условий 1 – 3 имеем тождество

$$\gamma(t) = \omega(t) - \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i}\int_t^{+\infty} F\big(q^{-i}\tau, \gamma(q^{-i}\tau), \gamma(f(q^{-i}\tau)), \gamma'(\varphi(q^{-i}\tau))\big)d\tau,$$

где

$$\omega(t) = \gamma(t) + \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i}\int_t^{+\infty} F\big(q^{-i}\tau, \gamma(q^{-i}\tau), \gamma(f(q^{-i}\tau)), \gamma'(\varphi(q^{-i}\tau))\big)d\tau.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что вектор-функция $\omega(t)$ является непрерывно дифференцируемой и ограниченной при $t \geq T$ (вместе с первой производной) и выполняется соотношение (4).

Покажем теперь, что вектор-функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию $\omega(qt) = \omega(t)$. Действительно, поскольку имеем тождество

$$\gamma(qt) = \gamma(t) - \int_t^{+\infty} F\big(\tau, \gamma(\tau), \gamma(f(\tau)), \gamma'(\varphi(\tau))\big)d\tau,$$

то

$$\omega(qt) = \gamma(qt) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i+1} \int_t^{+\infty} F\Big(q^{-i+1}\tau, \gamma(q^{-i+1}\tau), \gamma(f(q^{-i+1}\tau)), \gamma'(\varphi(q^{-i+1}\tau))\Big)d\tau =$$

$$= \gamma(t) - \int_t^{+\infty} F\big(\tau, \gamma(\tau), \gamma(f(\tau)), \gamma'(\varphi(\tau))\big)d\tau +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} \int_t^{+\infty} F\Big(q^{-i}\tau, \gamma(q^{-i}\tau), \gamma(f(q^{-i}\tau)), \gamma'(\varphi(q^{-i}\tau))\Big)d\tau =$$

$$= \gamma(t) + \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \int_t^{+\infty} F\Big(q^{-i}\tau, \gamma(q^{-i}\tau), \gamma(f(q^{-i}\tau)), \gamma'(\varphi(q^{-i}\tau))\Big)d\tau = \omega(t).$$

Теорема 1 доказана. Тем самым доказано, что при выполнении условий 1 – 3 утверждение а) имеет место.

Ответ на вопрос о справедливости утверждения б) дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1 – 3. *Тогда для произвольной непрерывно дифференцируемой и ограниченной при* $t \geq T$ (*вместе с первой производной*) *вектор-функции* $\omega(t)$, *удовлетворяющей условию* $\omega(qt) = \omega(t)$, *существует непрерывно дифференцируемое и ограниченное при* $t \geq T$ (*вместе с первой производной*) *решение* $x(t)$ *системы уравнений* (3), *удовлетворяющее соотношению* (4).

Доказательство. Рассмотрим систему нелинейных уравнений вида

$$x(t) = \omega(t) - \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \int_t^{+\infty} F\Big(q^{-i}\tau, x(q^{-i}\tau), x(f(q^{-i}\tau)), x'(\varphi(q^{-i}\tau))\Big)d\tau, \tag{5}$$

где $\omega(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая и ограниченная при $t \geq T$ (вместе с первой производной) вектор-функция, удовлетворяющая условию $\omega(qt) = \omega(t)$. Поскольку произвольное непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T$ (вместе с первой производной) решение системы уравнений (5) является решением системы (3) (в этом можно убедиться непосредственно подстановкой (5) в (3)) и удовлетворяет условию (4) (вытекает из условий 1 – 3), для доказательства теоремы 2 достаточно доказать существование непрерывно дифференцируемого и ограниченного при $t \geq T$ (вместе с первой производной) решения системы уравнений (5).

Для построения решения системы уравнений (5) воспользуемся методом последовательных приближений, которые определим с помощью соотношений

$$x_0(t) = \omega(t), \qquad x_0'(t) = \omega'(t),$$

$$x_m(t) = \omega(t) -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \int_t^{+\infty} F\Big(q^{-i}\tau, x_{m-1}(q^{-i}\tau), x_{m-1}(f(q^{-i}\tau)), x_{m-1}'(\varphi(q^{-i}\tau))\Big)d\tau, \tag{6}$$

$$x'_m(t) = \omega'(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} F\Big(q^{-i}t, x_{m-1}(q^{-i}t), x_{m-1}(f(q^{-i}t)), x'_{m-1}(\varphi(q^{-i}t))\Big), \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Принимая во внимание условия $1-3$ теоремы, методом математической индукции можно показать, что вектор-функции $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, непрерывно дифференцируемы при $t \geq T$. Более того, введя обозначения

$$M_1 = \max_{t \geq T} |\omega(t)|, \qquad M_2 = \max_{t \geq T} |\omega'(t)|,$$

$$M = \max\{M_1, M_2\}, \qquad \theta = \max\{\theta_1, \theta_2\},$$

покажем, что при $t \geq T$ и всех $m \geq 0$ выполняются неравенства

$$|x_m(t)| \leq \frac{M}{1-\theta}, \qquad |x'_m(t)| \leq \frac{M}{1-\theta}. \tag{7}$$

Действительно, функции $x_0(t) = \omega(t)$, $x'_0(t) = \omega'(t)$ удовлетворяют неравенствам (7). Предположим, что функции $x_k(t)$, $x'_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, определенные соотношениями (6), также удовлетворяют неравенствам (7). Тогда в силу (6), (7) и условий $1-3$ получаем

$$|x_m(t)| \leq M_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \left| \int_t^{+\infty} F\Big(q^{-i}\tau, x_{m-1}(q^{-i}\tau), x_{m-1}(f(q^{-i}\tau)), x'_{m-1}(\varphi(q^{-i}\tau))\Big) d\tau \right| \leq$$

$$\leq M_1 + \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \int_t^{+\infty} \eta(q^{-i}\tau)\Big[\left|x_{m-1}(q^{-i}\tau)\right| +$$

$$+ \left|x_{m-1}(f(q^{-i}\tau))\right| + \left|x'_{m-1}(\varphi(q^{-i}\tau))\right|\Big] d\tau \leq$$

$$\leq M_1 + \frac{3M}{1-\theta} \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \int_t^{+\infty} \eta(q^{-i}\tau) d\tau \leq M_1 + \frac{M}{1-\theta}\theta \leq \frac{M}{1-\theta},$$

$$|x'_m(t)| \leq M_2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \left| F\Big(q^{-i}t, x_{m-1}(q^{-i}t), x_{m-1}(f(q^{-i}t)), x'_{m-1}(\varphi(q^{-i}t))\Big) \right| \leq$$

$$\leq M_2 + \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \eta(q^{-i}t)\Big[\left|x_{m-1}(q^{-i}t)\right| + \left|x_{m-1}(f(q^{-i}t))\right| +$$

$$+ \left|x'_{m-1}(\varphi(q^{-i}t))\right|\Big] \leq M_2 + \frac{3M}{1-\theta} \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \eta(q^{-i}t) \leq M + \frac{M}{1-\theta}\theta \leq \frac{M}{1-\theta}.$$

Следовательно, все функции $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, и их производные, определенные соотношениями (6), удовлетворяют неравенствам (7) при $t \geq T$.

Докажем теперь, что последовательности вектор-функций $x_m(t)$, $x'_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, определяемых соотношениями (6), равномерно сходятся при $t \geq$ $\geq T$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что при $t \geq T$ и всех целых $m \geq 1$ выполняются неравенства

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq M\theta^m, \qquad |x'_m(t) - x'_{m-1}(t)| \leq M\theta^m. \tag{8}$$

В силу (6) и условий $1-3$ при $m = 1$ имеем

$$|x_1(t) - x_0(t)| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \left| \int_t^{+\infty} F\left(q^{-i}\tau, \omega(q^{-i}\tau), \omega(f(q^{-i}\tau)), \omega'(\varphi(q^{-i}\tau))\right) d\tau \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \int_t^{+\infty} \eta(q^{-i}\tau)\left[\left|\omega(q^{-i}\tau)\right| + \left|\omega(f(q^{-i}\tau))\right| + \left|\omega'(\varphi(q^{-i}\tau))\right|\right] d\tau \le$$

$$\le 3M \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \int_t^{+\infty} \eta(q^{-i}\tau) d\tau \le 3M \cdot H_2(t) \le M\theta,$$

$$|x_1'(t) - x_0'(t)| \le \sum_{i=1}^{\infty} \left| q^{-i} F\left(q^{-i}t, \omega(q^{-i}t), \omega(f(q^{-i}t)), \omega'(\varphi(q^{-i}t))\right) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \eta(q^{-i}t)\left[\left|\omega(q^{-i}t)\right| + \left|\omega(f(q^{-i}t))\right| + \left|\omega'(\varphi(q^{-i}t))\right|\right] \le$$

$$\le 3M \cdot H_1(t) \le M\theta,$$

и, следовательно, неравенства (8) выполняются. Предположим, что неравенства (8) доказаны для некоторого $m \ge 1$, и покажем, что они сохраняются при переходе от m к $m+1$. Действительно, принимая во внимание (6) – (8) и условия $1-3$, получаем

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \Big| \int_t^{+\infty} \Big| F\left(q^{-i}\tau, x_m(q^{-i}\tau), x_m(f(q^{-i}\tau)), x_m'(\varphi(q^{-i}\tau))\right) -$$

$$- F\left(q^{-i}\tau, x_{m-1}(q^{-i}\tau), x_{m-1}(f(q^{-i}\tau)), x_{m-1}'(\varphi(q^{-i}\tau))\right)\Big| d\tau \Big| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \int_t^{+\infty} \eta(q^{-i}\tau)\Big[\left|x_m(q^{-i}\tau) - x_{m-1}(q^{-i}\tau)\right| +$$

$$+ \left|x_m(f(q^{-i}\tau)) - x_{m-1}(f(q^{-i}\tau))\right| + \left|x_m'(\varphi(q^{-i}\tau)) - x_{m-1}'(\varphi(q^{-i}\tau))\right|\Big] d\tau \le$$

$$\le 3M\theta^m \cdot H_2(t) \le M\theta^{m+1},$$

$$|x_{m+1}'(t) - x_m'(t)| \le \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \Big| F\left(q^{-i}t, x_m(q^{-i}t), x_m(f(q^{-i}t)), x_m'(\varphi(q^{-i}t))\right) -$$

$$- F\left(q^{-i}t, x_{m-1}(q^{-i}t), x_{m-1}(f(q^{-i}t)), x_{m-1}'(\varphi(q^{-i}t))\right)\Big| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} \eta(q^{-i}t)\Big[\left|x_m(q^{-i}t) - x_{m-1}(q^{-i}t)\right| + \left|x_m(f(q^{-i}t)) - x_{m-1}(f(q^{-i}t))\right| +$$

$$+ \left|x_m'(\varphi(q^{-i}t)) - x_{m-1}'(\varphi(q^{-i}t))\right|\Big] \le 3M\theta^m \cdot H_1(t) \le M\theta^{m+1}.$$

Таким образом, неравенства (8) имеют место при всех $m \ge 0$ и, следовательно, последовательности вектор-функций $x_m(t)$, $x_m'(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходятся при $t \geq T$, а вектор-функция

$$x(t) = \lim_{m \to +\infty} x_m(t)$$

является непрерывно дифференцируемым решением системы уравнений (5), удовлетворяющим условиям

$$|x(t)| \leq \frac{M}{1-\theta}, \qquad |x'(t)| \leq \frac{M}{1-\theta}$$

(в этом можно убедиться, если в соотношениях (6), (7) перейти к пределу при $m \to +\infty$).

Теорема 2 доказана.

Непосредственным следствием доказанных выше теорем является следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $0 < q < 1$ *и выполняются условия* $1-3$, *то система уравнений* (3) *имеет непрерывно дифференцируемое и ограниченное при* $t \geq T$ (*вместе с первой производной*) q*-разностное асимптотическое равновесие.*

Рассмотрим теперь систему уравнений (3) в случае $q > 1$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* 1, 3 *теоремы* 1 *и условие*

2′) *ряды*

$$\tilde{H}_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} q^i \eta(q^i t), \qquad \tilde{H}_2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} q^i \int_t^{+\infty} \eta(q^i \tau) d\tau$$

равномерно сходятся при $t \geq T$ *и* $3\tilde{H}_i(t) \leq \tilde{\theta}_i < 1$, $i = 1, 2$.

Тогда для произвольного непрерывно дифференцируемого и ограниченного при $t \geq T$ (*вместе с первой производной*) *решения* $\gamma(t)$ *системы уравнений* (3) *существует непрерывно дифференцируемая и ограниченная при* $t \geq T$ (*вместе с первой производной*) *вектор-функция* $\omega(t)$ *такая, что* $\omega(qt) = \omega(t)$ *и при* $t \to +\infty$ *выполняется соотношение* (4).

Действительно, пусть $\gamma(t)$ — некоторое непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T$ (вместе с первой производной) решение системы уравнений (3) и, следовательно, имеет место тождество

$$\gamma(qt) = \gamma(t) - \int_t^{+\infty} F\big(\tau, \gamma(\tau), \gamma(f(\tau)), \gamma'(\varphi(\tau))\big) d\tau. \tag{9}$$

Тогда в силу условий $1, 2', 3$ это решение можно представить в виде

$$\gamma(t) = \omega(t) + \sum_{i=0}^{\infty} q^i \int_t^{+\infty} F\Big(q^i\tau, \gamma(q^i\tau), \gamma(f(q^i\tau)), \gamma'(\varphi(q^i\tau))\Big) d\tau,$$

где

$$\omega(t) = \gamma(t) - \sum_{i=0}^{\infty} q^i \int_t^{+\infty} F\Big(q^i\tau, \gamma(q^i\tau), \gamma(f(q^i\tau)), \gamma'(\varphi(q^i\tau))\Big) d\tau.$$

Легко проверить, что таким образом определенная вектор-функция $\omega(t)$ является непрерывно дифференцируемой и ограниченной при $t \geq T$ (вместе с первой производной) и решение $\gamma(t)$ удовлетворяет соотношению (4). Остается, таким образом, показать, что вектор-функция $\omega(t)$ удовлетворяет условию $\omega(qt) = \omega(t)$. В самом деле, принимая во внимание (9), получаем

$$\omega(qt) = \gamma(qt) -$$

$$- \sum_{i=0}^{\infty} q^{i+1} \int_t^{+\infty} F\Big(q^{i+1}\tau, \gamma(q^{i+1}\tau), \gamma(f(q^{i+1}\tau)), \gamma'(\varphi(q^{i+1}\tau))\Big) d\tau =$$

$$= \gamma(t) - \int_t^{+\infty} F\big(\tau, \gamma(\tau), \gamma(f(\tau)), \gamma'(\varphi(\tau))\big) d\tau -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} q^{i} \int_t^{+\infty} F\Big(q^{i}\tau, \gamma(q^{i}\tau), \gamma(f(q^{i}\tau)), \gamma'(\varphi(q^{i}\tau))\Big) d\tau =$$

$$= \gamma(t) - \sum_{i=0}^{\infty} q^{i} \int_t^{+\infty} F\Big(q^{i}\tau, \gamma(q^{i}\tau), \gamma(f(q^{i}\tau)), \gamma'(\varphi(q^{i}\tau))\Big) d\tau = \omega(t).$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* 1, $2'$, 3. *Тогда для произвольной непрерывно дифференцируемой и ограниченной при* $t \geq T$ (*вместе с первой производной*) *вектор-функции* $\omega(t)$, *удовлетворяющей условию* $\omega(qt) = \omega(t)$, *существует непрерывно дифференцируемое и ограниченное при* $t \geq T$ (*вместе с первой производной*) *решение* $x(t)$ *системы уравнений* (3), *удовлетворяющее при* $t \to +\infty$ *соотношению* (4).

Доказательство. Поскольку произвольное непрерывно дифференцируемое и ограниченное при $t \geq T$ (вместе с первой производной) решение системы уравнений

$$x(t) = \omega(t) + \sum_{i=0}^{\infty} q^{i} \int_t^{+\infty} F\Big(q^{i}\tau, \gamma(q^{i}\tau), \gamma(f(q^{i}\tau)), \gamma'(\varphi(q^{i}\tau))\Big) d\tau, \qquad (10)$$

где $\omega(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая и ограниченная при $t \geq T$ (вместе с первой производной) вектор-функция, удовлетворяющая условию $\omega(qt) = \omega(t)$, является решением системы уравнений (3) (в этом можно убедиться непосредственной подстановкой (10) в (3)) и удовлетворяет условию (4) (вытекает из условий 1, $2'$, 3), для доказательства теоремы достаточно доказать существование непрерывно дифференцируемого и ограниченного при $t \geq T$ (вместе с первой производной) решения системы уравнений (10). Последнее же можно доказать с помощью метода последовательных приближений аналогично тому, как была доказана теорема 2. Заметим лишь, что в данном случае последовательные приближения $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, и их производные определяются соотношениями

$$x_0(t) = \omega(t), \qquad x_0'(t) = \omega'(t),$$

$$x_m(t) = \omega(t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} q^{i} \int_t^{+\infty} F\Big(q^{i}\tau, x_{m-1}(q^{i}\tau), x_{m-1}(f(q^{i}\tau)), x_{m-1}'(\varphi(q^{i}\tau))\Big) d\tau,$$

$$x'_m(t) = \omega'(t) - \sum_{i=0}^{\infty} q^i F\left(q^i t, x_{m-1}(q^i t), x_{m-1}(f(q^i t)), x'_{m-1}(\varphi(q^i t))\right),$$

$$m = 1, 2, \ldots .$$

Принимая во внимание теоремы 4, 5, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Если* $q > 1$ *и выполняются условия* 1, 2′, 3, *то система уравнений* (3) *имеет непрерывно дифференцируемое и ограниченное при* $t \geq T > 0$ (*вместе с первой производной*) *q-разностное асимптотическое равновесие*.

Таким образом, для системы уравнений (3) и, следовательно, для предельной задачи (1), (2) доказана следующая теорема о существовании непрерывно дифференцируемого и ограниченного при $t \geq T > 0$ (вместе с первой производной) q-разностного асимптотического равновесия.

Теорема 7. *Пусть выполняется одно из предположений*:

1) $0 < q < 1$ *и выполняются условия* 1 – 3;

2) $q > 1$ *и выполняются условия* 1, 2′, 3.

Тогда система уравнений (3) (*предельная задача* (1), (2)) *имеет непрерывно дифференцируемое и ограниченное при* $t \geq T > 0$ (*вместе с первой производной*) *q-разностное асимптотическое равновесие*.

1. *Хейл Дж.* Теория дифференциально-функциональных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 548 с.
2. *Kato T., Mcheod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 891 – 937.
3. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 737 – 747.
4. *Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – № 1. – С. 45 – 49.
5. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* О поведении решений линейных дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом в окрестности особых точек // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 12. – С. 1668 – 1676.

Получено 05.09.07