УДК 519.1

К. И. Белоусов, асп.,
Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, доктора физ.-мат. наук
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ И МУЛЬТИЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕКТРОИДОВ*

Памяти Мориса Ауслендера

It is proved that every finitely represented vectroid is determined, up to isomorphism, by its completed biordered set. Elementary and multielementary representations of such vectroids (which play a central role for biinvolutive posets) are described.

Доведено, що скінченнозображуваний вектроїд з точністю до ізоморфізму визначається своєю поповненою бівпорядкованою множиною. Охарактеризовано елементарні і мультиелементарні зображення таких вектроїдів (котрими у випадку біінволютивних множин майже вичерпуються нерозкладні зображення).

Введение. Через k будем обозначать фиксированное алгебраически замкнутое поле, через $\mathrm{mod}\,k$ — категорию конечномерных правых векторных пространств над k. Символ линейного отображения будем писать справа.

Вектроидом $\mathcal{V}$ (над полем k) назовем малую (класс объектов является множеством) подкатегорию категории $\mathrm{mod}\,k$, являющуюся спектроидом в смысле [1], т. е. удовлетворяющую условиям:

1) для каждой пары объектов $X, Y \in \mathcal{V}$ множество морфизмов $\mathcal{V}(X, Y)$ является линейным подпространством в $\mathrm{mod}\,k(X, Y)$;

2) для каждого $X \in \mathcal{V}$ кольцо $\mathcal{V}(X, X)$ содержит в точности два идемпотента $(0_X \neq 1_X)$;

3) $\mathcal{V}$ не содержит изоморфных объектов.

Размерностью $\dim \mathcal{V}$ вектроида $\mathcal{V}$ назовем $\sup\{\dim X, X \in \mathcal{V}\}$.

Каждому вектроиду $\mathcal{V}$ сопоставляется категория $\oplus \mathcal{V} \subset \mathrm{mod}\,k$, являющаяся агрегатом [1], объектами которой служат все конечные прямые суммы $X_1 \oplus \ldots \oplus X_m$ $(X_i \in \mathcal{V}, m \geq 0)$. Категорию $\oplus \mathcal{V}$ (как и всякую подкатегорию в $\mathrm{mod}\,k$) можно рассматривать как точный модуль над собой [1].

Представлением вектроида $\mathcal{V}$ ([1], 4.1; [2]) назовем тройку (U, f, X), состоящую из пространств $U \in \mathrm{mod}\,k$, $X \in \oplus \mathcal{V}$ и линейного отображения f: $U \to X$. *Морфизм* $(U, f, X) \to (U', f', X')$ — это пара (φ, ξ), состоящая из линейного отображения $\varphi\colon U \to U'$ и морфизма $\xi\colon X \to X'$ категории $\oplus \mathcal{V}$, таких, что $\varphi f' = f\xi$. Представления образуют агрегат, который обозначим $\mathrm{Rep}\,\mathcal{V}$. Вектроид назовем *конечнопредставимым,* если $\mathrm{Rep}\,\mathcal{V}$ имеет конечное число неразложимых объектов.

В обозначениях ([1], 4.1) категория $\mathrm{Rep}\,\mathcal{V}$ совпадает с категорией $(\oplus \mathcal{V})^k$. Иногда мы будем также рассматривать категорию M^k представлений произвольного (не обязательно точного) модуля над агрегатом (см. дополнение в конце введения).

Если $\dim \mathcal{V} = 1$, то $\mathcal{V}$ вполне определяется частичным упорядочением множества $\mathrm{Ob}\,\mathcal{V}$: мы полагаем $X \leq Y$, если $\mathcal{V}(X, Y) \neq 0$; категорию $\mathrm{Rep}\,\mathcal{V}$ можно естественно отождествить с категорией представлений этого чум ([1],

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий и Международного научного фонда (грант U6E000).

4.1; [5]). Критерий конечнопредставимости для частично упорядоченных множеств (чум) получен в [6].

С другой стороны, в ([1], 4.2, 4.3) и ([3], 9.1, 9.4) показано, что категория $\operatorname{mod}\Lambda$ представлений произвольной конечномерной над k алгебры Λ в определенном смысле совпадает с категорией представлений подходящего вектроида $\mathcal{V}$ (а именно: полная подкатегория в $\operatorname{mod}\Lambda$, состоящая из модулей, не содержащих некоторый инъективный неразложимый модуль в качестве прямого слагаемого, эпивалентна категории $\operatorname{Rep}\mathcal{V}$).

Таким образом, теорию представлений вектроидов можно рассматривать как обобщение, с одной стороны, теории представлений чум, а с другой стороны — теории представлений конечномерных алгебр.

Радикалом вектроида $\mathcal{V}$ назовем идеал категории $\mathcal{V}$, образованный пространствами $\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,Y)$ необратимых морфизмов из $\mathcal{V}(X,Y)$ для всех $X,Y\in\mathcal{V}$. Очевидно, при $X\neq Y$ $\mathcal{V}(X,Y)=\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,Y)$, а $\mathcal{V}(X,X)=k1_X\oplus\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,X)$.

Базисом вектроида $\mathcal{V}$ назовем набор $\left\{\left(n_i^X\right),\left(f_l^{XY}\right)\right\}$, состоящий из базисов $\left(n_1^X,n_2^X,\dots,n_{\dim(X)}^X\right)$ пространств $X\in\mathcal{V}$ и базисов $\left(f_1^{XY},f_2^{XY},\dots\right)$ пространств $\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,Y)$. *Рангом базиса* назовем максимальный ранг линейных отображений f_l^{XY}. Базис $\left(n_1^X,n_2^X,\dots,n_{\dim(X)}^X\right)$ объекта X вектроида $\mathcal{V}$ *треугольный*, если для всякого $j\in\mathbb{N}$ семейство $\left\{\overline{\left(n_i^X\right)},\ i=\overline{1,\dim X}\mid \overline{\left(n_i^X\right)}\neq 0\right\}$, где черта означает переход к факторпространству $X/X\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}^j(X,X)$, является линейно независимым. Базис $\left\{\left(n_i^X\right),\left(f_l^{XY}\right)\right\}$ вектроида $\mathcal{V}$ *треугольный*, если каждый базис $\left(n_i^X\right)$, $X\in\mathcal{V}$, треугольный. Базис *скалярно мультипликативный*, если для всех n_i^X, f_l^{XY} элемент $n_i^X f_l^{XY}$ равен λn_p^Y, $\lambda\in k$, причем из $n_i^X f_l^{XY}=\lambda n_p^Y$, $n_j^X f_l^{XY}=\mu n_p^Y$, $\lambda,\mu\in k^*$, следует $i=j$. Скалярно мультипликативный базис назовем *мультипликативным*, если каждый элемент $n_i^X f_l^{XY}$ равен 0 или n_p^Y ([1], 4.10). Каждый конечнопредставимый вектроид имеет мультипликативный базис ранга ≤ 2 [4].

Вектроид $\mathcal{V}$ назовем *цепным*, если для каждого $X\in\mathcal{V}$ подмодули модуля $X_{\mathcal{V}(X,X)}$ линейно упорядочены по включению

$$X=X_1\underset{\neq}{\supset}X_2\underset{\neq}{\supset}\dots\underset{\neq}{\supset}X_{\dim X}\underset{\neq}{\supset}0.$$

В этом случае все они циклические, $X_i=m_i^X\mathcal{V}(X,X)$, причем $m_1^X,\dots,m_{\dim X}^X$ — треугольный базис объекта X вектроида $\mathcal{V}$ (см. лемму 1).

Известно, что если $\mathcal{V}$ — конечнопредставимый вектроид, то $\mathcal{V}$ цепной и $\dim\mathcal{V}\leq 3$ ([1], 4.7, 4.8).

По произвольному цепному вектроиду $\mathcal{V}$ построим чум

$$S(\mathcal{V})=\bigcup_{X\in\mathcal{V}}\{X_1,X_2,\dots,X_{\dim X}\}$$

с отношением $X_i\leq Y_j$, если $m_i^X\varphi=m_j^Y$ для некоторого $\varphi\in\mathcal{V}(X,Y)$.

Дефектом вектора $\mathcal{V}$ назовем число $\operatorname{def}(\mathcal{V})=\sup\{\operatorname{def}(X,Y)\mid X,Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{V}\}$, где

$$\operatorname{def}(X,Y)=|\{(X_i,Y_j)\mid X_i<Y_j\}|-\dim\operatorname{Rad}(X,Y).$$

Из результатов [4] следует, что для конечнопредставимого вектроида $\mathcal{V}$ $\operatorname{def} \mathcal{V} \leq 1$ (см. п. 2).

Если $\operatorname{def} \mathcal{V} = 0$, то легко видеть, что $\mathcal{V}$ имеет мультипликативный базис ранга 1 и категория $\operatorname{Rep} \mathcal{V}$ совпадает с категорий представлений слабопополненного чум $S(\mathcal{V})'$ (см. п. 1). Для слабопополненных чум критерий конечной представимости и описание неразложимых представлений (в случае конечной представимости) даны в [9] (см. также [10]).

Критерий конечной представимости вектроидов $\mathcal{V}$ размерности 2 и дефекта 1 сформулирован в ([1], 5.8) и доказан в [7, 8]. При этом представления таких вектроидов также отождествляются с представлениями чум $S(\mathcal{V})$ с некоторой дополнительной структурой (биинволютивного чум). Критерий состоит в том, что вектроид $\mathcal{V}$ конечнопредставим тогда и только тогда, когда конечнопредставимо чум $\operatorname{St}(S)$, которое строится по биинволютивному чум S ([1], 5.8).

Таким образом, вопрос о критерии конечной представимости остается пока открытым только для (цепных) вектроидов дефекта 1 и размерности 3.

В п. 1 мы сопоставим каждому цепному вектроиду $\mathcal{V}$ пополненное биупорядоченное множество $S(\mathcal{V})$, а в п. 2 покажем, что конечнопредставимый вектроид однозначно задается своим пополненным биупорядоченным множеством. В п. 5 мы по любому цепному вектроиду $\mathcal{V}$ дефекта ≤ 1 построим чум $C(\mathcal{V})$, обобщающее чум $\operatorname{St}(S)$ из ([1], 5.8) и в этой связи введем элементарные и мультиэлементарные представления вектроидов.

Дополнение. Модули над агрегатами. Пусть A — агрегат и M — (правый) модуль над A, который мы всегда будем предполагать поточечно конечным (см. [1], 3.1, 2.2 и 3.6). Такие модули (A, M) образуют категорию $\mathcal{M}$, в которой морфизмами из (A, M) в (A', M') объявляются пары (F, Φ), где F: $A \to A'$ — функтор, а $\Phi\colon M \to F^*M'$ — морфизм A-модулей (F^*A' — отступление M' вдоль F).

По модулю $(A, M) \in \mathcal{M}$ построим *производный модуль* $\operatorname{Der}(A, M) = (\operatorname{Rep} M, E_M)$, где $\operatorname{Rep} M$ — агрегат, состоящий из троек (V, f, X) с $V \in \operatorname{mod} k$, $X \in A$, и $f \in \operatorname{mod} k(V, M(X))$, морфизмами из (V, f, X) в (V', f', X') служат пары (φ, ξ) с $\varphi \in \operatorname{mod} k(V, V')$, $\xi \in A(X, X')$, такие, что $f \circ M\xi = \varphi \circ f'$ (ср. [1], 4.1, где $\operatorname{Rep} M$ обозначается через M^k), E_M — модуль над $\operatorname{Rep} M$, получающийся из модуля (A, M) отступлением вдоль функтора T: $\operatorname{Rep} M \to A$, $T(V, f, X) = X$.

Более того, Der продолжается до функтора $\operatorname{Der}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, переводящего морфизм $(F, \Phi)\colon (A, M) \to (A', M')$ в морфизм

$$\operatorname{Der}(F, \Phi) = (G, \Psi)\colon (\operatorname{Rep} M, E_M) \to (\operatorname{Rep} M', E_{M'}),$$

где $G(V, f, X) = (V, f \circ \Phi(X), F(X))$, $\Psi(V, f, X) = \Phi(X)$ (здесь $\Phi(X)$: $M(X) \to M'(FX)$).

По произвольному вектроиду $\mathcal{V}$ естественным образом строится модуль $\mathrm{M}\mathcal{V} = (\oplus \mathcal{V}, M_{\mathcal{V}}) \in \mathcal{M}$, где $\oplus \mathcal{V}$ — агрегат прямых сумм объектов из $\mathcal{V}$, $M_{\mathcal{V}}$ — модуль над $\oplus \mathcal{V}$, $M_{\mathcal{V}}(X) = X$ (напомним, что всякий объект $X \in \oplus \mathcal{V}$ можно считать векторным пространством). Полученный модуль будет точным (т. е. $M_{\mathcal{V}}\xi \neq 0$, если $0 \neq \xi \in \oplus \mathcal{V}(X, X')$).

Далее мы будем опускать указание на отображение M, т. е. писать $\mathcal{M}(V, V')$ вместо $\mathcal{M}(\mathrm{M}V, \mathrm{M}V')$, $\mathrm{Der}\,\mathcal{V}$ вместо $\mathrm{Der}(\mathrm{M}\mathcal{V})$ и т. д. Отметим только, что $\mathrm{Rep}\,\mathrm{M}\mathcal{V}$ совпадает с $\mathrm{Rep}\,\mathcal{V}$, а два вектроида $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}'$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны модули $\mathrm{M}\mathcal{V}$ и $\mathrm{M}\mathcal{V}'$.

***Замечание* 1.** В некоторых статьях (например, [2]) изучалась *категория подпространств* $U_{\mathcal{V}}$ агрегата $\oplus\mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ — произвольный вектроид), объектами которой являются подпространства пространств $X \in \oplus\mathcal{V}$, множество морфизмов $U_{\mathcal{V}}(V, W)$, где $V \subset X$, $W \subset Y$, состоит из всех $\varphi \in \oplus\mathcal{V}(X, Y)$, для которых $V\varphi \subset W$. Пусть ${}^{i}\mathrm{Rep}\,\mathcal{V} \subset \mathrm{Rep}\,\mathcal{V}$ — полная подкатегория, состоящая из представлений $(V, f, X) \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{V}$, у которых f — мономорфизм. Спектроид агрегата $\mathrm{Rep}\,\mathcal{V}$ содержит подспектроид, „равный" спектроиду агрегата ${}^{i}\mathrm{Rep}\,\mathcal{V}$ и еще в точности один объект, а именно: $(k, 0, 0)$. Категории $U_{\mathcal{V}}$ и ${}^{i}\mathrm{Rep}\,\mathcal{V}$, как легко видеть, эквивалентны.

1. Биупорядоченные множества. Пусть α — бинарное отношение на множестве Z. При $b \in Z$ и $A, B \subset Z$ положим

$$A^{\alpha}(b) = \{y \in A \mid y\,\alpha\, b\}, \quad A^{\alpha}(B) = \bigcap_{b \in B} A^{\alpha}(b).$$

Будем писать $A\,\alpha B$, если $a\,\alpha\, b$ для всех $a \in A$, $b \in B$.

Для отношения частичного порядка $\le$ на множестве Z и $a, b \in Z$ будем писать $a \not\asymp b$, если $a \not\le b$ и $b \not\le a$.

Через $\tilde{\alpha}$ обозначим *рефлексивное замыкание* отношения α, т. е. такое отношение на Z, что $z\tilde{\alpha}z$ для всех $z \in Z$, а при $y \ne z$ $z\tilde{\alpha}y$ выполнено тогда и только тогда, когда имеет место $z\,\alpha\, y$. Отношение α будем называть *псевдоэквивалентностью,* если α антирефлексивно, а $\tilde{\alpha}$ — эквивалентность. Все встречающиеся в статье псевдоэквивалентности будут обозначаться $\sim$, а соответствующие им отношения эквивалентности — $\approx$.

Биупорядоченым множеством [8] назовем множество S с отношением частичного порядка $\le$ и отношением $\lhd$, которые удовлетворяют условиям:

а) если $a \lhd b$, то $a \le b$; б) если $a \lhd b \le c$ или $a \le b \lhd c$, то $a \lhd c$.

Отсюда следует, что отношение $\lhd$ транзитивно и антисимметрично, но, вообще говоря, не рефлексивно (если $\lhd$ рефлексивно, то оно совпадает с $\le$).

***Замечание* 2.** Если $\mathrm{Cat}(S, \le)$ — чум $(S, \le)$, рассматриваемое как категория (см. [1], 2.1, пример 5), то $\lhd = \{(Y|X) \mid X \lhd Y\}$ — идеал в $\mathrm{Cat}(S, \le)$, и наоборот, любой идеал в этой категории задает биупорядоченное множество.

Биупорядоченное множество с заданным на нем отношением эквивалентности $\approx$ назовем *пополненным биупорядоченным множеством.* Пополненное биупорядоченное множество $(S, \le, \lhd, \approx)$ назовем *локально конечным,* если все классы эквивалентности $S^{\approx}(s)$, $s \in S$, конечны.

Слабо пополненным чум назовем чум $(S, \le)$ с заданным на нем отношением эквивалентности $\approx$. Если $S = (S, \le, \lhd, \approx)$ — пополненное биупорядоченное множество, то $S^{w} = (\dot{S}, \le, \approx)$ — слабо пополненное чум, полученное ослаблением структуры из S. Иногда удобно считать слабо пополненное чум $(S, \le, \approx)$ пополненным биупорядоченным множеством, у которого отношения $\le$ и $\lhd$ совпадают.

Пусть S — пополненное биупорядоченное множество. Через $d(a)$ обозначим число элементов, эквивалентных $a \in S$, $d(S) = \sup\{d(a) \mid a \in S\}$. Пару

(a, b) элементов множества S назовем *ребром* и будем писать $a \Rightarrow b$, если $a < b$ и $a \ntriangleleft b$. В силу определения биупорядоченного множества, если $a \Rightarrow b$ и $a < x < b$, то $a \Rightarrow x \Rightarrow b$. Два ребра $\alpha : a \Rightarrow b$ и $\alpha' : a' \Rightarrow b'$ назовем *эквивалентными* и будем писать $\alpha \approx \alpha'$ (или $\alpha \sim \alpha'$ при $\alpha \neq \alpha'$), если $a \approx a'$ и $b \approx b'$. Число ребер, эквивалентных $a \Rightarrow b$, обозначим через $\mathrm{ed}(a, b)$. Ребро $a \Rightarrow b$ назовем *максимальным*, если из $x \le a < b \le y$ и $x \Rightarrow y$ следует $x = a$, $y = b$. Ребро $a \Rightarrow b$ назовем *коротким*, если не существует x такое, что $a < x < b$. Пару эквивалентных ребер $(a \Rightarrow b) \sim (a' \Rightarrow b')$ назовем *короткой*, если не существуют $x \sim x'$ такие, что $a < x < b$ и $a' < x' < b'$ (см. ниже пример 1в).

Пусть $\mathcal{V}$ — цепной вектроид. Введем на чум $S(\mathcal{V})$ структуру пополненного биупорядоченного множества. Если $X_i = m_i^X \mathcal{V}(X, X)$, $Y_j = m_j^Y \mathcal{V}(Y, Y) \in S(\mathcal{V})$, то положим $X_i \approx Y_j$, если $X = Y$; $X_i \triangleleft Y_j$, если существует линейное отображение $\varphi \in \mathcal{V}(X, Y)$ ранга 1 такое, что $m_i^X \varphi = m_j^Y$.

***Замечание* 3.** Если вектроид $\mathcal{V}$ не цепной, то можно аналогичным образом определить пополненное биупорядоченное множество $S(\mathcal{V})$ (циклических подмодулей), но оно, вообще говоря, не будет локально конечным. Отметим, что вектроид $\mathcal{V}$ цепной тогда и только тогда, когда для каждого $X \in \mathcal{V}$ модуль $X_{\mathcal{V}(X,X)}$ содержит лишь конечное число циклических подмодулей.

Пусть $X = \oplus_i k m_i^X$, $Y = \oplus_j k m_j^Y$ — два объекта вектроида $\mathcal{V}$. Определим линейное отображение $e_{ij}^{XY} : X \to Y$, положив $m_i^X e_{ij}^{XY} = m_j^Y$, $m_l^X e_{ij}^{XY} = 0$ при $l \neq i$.

***Пример* 1.** а) Определим вектроид $\mathcal{V}$ с двумя объектами

$$X = \bigoplus_{i=1}^{3} k m_i^X, \quad Y = \bigoplus_{i=1}^{3} k m_i^Y$$

и пространствами морфизмов

$$\mathcal{V}_1(X, X) = k 1_X \oplus \bigoplus_{i<j} k e_{ij}^{XX}, \quad \mathcal{V}_1(Y, Y) = k 1_Y \oplus \bigoplus_{i<j} k e_{ij}^{YY},$$

$$\mathcal{V}_1(X, Y) = k\left(e_{11}^{XY} + e_{22}^{XY}\right) \oplus k\left(e_{11}^{XY} + e_{33}^{XY}\right) \oplus \bigoplus_{i<j} k e_{ij}^{XY},$$

$$\mathcal{V}_1(Y, X) = \bigoplus_{i<j} k e_{ij}^{YX}.$$

Очевидно, $\dim(\mathcal{V}_1) = 3$, $\mathrm{def}(\mathcal{V}_1) = 1$. При этом

$$S(\mathcal{V}_1) = \begin{tikzcd} X_1 \circ \arrow[r, Rightarrow] & \circ\, Y_1 \arrow[dl] \\ X_2 \circ \arrow[r, Rightarrow] & \circ\, Y_2 \arrow[dl] \\ X_3 \circ \arrow[r, Rightarrow] & \circ\, Y_3 \end{tikzcd}$$

($a \to b$ означает, что $a \triangleleft b$ и нет такого $x \in S$, что $a \triangleleft x < b$ или $a < x \triangleleft b$).

б) Определим вектроид $\mathcal{V}_2$, отличающийся от вектроида $\mathcal{V}_1$ лишь пространством морфизмов

$$\mathcal{V}_2(X, Y) = k\left(e_{11}^{XY} + e_{22}^{XY} + e_{33}^{XY}\right) \oplus \bigoplus_{i<j} k e_{ij}^{XY}.$$

Очевидно, $\dim(\mathcal{V}_2) = 3$, $\mathrm{def}(\mathcal{V}_2) = 2$ и $S(\mathcal{V}_2) = S(\mathcal{V}_1)$.

в) Пополним вектроид $\mathcal{V}_1$ объектами $Z = km_1^Z \oplus km_2^Z$, $T = km_1^T \oplus km_2^T$, построив вектроид $\mathcal{V}_3$ с пространствами морфизмов

$$\mathcal{V}_3(Z,Z) = k1_Z \oplus ke_{12}^{ZZ}, \quad \mathcal{V}_3(T,T) = k1_T \oplus ke_{12}^{TT},$$

$$\mathcal{V}_3(X,Z) = k\left(e_{11}^{XZ} + e_{22}^{XZ}\right), \quad \mathcal{V}_3(Z,Y) = k\left(e_{11}^{ZY} + e_{22}^{ZY}\right),$$

$$\mathcal{V}_3(X,T) = k\left(e_{21}^{XT} + e_{32}^{XT}\right), \quad \mathcal{V}_3(T,Y) = k\left(e_{12}^{TY} + e_{23}^{TY}\right).$$

Пространства $\mathcal{V}_3(Z,X)$, $\mathcal{V}_3(Y,Z)$, $\mathcal{V}_3(T,X)$, $\mathcal{V}_3(Y,T)$, $\mathcal{V}_3(Y,X)$ нулевые. Тогда

$$S(\mathcal{V}_3) = \begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd] & \\
X_1 \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[ddd] & & Y_1 \arrow[ddd] \\
 & Z_2 \arrow[dr, Rightarrow] & \\
X_2 \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd] & & Y_2 \arrow[dd] \\
 & T_1 \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dd] & \\
X_3 \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & Y_3 \\
 & T_2 \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}.$$

В биупорядоченном множестве $S(\mathcal{V}_3)$ ребра $X_1 \Rightarrow Y_1$, $X_3 \Rightarrow Y_3$ будут длинными, но образованная ими пара будет короткой.

***Пример* 2.** Определим вектроид $\mathcal{W}$ с одним объектом $X = \bigoplus_{i=1}^{4} km_i^X$ и пространством морфизмов

$$\mathcal{W}(X,X) = k1_X \oplus k\left(e_{12}^{XX} + e_{34}^{XX}\right) \oplus ke_{23}^{XX} \oplus \left(\bigoplus_{j>i+1} ke_{ij}^{XX}\right).$$

Тогда $\dim \mathcal{W} = 4$, $\operatorname{def} \mathcal{W} = 2$,

$$S(\mathcal{W}) = \underset{X_1}{\circ} \Longrightarrow \underset{X_2}{\circ} \longrightarrow \underset{X_3}{\circ} \Longrightarrow \underset{X_4}{\circ}.$$

Пусть S — локально конечное пополненное биупорядоченное множество. Тогда на множестве $S \times \mathbb{N}$ можно определить отношения $\le$, $\lhd$ и $\approx$ следующим образом:

$(s,i) \le (t,j)$, если $s \le t$;
$(s,i) \lhd (t,j)$, если $s \lhd t$;
$(s,i) \approx (t,j)$, если $s \approx t$ и $i = j$.

Отметим, что $\le$ — квазипорядок ([13], II.1), $\lhd$ определяет идеал в категории $\operatorname{Cat}(S \times \mathbb{N}, \le)$, ассоциированной с квазиупорядоченным множеством $(S \times \times \mathbb{N}, \le)$, а $\approx$ — отношение эквивалентности на $S \times \mathbb{N}$.

Размерностью φ на множестве S назовем функцию $\varphi: S \to \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$) такую, что $\varphi(s) = \varphi(t)$ при $s \approx t$. Обозначим $S_\varphi = \{(s, i) \in S \times \mathbb{N} \mid i \le \varphi(s)\}$.

Представлением S размерности φ называется матрица M (возможно, с пустым множеством строк и столбцов), столбцы M_i которой пронумерованы элементами множества S_φ, т. е. задана биекция $n: \{1, \ldots, l\} \to S_\varphi$, где l — число столбцов в M. Будем называть столбцы M_i, M_j представления M *сравнимыми* (соответственно *эквивалентными*), если $n(i)$ и $n(j)$ сравнимы относительно $\le$ (соответственно *эквивалентны* относительно $\approx$) в $S \times \mathbb{N}$. Представление M будем называть *точным*, если его размерность φ такова, что $\varphi(s) \ne 0$ для всякого $s \in S$, и точными в точке $s \in S$, если $\varphi(s) \ne 0$.

Пусть $\mathcal{V}$ — цепной вектроид и $(U, f, X) \in \operatorname{Rep} \mathcal{V}$; тогда выбор треугольного базиса в вектроиде $\mathcal{V}$ и базиса в пространстве U сопоставляет представлению (U, f, X) представление пополненного биупорядоченного множества $S(\mathcal{V})$. Однако, вообще говоря, ни вектроид $\mathcal{V}$, ни категория $\operatorname{Rep} \mathcal{V}$ не определяются $S(\mathcal{V})$. Так, в примерах 1а) и 1б) $S(\mathcal{V}_1) \simeq S(\mathcal{V}_2)$, но $\mathcal{V}_1 \ne \mathcal{V}_2$, причем $\mathcal{V}_1$ конечнопредставим, а $\mathcal{V}_2$ — нет. Однако если $\operatorname{def}(\mathcal{V}) \le 1$, то во всех известных нам случаях категория $\operatorname{Rep} \mathcal{V}$ (но не сам $\mathcal{V}$!) определяется пополненным биупорядоченным множеством $S(\mathcal{V})$. В п. 2 мы покажем, что конечнопредставимый вектроид однозначно восстанавливается по $S(\mathcal{V})$.

2. Вектроиды дефекта ≤ 1.

***Лемма* 1.** *Пусть $\mathcal{V}$ — цепной вектроид, $X \in \mathcal{V}$. Тогда*:

а) *все ненулевые подмодули модуля $X_{\mathcal{V}(X,X)}$ циклические*

$$X = X_1 \underset{\ne}{\supset} X_2 \underset{\ne}{\supset} \ldots \underset{\ne}{\supset} X_{d(X)} \underset{\ne}{\supset} 0, \quad X_i = m_i^X \mathcal{V}(X, X);$$

б) *образующие $m_1^X, \ldots, m_{d(X)}^X$ составляют k-базис пространства X*;

в) *их можно выбрать так, чтобы для некоторого $\varphi_X \in \operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X, X)$*

$$m_2^X = m_1^X \varphi_X, \ldots, m_{d(X)}^X = m_1^X \varphi_X^{d(X)-1}$$

и $\varphi_X^d = 0$.

Доказательство. а) Если, например, X_1 не циклический, то его можно представить в виде суммы двух подмодулей $N_1 + N_2$, где $N_1 \not\supset N_2$ и $N_1 \not\subset N_2$.

б) Поле k алгебраически замкнуто, алгебра $\mathcal{V}(X, X)$ локальна, поэтому простой модуль X_i / X_{i+1} $(1 \le i < d(X))$ изоморфен k.

в) Можно взять $m_1^X \in X_1 \setminus X_2$, $\varphi_X \in \operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X, X) \setminus (P_1 \cup \ldots \cup P_{d(X)-1})$, где $P_i = \{\psi \in \mathcal{V}(X, X) \mid X_i \psi \subset X_{i+2}\}$ — собственные подпространства пространства $\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X, X)$ и $X_{d(X)+1} = 0$.

Для вектроида $\mathcal{V}$ пусть $\operatorname{r}(\mathcal{V})$ обозначает минимально возможный ранг базиса $\mathcal{V}$.

***Лемма* 2.** *Пусть $\mathcal{V}$ — цепной вектроид. Тогда*:

а) $\operatorname{def}(\mathcal{V}) \ge 0$, *причем* $\operatorname{def}(\mathcal{V}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{r}(\mathcal{V}) \le 1$;

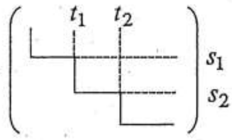
б) $\operatorname{def}(\mathcal{V}) \ge \operatorname{r}(\mathcal{V}) - 1$.

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathcal{V}$. Выберем в X, Y базисы $m_1^X, \ldots, m_{d(X)}^X$

и $m_1^Y, \ldots, m_{d(X)}^Y$ так же, как в лемме 1. Поскольку $\mathrm{Rad}_{\mathcal{V}}(X, Y)$ замкнут относительно умножения слева на φ_X и справа на φ_Y, то пространство задающих его $d(X) \times d(Y)$ матриц

$$\mathcal{R}(X, Y) = \left\{ (\alpha_{ij}) \mid \sum \alpha_{ij} e_{ij}^{XY} \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{V}}(X, X) \right\}$$

замкнуто относительно сдвигов вверх и вправо, и поэтому имеет ступенчатый вид

$A =$ 

(ср. [1], 4.7).

1) Покажем, что $|\{ (X_i, Y_j) \mid X_i < Y_j \}|$ равно числу лежащих над ступенями элементов матрицы A из $\mathcal{R}(X, Y)$.

Действительно, множество узлов

$$\mathcal{K}_{XY} = \{ (s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n) \}$$

$$(1 \le s_1 < \ldots < s_n \le d(X),\ 1 \le t_1 < \ldots < t_n \le d(Y))$$

образовано всеми минимальными элементами множества

$$N_{XY} = \{ (s, t) \mid \exists\, (\alpha_{ij}) \in \mathcal{R}(X, Y):\ \alpha_{st} \ne 0 \}$$

относительно отношения частичного порядка, для которого $(i, j) \le (i', j')$, если $i \ge i'$, $j \le j'$. Очевидно, N_{XY} совпадает с множеством индексов элементов матрицы A, лежащих над ступенями, т. е.

$$N_{XY} = \{ (i, j) \mid \exists\, l:\ 1 \le i \le s_l,\ t_l \le j \le d(Y) \}.$$

Пусть $(l, r) \in N_{XY}$. Подберем $\varphi = \sum \alpha_{ij} e_{ij}^{XY} \in \mathrm{Rad}(X, Y)$ так, чтобы $\alpha_{lr} \ne 0$, и $f \in k[x]$ так, чтобы $\varphi f(\varphi_Y) = \sum \beta_{ij} e_{ij}^{XY}$, $\beta_{lj} = 0$ при $j \ne r$, $\beta_{lr} \ne \ne 1$. Тогда $m_l^X \varphi f(\varphi_Y) = m_r^Y$, $X_l < Y_r$. Следовательно, имеется биекция $N_{XY} \to \{ (X_i, Y_j) \mid X_i < Y_j \}$ и $\operatorname{def}(X, Y) = |N_{XY}| - \dim \mathrm{Rad}(X, Y)$.

2) Пусть $A_\alpha = \left(a_{ij}^{(\alpha)}\right)$, $1 \le \alpha \le t$, — k-базис пространства матриц $\mathcal{R}(X, Y)$. Тогда существует набор индексов $J = \{ (i_1, j_1), \ldots, (i_t, j_t) \}$ такой, что будут линейно независимы матрицы $B_a = \left(b_{ij}^{(\alpha)}\right)$, $1 \le \alpha \le t$, где $b_{ij}^{(\alpha)} = a_{ij}^{(\alpha)}$ при $(i, j) \in J$, $b_{ij}^{(\alpha)} = 0$ при $(i, j) \notin J$. Последовательностью преобразований вида $A_\alpha \to A_\alpha + a A_\beta$ $(\alpha \ne \beta, a \in k)$ можно от $A_1, \ldots, A_t$ перейти к новому k-базису $C_\alpha = \left(c_{ij}^{(\alpha)}\right)$, $1 \le \alpha \le t$, для которого $c_{i_\beta j_\beta}^{(\alpha)} = 0$ при $\alpha \ne \beta$, $c_{i_\alpha j_\alpha}^{(\alpha)} \ne 0$. Поскольку каждая матрица C_α имеет вид, аналогичный виду матрицы A и среди ее лежащих над ступенями элементов не менее $t - 1$ нулевых, то C_α имеет не более $|N_{XY}| - t + 1$ ненулевых элементов, поэтому $\operatorname{rank}(C_\alpha) \le |N_{XY}| - t + 1$, $\mathrm{r}(X, Y) \le |N_{XY}| - \dim \mathcal{R}(X, Y) + 1$, $\operatorname{def}(X, Y) \ge \mathrm{r}(X, Y) - 1$, что доказывает б).

3) Докажем а). В силу б) и п. 1 доказательства достаточно показать, что $\mathrm{r}(\mathcal{V}) = 1$ влечет $\operatorname{def}(\mathcal{V}) = 0$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathcal{R}(X, Y)$, $\operatorname{rank}(A) = 1$ и пусть (s, t) — минимальный элемент множества $\{(i,j) \mid \alpha_{ij} \neq 0\}$ относительно определенного в п. 1 доказательства частичного порядка. Поскольку $\mathcal{R}(X, Y)$ замкнуто относительно сдвигов вверх и вправо, то $\mathcal{R}(X, Y)$ содержит матричные единицы E_{ij} для всех $(i, j) \geq (s, t)$. Поэтому, если $\mathrm{r}(X, Y) = 1$, то $\mathcal{R}(X, Y)$ имеет базис, состоящий из матричных единиц, и в силу п. 1 леммы $\operatorname{def}(X, Y) = 0$. Лемма 2 доказана.

***Предложение* 1.** *Цепной вектроид дефекта ≤ 1 имеет скалярно мультипликативный базис ранга ≤ 2.*

Доказательство. 1) Пусть $X, Y \in \mathcal{V}$, $\mathcal{K}_{XY}$ и N_{XY} — определенные в лемме 2 множества. Покажем, что существуют $c_1^{XY}, \ldots, c_n^{XY} \in k$ (возможно, все равные 0) такие, что

$$\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X, Y) = \left\{ \sum_{i, j \in N_{XY}} \alpha_{ij} e_{ij}^{XY} \,\middle|\, c_1^{XY} \alpha_{s_1 t_1} + \ldots + c_n^{XY} \alpha_{s_n t_n} = 0 \right\}.$$

Действительно, в силу условия $\operatorname{def}(\mathcal{V}) \leq 1$, пространство $\mathcal{R}(X, Y)$ имеет коразмерность ≤ 1 в пространстве всех ступенчатых матриц вида A, поэтому найдутся $c_{ij} \in k$ такие, что

$$\mathcal{R}(X, Y) = \left\{ \sum_{(i,j) \in N_{XY}} \alpha_{ij} E_{ij} \,\middle|\, \sum_{(i,j) \in N_{XY}} c_{ij} \alpha_{ij} = 0 \right\},$$

где E_{ij} — матричные единицы.

Пусть $c_{ir} \neq 0$ для некоторого $(i, r) \notin \mathcal{K}_{XY}$. Тогда $\mathcal{R}(X, Y)$ содержит $B_{ij} = E_{ij} + \gamma_{ij} E_{ir}$ для всех $(i, j) \in N_{XY} \setminus (i, r)$, где $\gamma_{ij} = -c_{ij} c_{lr}^{-1}$. Зафиксируем такое $(s, t) \in \mathcal{K}_{XY}$, что $(s, t) < (l, r)$, и положим $(l_i, r_i) = (s, t) + i\,[(l, r) - (s, t)]$. Пусть m таково, что $(l_m, r_m) \in N_{XY}$, но $(l_{m+1}, r_{m+1}) \notin N_{XY}$ и пусть F_1, F_2 — матрицы отображений φ_X, φ_Y. Тогда $\mathcal{R}(X, Y)$ содержит матрицы

$$B_{st} = E_{l_0 r_0} + \gamma_{st} e_{l_1 r_1}, \quad F_1^{s-l} B_{st} F_2^{r-t} = E_{l_1 r_1} + \gamma_{st} e_{l_2 r_2},$$
$$F_1^{2(s-l)} B_{st} F_2^{2(r-t)} = E_{l_2 r_2} + \gamma_{st} e_{l_3 r_3}, \ldots, E_{l_m r_m},$$

а следовательно, и матрицу $E_{l_1 r_1} = E_{lr}$, что противоречит $c_{ir} \neq 0$.

Следовательно, $c_{ij} = 0$ для всех $(i, j) \in \mathcal{K}_{XY}$, что доказывает часть 1.

2) Скалярно мультипликативный базис вектроида $\mathcal{V}$ можно получить, пополнив векторы m_i^X морфизмами f_l^{XY} следующего вида:

а) e_{ij}^{XY} при $(i, j) \in N_{XY} \setminus \mathcal{K}_{XY}$ и при $(i, j) = (s_r, t_r) \in \mathcal{K}_{XY}$, $c_r^{XY} = 0$;

б) $e_{s_{r(1)} t_{r(1)}}^{XY} - \left(c_{r(1)}^{XY} / c_{r(i)}^{XY}\right) c_{s_{r(i)} t_{r(i)}}^{XY}$ для всех $2 \leq i \leq q$, где $\{r(1), \ldots, r(q)\} = \{r \mid c_r^{XY} \leq 0\}$, $r(1) \leq \ldots \leq r(q)$.

***Лемма* 3.** *Пополненное биупорядоченное множество $S(\mathcal{V})$ цепного вектроида $\mathcal{V}$ дефекта ≤ 1 удовлетворяет условиям:*

I. *Класс эквивалентности каждого элемента линейно упорядочен;*

II. *Если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ и $a_1 \Rightarrow a_n$, найдутся $a_1' \sim a_1, \ldots, a_n' \sim a_n$* такие, что $a_1' < a_2' < \ldots < a_n'$ и $a_1' \Rightarrow a_n'$;

III. *Если* $\mathrm{ed}(a, b) \geq 3$, *то ребро* $a \Rightarrow b$ *максимально*;

IV. $a \lhd a$ *тогда и только тогда, когда* $d(a) = 1$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — цепной вектроид дефекта ≤ 1, $\{m_i^X, f_l^{XY}\}$ — его скалярно мультипликативный базис ранга 2, построенный при доказательстве предложения 1.

Условие I следует из того, что $m_i^X \varphi_X = m_{i+1}^X$ $(i < \dim(X))$.

Условие II достаточно проверить для $n = 2$ и $n = 3$. При $n = 2$ доказательство очевидно: пусть $X_i \Rightarrow Y_j$, тогда $m_i^X f_l^{XY} = \alpha m_j^Y$ для некоторого $f_l^{XY} = \alpha e_{ij}^{XY} + \beta e_{i'j'}^{XY}$, $i \neq i'$, $j \neq j'$, $\alpha, \beta \in k \in k^*$, т. е. $X_{i'} \Rightarrow X_{j'}$. Докажем II при $n = 3$. Пусть $X_i < Y_j < Z_r$ и $X_i \Rightarrow Z_r$. Тогда найдутся f_l^{XY}; f_p^{YZ} такие, что $m_i^X f_l^{XY} = \alpha m_j^Y$, $m_j^Y f_p^{YZ} = \beta m_r^Z$, $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Поскольку $X_i \Rightarrow Z_r$, то $\mathrm{rank}\left(f_l^{XY} f_p^{YZ}\right) \neq 1$. Следовательно, $f_l^{XY} = \alpha e_{ij}^{XY} + \gamma e_{i'j'}^{XY}$, $f_p^{YZ} = \beta e_{jr}^{YZ} + \delta e_{j'r'}^{YZ}$, $\gamma \neq 0 \neq \delta$, и $X_{i'} < Y_{j'} < Z_{r'}$. Если $X_{i'} \lhd Z_{r'}$, то $e_{i'r'}^{XZ} \in \mathrm{Rad}(X, Z)$, $f_l^{XY} f_p^{YZ} - \gamma\delta e_{i'r'}^{XZ}$ отображает m_i^X на $\alpha\beta m_r^Z$ и имеет ранг 1, что противоречит $X_i \Rightarrow Z_r$. Следовательно, $X_{i'} \Rightarrow Z_{r'}$.

Докажем III. Пусть $X_i \Rightarrow Y_j$, $X_{i'} \Rightarrow Y_{j'}$, $X_{i''} \Rightarrow Y_{j''}$ — три разных ребра, и пусть, например, $X_i \Rightarrow Y_j$ не максимально справа, т. е. существует $Z_r > Y_j$ такой, что $X_i \Rightarrow Z_r$. Тогда $X_i \Rightarrow Y_j \Rightarrow Z_r$ есть базисный морфизм $f_l^{YZ} = \alpha e_{jr}^{YZ} + \beta e_{tr'}^{YZ}$, $\alpha \neq 0 \neq \beta$, $j \neq t$, можем считать $j' \neq t$. Согласно части 1 доказательства предложения 1 существует $\psi = \gamma e_{ij}^{XY} + \delta e_{i'j'}^{XY} \in \mathrm{Rad}_{\mathcal{V}}(X, Y)$, $\gamma \neq 0 \neq \delta$. Существование морфизма $\psi f_l^{YZ} = \alpha\gamma e_{ir}^{XZ}$ противоречит $X_i \Rightarrow Z_r$.

IV следует из локальности кольца $\mathcal{V}(X, X)$: если $m_i^X f = m_i^X$, то $\mathrm{rank}(f) = \dim X$.

Лемма 4. *Следующее свойство является следствием условий* I–III: *если* $(a \Rightarrow b) \doteq (a' \Rightarrow b')$, *то* $a < a'$, $b < b'$ *или* $a > a'$, $b > b'$.

Доказательство. Пусть $a = a'$. По условию II должно существовать ребро $(a'' \Rightarrow b'') \sim (a \Rightarrow b)$, для которого $a'' \neq a$, $b'' \neq b$. Следовательно, $\mathrm{ed}(a, b) \geq 3$ и в силу III ребра $a \Rightarrow b$ и $a \Rightarrow b'$ максимальны. Но $b \approx b'$ по условию I $b < b'$ или $b > b'$, соответственно $a \Rightarrow b$ или $a \Rightarrow b'$ не максимально. Поэтому $a \neq a'$ и, аналогично, $b \neq b'$. Если, например, $a < a'$ и $b > b'$, то, поскольку $a < a' < b' < b$ и $a \Rightarrow b$, получим $a \Rightarrow b'$; но мы только что доказали, что такого ребра нет. Следовательно, $a < a'$, $b < b'$ или $a > a'$, $b > b'$.

Лемма 5. а) *Пусть* $\mathrm{char}(k) \neq 2$ *и пусть* $\mathcal{V}$ — *цепной вектроид дефекта* ≤ 1, *имеющий мультипликативный базис ранга* ≤ 2. *Тогда для* $S(\mathcal{V})$ *выполняется условие*:

V. *Если* (α_1, α_2), (α_2, α_3), … , (α_t, α_{t+1}) — *длинные пары ребер и* t *четное, то* (α_1, α_{t+1}) — *короткая пара ребер.*

б) *По локально конечному пополненному биупорядоченному множеству* S, *удовлетворяющему условиям* I–V, *можно построить имеющий мультипликативный базис цепной вектроид* $\mathcal{V}$ *дефекта* ≤ 1, *для которого* $S(\mathcal{V}) \simeq S$.

Доказательство. а) Пусть $\mathcal{V}$ — цепной вектроид дефекта ≤ 1 и пусть $S(\mathcal{V})$ содержит длинные пары ребер (α_1, α_2), (α_2, α_3), … , (α_t, α_{t+1}), $(\alpha_1,$

$\alpha_{t+1})$, где $\alpha_l\colon X_{i_l}\Rightarrow Y_{j_l}$ $(1\le l\le t+1)$. Поскольку (α_1,α_2) — длинная пара, то $X_{i_l}\Rightarrow Z_{p_l}\Rightarrow Y_{j_l}$ $(l=1,2)$ для некоторого Z. По условию III $\operatorname{ed}(X,Z)= \operatorname{ed}(Z,Y)=2$. Пусть $\mathcal{V}$ имеет мультипликативный базис ранга ≤ 2, тогда $e^{XZ}_{i_1p_1}+e^{XZ}_{i_2p_2}$ и $e^{XZ}_{p_1j_1}+e^{ZY}_{p_2j_2}$ — базисные морфизмы и $e_1+e_2\in\mathcal{V}(X,Y)$, где $e_l=e^{XY}_{i_lj_l}$ $(1\le l\le t+1)$. Аналогично $e_2+e_3,\ldots,e_t+e_{t+1}$, $e_1+e_{t+1}\in\mathcal{V}(X,Y)$. При четном t и $\operatorname{char}(k)\ne 2$ получим $e_1=e^{XY}_{i_1j_1}\in\mathcal{V}(X,Y)$, что противоречит $X_{i_1}\Rightarrow X_{j_1}$.

б) Пусть теперь S — локальное конечное пополненное биупорядоченное множество, удовлетворяющее условиям I–V. Построим вектроид $\mathcal{V}=\operatorname{Vect}(S)$, объектами которого являются векторные пространства $X=kx_1\oplus\ldots\oplus kx_{d(X)}$, где $\{x_1,\ldots,x_{d(X)}\}$ — классы эквивалентности элементов множества S, $x_1<x_2<\ldots<x_{d(X)}$. Пространство $\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,Y)$ породим линейными отображениями e^{XY}_{ij} для всех $x_i\lhd y_j$ и всеми отображениями из некоторого множества $L(X,Y)\subset\left\{e^{XY}_{ij}+e^{XY}_{i'j'}\mid (x_i\Rightarrow y_j)\sim(x_{i'}\Rightarrow y_{j'})\right\}$, содержащего $e^{XY}_{ij}+e^{XY}_{i'j'}$ для всех длинных пар $(x_i\Rightarrow y_j, x_{i'}\Rightarrow y_{j'})$ и максимального относительно следующего свойства: линейная оболочка $L(X,Y)$ не содержит отображений вида e^{XY}_{ij}. Чтобы $L(X,Y)$ выбиралась однозначно, наложим следующее условие: если $(x_i\Rightarrow y_j, x_{i'}\Rightarrow y_{j'})$, $(x_s\Rightarrow y_t, x_{s'}\Rightarrow y_{t'})$ $(i<i',\ s<s')$ — две короткие пары и $e^{XY}_{ij}+e^{XY}_{i'j'}\in L(X,X)$, $e^{XY}_{st}+e^{XY}_{s't'}\notin L(X,X)$, то $i<s$ либо $i=s$, $i'<s'$. Отметим, что мы строим вектроид с фиксированным мультипликативным базисом.

Докажем, что $\mathcal{V}$ определено корректно, т. е. $fg\in\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,Y)$ для всех $f\in\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,Y)$, $g\in\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(Y,Z)$. Можем считать, что f, g — порождающие отображения (т. е. $f=e^{XY}_{ij}$, $x_i\lhd y_j$, или $f\in L(X,Y)$). Пусть $f=e^{XY}_{ij}+\ldots$, $g=e^{YZ}_{jl}+\ldots$, тогда $x_i<y_j<z_l$. Если $x_i\lhd z_l$, то $e^{XZ}_{il}\in\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,Z)$ и $fg\in\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,Z)$. Пусть $x_i\Rightarrow z_l$. Тогда $x_i\Rightarrow y_j\Rightarrow z_l$, по II найдутся другие $x_{i'}\Rightarrow z_{l'}$, $x_{i'}\Rightarrow y_{j'}\Rightarrow z_{l'}$. В силу III $\operatorname{ed}(x_i,y_j)=\operatorname{ed}(y_j,z_l)=2$, поэтому $f=e^{XY}_{ij}+e^{XY}_{i'j'}$, $g=e^{YZ}_{jl}+e^{YZ}_{j'l'}$. Поскольку $(x_i\Rightarrow z_l, x_{i'}\Rightarrow z_{l'})$ — длинная пара ребер, то по определению $L(X,Z)$ $fg=e^{XZ}_{il}+e^{XZ}_{i'l'}\in\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,Z)$.

Изучим вид $\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,Y)$. Пусть $\mathcal{K}_{XY}=\{(s_1,t_1),\ldots,(s_n,t_n)\}$ — множество минимальных элементов множества $N_{XY}=\{(i,j)\mid x_i<y_j\}$. Если $(i,j)\in N_{XY}$ и $(i,j)<(i',j')$, то $x_{i'}\le x_i<y_j\le y_{j'}$, следовательно $(i',j')\in N_{XY}$ и N_{XY} имеет вид, описанный в п. 1 доказательства леммы 2. Если при этом $x_i\Rightarrow y_j$, то в силу леммы 4 $x_{i'}\lhd y_{j'}$ и $(i,j)\in\mathcal{K}_{XY}$. Поэтому ввиду максимальности $L(X,Y)$ пространство $\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X,Y)$ допускает базис, введенный в п. 1 доказательства предложения 1 и $\operatorname{def}(X,Y)\le 1$. Лемма 5 доказана.

Категорией $\operatorname{Rep}(S)$ *представлений* локально конечного пополненного биупорядоченного множества S, удовлетворяющего условиям I–V, назовем категорию $\operatorname{Rep}(\mathcal{V})$ представлений вектроида $\mathcal{V}=\operatorname{Vect}(S)$, построенного при доказательстве п. б) леммы 5.

***Замечание* 4.** Если вектроид $\mathcal{V}$ цепной, $\mathrm{r}(\mathcal{V}) = 2$, но $\operatorname{def}(\mathcal{V}) > 1$, то на множестве ребер множества $S(\mathcal{V})$ можно определить отношение эквивалентности $\approx_{\mathrm{ed}}$, полагая $(X_i \Rightarrow Y_j) \approx_{\mathrm{ed}} (X_{i'} \Rightarrow Y_{j'})$, если найдется морфизм $\xi \in \in \mathcal{V}(X, Y)$ такой, что

$$X_i\xi \subset Y_j; \quad (X_i \operatorname{Rad}_{\mathcal{V}(X,X)})\xi \subset Y_j \operatorname{Rad}_{\mathcal{V}(Y,Y)}; \quad X_{i'}\xi \subset Y_{j'};$$

$$(X_{i'} \operatorname{Rad}_{\mathcal{V}(X,X)})\xi \subset Y_{j'} \operatorname{Rad}_{\mathcal{V}(Y,Y)};$$

$$X_i\xi \not\subset Y_j \operatorname{Rad}_{\mathcal{V}(Y,Y)}; \quad X_{i'}\xi \not\subset Y_{j'} \operatorname{Rad}_{\mathcal{V}(Y,Y)},$$

и не существует $\zeta \in \mathcal{V}(X, Y)$ такой, что $m_i^X \zeta = m_j^Y$, $m_{i'}^X \zeta = 0$. По пополненному биупорядоченному множеству S с заданным отношением эквивалентности $\approx_{\mathrm{ed}}$ на ребрах аналогичным образом можно определить вектроид $\operatorname{Vect}(S, \approx_{\mathrm{ed}})$, причем $S(\operatorname{Vect}(S, \approx_{\mathrm{ed}})) \approx (S, \approx_{\mathrm{ed}})$. Отметим, что если $\operatorname{def} \mathcal{V} \leq 1$, то $\approx_{\mathrm{ed}}$ совпадает с отношением эквивалентности на ребрах, введенным в п. 1.

***Лемма* 6.** *Если вектроид $\mathcal{V}$ конечнопредставим, то* $\operatorname{def} \mathcal{V} \leq 1$, *пополненное биупорядоченное множество $S(\mathcal{V})$ удовлетворяет условиям* I–V *и условию*:

VI. $d(a) \leq 3$ *для всех* $a \in S(\mathcal{V})$.

Доказательство. Условие VI выполнено, поскольку $\mathcal{V}$ цепной и $\dim \mathcal{V} \leq 3$. Докажем, что $\operatorname{def} \mathcal{V} \leq 1$. В лемме 1 [4] показано, что для $X \in \mathcal{V}$:

– если $\dim X = 2$, то 1) $\mathcal{V}(X, X) = k1_X \oplus ke_{12}^{XX}$,

– если $\dim X = 3$, то 2)

$$\mathcal{V}(X, X) = k1_X \oplus ke_{12}^{XX} \oplus ke_{23}^{XX} \oplus ke_{13}^{XX}$$

или 3)

$$\mathcal{V}(X, X) = k1_X \oplus k\left(e_{12}^{XX} + \lambda e_{23}^{XX}\right) \oplus ke_{13}^{XX}, \quad \lambda \in k^*.$$

Очевидно, в случаях 1), 2) $\operatorname{def}(X, X) = 0$, в случае 3) $\operatorname{def}(X, X) = 1$. Если же $X, Y \in \mathcal{V}$, $X \neq Y$, то в лемме 5 [4] показано, что пространство $\mathcal{V}(X, Y)$ допускает базис, состоящий из линейных отображений ранга ≤ 2, причем морфизмов ранга 2 в нем не более двух, и они имеют вид:

либо 4) $e_{l_1 r_1}^{XX} + \lambda e_{l_2 r_2}^{XX}$ для некоторых $\lambda \in k^*$, $1 \leq l_1 < l_2 \leq \dim X$, $1 \leq r_1$, $r_2 \leq \dim Y$,

либо 5) $e_{11}^{XY} + \lambda e_{22}^{XY}$, $e_{11}^{XY} + \mu e_{33}^{XY}$, $\lambda, \mu \in k^*$.

В случаях 4), 5) $\operatorname{def}(X, Y) = 1$. Итак, $\operatorname{def} \mathcal{V} \leq 1$. В силу леммы 2 $S(\mathcal{V})$ удовлетворяет условиям I–IV. Условие V выполняется, поскольку класс эквивалентности, содержащий более двух ребер, имеет вид $\{x_i \Rightarrow y_j : i = 1, 2, 3\}$ и согласно последнему утверждению из ([4], предложение 1) содержит короткую пару ребер.

***Предложение* 2.** *Отображение* $\mathcal{V} \to S(\mathcal{V})$ *устанавливает биекцию между изоклассами конечнопредставимых вектроидов и изоклассами конечнопредставимых локально конечных пополненных биупорядоченных множеств, удовлетворяющих условиям* I–VI.

Доказательство. Пусть M_1 — класс всех конечнопредставимых вектроидов, M_2 — класс всех конечнопредставимых локально конечных пополненных биупорядоченных множеств, удовлетворяющих условиям I–VI. В силу леммы 6 если $\mathcal{V} \in M_1$, то $S(\mathcal{V}) \in M_2$. При доказательстве леммы 5 для каждого $S \in M_2$ построен вектроид $\operatorname{Vect}(S) \in M_1$ такой, что $S(\operatorname{Vect}(S)) \simeq S$. Осталось показать, что $\operatorname{Vect}(S(\mathcal{V})) \simeq S$ для всех $\mathcal{V} \in M_1$.

Пусть $\mathcal{V} \in M_1$. Каждое пространство $\operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X, Y)$ имеет вид, указанный в п. 1 доказательства предложения 1, где $(s_1, t_1), \dots, (s_n, t_n)$ — минимальные элементы множества $N_{XY} = \{(i,j) \mid X_i < Y_j,\ X_i,\ Y_j \in S(\mathcal{V})\}$. Как и при доказательстве леммы 5, по $S(\mathcal{V})$ определим множество линейных отображений $L(X, Y)$. Согласно ([4], предложения 1, 2) базисы $\left(m_1^X, \dots, m_{d(X)}^X\right)$ пространств $X \in \mathcal{V}$ можно подобрать так, чтобы $L(X, Y) \subset \operatorname{Rad}_{\mathcal{V}}(X, Y)$, причем m_i^X вместе с e_{ij}^{XY}, $(X_i \lhd Y_j)$ и морфизмами из $L(X, Y)$ составляли бы мультипликативный базис вектроида $\mathcal{V}$. Получаем $\operatorname{Vect}(S(\mathcal{V})) \simeq \mathcal{V}$.

***Замечание* 5.** Два вектройда $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ назовем *локально изоморфными,* если существует биекция $f\colon \operatorname{Ob}\mathcal{V} \to \operatorname{Ob}\mathcal{V}'$ и для каждой пары объектов X, $Y \in \mathcal{V}$ (включая $X = Y$) существуют невырожденные линейные отображения $\varphi\colon X \to f(X)$, $\psi\colon Y \to f(Y)$ такие, что $\mathcal{V}(X, Y)\psi = \varphi\mathcal{V}'(f(X), f(Y))$. Покажем, что *из локального изоморфизма конечнопредставимых вектроидов* $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ *следует их изоморфизм.*

Достаточно доказать, что рассматриваемое равенство возможно лишь при $\mathcal{K}_{XY} = \mathcal{K}_{f(X)f(Y)}$ и $\left\{r \mid c_r^{XY} \neq 0\right\} = \left\{r \mid c_r^{f(X)f(Y)} \neq 0\right\}$ для всех X, $Y \in \mathcal{V}$ (так как тогда $S(\mathcal{V})) \simeq S(\mathcal{V}')$ и можно воспользоваться предложением 2).

Пусть $X = Y$ и $\dim X = 3$ (при $\dim X = 2$ утверждение очевидно). Тогда $\mathcal{V}(X, X)$ может иметь вид $k1_X \oplus k\left(e_{12}^{XX} + e_{23}^{XX}\right) \oplus ke_{13}^{XX}$ или $k1_X \oplus ke_{12}^{XX} \oplus \oplus ke_{23}^{XX} \oplus ke_{13}^{XX}$. Поскольку отображение $\alpha \mapsto \varphi^{-1}\alpha\psi$ задает изоморфизм пространств $\mathcal{V}(X, X)$ и $\mathcal{V}'(f(X), f(X))$, то $\mathcal{V}'(f(X), f(X))$ имеет ту же размерность, а следовательно, и тот же вид, что и $\mathcal{V}(X, X)$.

Пусть $X \neq Y$. Запишем равенство в матричном виде: $V\Psi = \Phi V'$, где $V = \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(X, Y)$, $V' = \mathcal{R}_{\mathcal{V}'}(f(X), f(Y))$, Ψ, Φ — матрицы отображений ψ и φ. Поскольку $V = SVR$ и $V' = S'V'R'$ для любых верхнетреугольных матриц S, R, S', R' с единичной диагональю, то Ψ, Φ можно заменить матрицами $R\Psi R'^{-1}$, $S^{-1}\Phi S'$, а следовательно, подобрать Ψ, Φ так, чтобы они имели в точности один ненулевой элемент в каждом столбце и каждой строке, т. е. стали матрицами перестановок. Но перестановками перейти от одного $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$ к другому нельзя, что и доказывает замечание.

3. S-графы. Пусть S обозначает, как всегда, пополненное биупорядоченное множество. *S-графом* назовем пятерку $(\mathcal{B}, \Gamma, -, \sim, \varphi_{\mathcal{B}})$, где:

$\mathcal{B}$ — конечное множество (*вершин* S-графа);

$\Gamma \subset \mathcal{B}$ — подмножество (*невырожденных* вершин);

$\sim$ — псевдоэквивалентность на $\mathcal{B}$;

$-$ — симметричное бинарное отношение на Γ;

$\varphi_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{B} \to S$;

причем:

1) если $x - y$ в Γ, то $\varphi_{\mathcal{B}}(x) \asymp \varphi_{\mathcal{B}}(y)$; $|\Gamma^-(x)| \leq 1$ для всякого $X \in \Gamma$;

2) если $x_1 \sim x_2$ (в $\mathcal{B}$), то $\varphi_{\mathcal{B}}(x_1) \sim \varphi_{\mathcal{B}}(x_2)$ (в S); $\varphi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}^{\approx}(x)) = S^{\approx}(\varphi_{\mathcal{B}}(x))$ для любого $x \in \mathcal{B}$.

Множество вершин S-графа $(\mathcal{B}, \Gamma, -, \sim, \varphi_{\mathcal{B}})$ разбивается на непересекающиеся подмножества $\mathcal{B}^{\approx}(x)$, $x \in \mathcal{B}$, которые мы будем называть *узлами*. Узел $\mathcal{B}^{\approx}(x)$ назовем *узлом вершины* x или *узлом, принадлежащим классу эквивалентности* $S^{\approx}(\varphi_{\mathcal{B}}(x))$.

Узлы S-графа $\mathcal{B}$ образуют некоторый граф $K(\mathcal{B})$ (неориентированный, имеющий, возможно, петли и кратные ребра), в котором ребрами между двумя узлами $X, Y \in K(\mathcal{B})$ служат пары $\{x, y\}$, где $x \in X$, $y \in Y$ и $x - y$.

S-граф $\mathcal{B}$ назовем *связным*, если связен граф $K(\mathcal{B})$, и *невырожденным*, если $\Gamma \bigcap \mathcal{B}^{\approx}(x) \neq \varnothing$ для всякого $x \in \mathcal{B}$.

Естественным образом определяются морфизмы S-графов, в частности, можно говорить об изоморфных S-графах и S-подграфах. Через $\hat{C}(S)$ обозначим множество классов изоморфизма связных S-графов.

***Замечание* 6.** Из определения S-графа непосредственно следует, что $\varphi_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{B}^{\approx}(x)}$ — биекция $\mathcal{B}^{\approx}(x)$ на $S^{\approx}(\varphi_{\mathcal{B}}(x))$ для любого $x \in \mathcal{B}$. Связный S-граф всегда не вырожден, за исключением случая, когда $\Gamma = \varnothing$, а $|\mathcal{B}/\approx| = 1$.

***Замечание* 7.** Графически будем изображать невырожденные вершины S-графа точками с надписанными над ними значениями отображения $\varphi_{\mathcal{B}}$. При этом две точки, отвечающие вершинам $x, y \in \Gamma$, будут соединяться волной, если $x \sim y$, и чертой, если $x - y$. Из замечания 6 следует, что невырожденный S-граф однозначно, с точностью до изоморфизма, восстанавливается по четверке $(\Gamma, -, \sim_{\Gamma}, \varphi_{\mathcal{B}}|_{\Gamma})$, где $\sim_{\Gamma}$ — ограничение $\sim$ на Γ.

***Замечание* 8.** Определение S-графа не учитывает отношения $\vartriangleleft$ на S, т. е. определяется S^w. В п. 5 мы определим множество $C(S)$ (связных) S-графов с выделенной вершиной и введем на нем отношение порядка, зависящее от $\vartriangleleft$.

Путем в S-графе $\mathcal{B}$ из узла X в узел Y назовем последовательность вершин S-графа $(x'_0, x_1, x'_1, \ldots, x_{n-1}, x'_{n-1}, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, для которой $\mathcal{B}^{\approx}(x'_0) = X$, $\mathcal{B}^{\approx}(x_n) = Y$, $x_i \sim x'_i$, если $i = \overline{1, n-1}$, и $x'_i - x_{i+1}$ для $i = \overline{0, n-1}$. Заметим, что тогда $(\mathcal{B}^{\approx}(x'_0), \mathcal{B}^{\approx}(x_1), \mathcal{B}^{\approx}(x_2), \ldots, \mathcal{B}^{\approx}(x_n))$ — путь в $K(\mathcal{B})$ из X в Y. Наоборот, если $(X = X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n = Y)$ — путь в $K(\mathcal{B})$ из X в Y, то существует путь $(x'_0, x_1, x'_1, \ldots, x_{n-1}, x'_{n-1}, x_n)$ из X в Y в S-графе $\mathcal{B}$ такой, что $\mathcal{B}^{\approx}(x_i) = X_i$, $i = \overline{1, n}$. В силу замечания 6 путь в S-графе $\mathcal{B}$ состоит только из невырожденных вершин.

Назовем S-граф $\mathcal{B}$ *ацикличным*, если граф $K(\mathcal{B})$ является лесом (т. е. не содержит циклов). Пополненное биупорядоченное множество S назовем *ацикличным* если ацикличен каждый S-граф. Из введенных определений очевидным образом следует, что если $\mathcal{B}$ — ацикличный S-граф, то:

1. $\mathcal{B}$ связный, если и только если $K(\mathcal{B})$ — дерево;

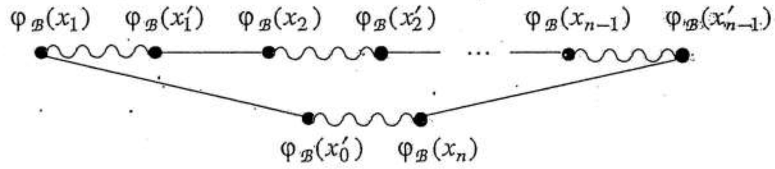
2. если $\mathcal{B}$ связный, то для любых узлов $X, Y \in K(\mathcal{B})$ путь в $\mathcal{B}$ из X в Y существует и единствен.

Лемма 7. *Пусть S ациклично и $X, Y, Z, T \in K(\mathcal{B})$ — такие узлы в связном S-графе $\mathcal{B}$, что $\varphi_{\mathcal{B}}(X) \approx \varphi_{\mathcal{B}}(Y) \approx \varphi_{\mathcal{B}}(Z) \approx \varphi_{\mathcal{B}}(T)$ в S, $(x'_0, \ldots, x_n)$ — путь в $\mathcal{B}$, соединяющий X с Y, а $(z'_0, \ldots, z_m)$ — путь в $\mathcal{B}$, соединяющий Z с T. Тогда:*

а) $\varphi_{\mathcal{B}}(x'_0) = \varphi_{\mathcal{B}}(x_n)$;

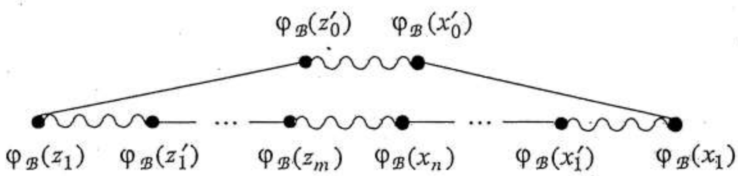
б) $\varphi_{\mathcal{B}}(z'_0) = \varphi_{\mathcal{B}}(x'_0)$.

Доказательство. а) Пусть $\varphi_{\mathcal{B}}(x'_0) \neq \varphi_{\mathcal{B}}(x_n)$. Тогда



— S-граф, что противоречит ацикличности S.

б) В силу а) $\varphi_{\mathcal{B}}(z'_0) = \varphi_{\mathcal{B}}(z_m)$. Поэтому из $\varphi_{\mathcal{B}}(z'_0) \neq \varphi_{\mathcal{B}}(x'_0)$ вытекает $\varphi_{\mathcal{B}}(z_m) \neq \varphi_{\mathcal{B}}(x_n)$ и



— S-граф, что снова противоречит ацикличности S.

Лемма 8. *Если S ациклично, S-граф $\mathcal{B}$ связный и $K(\mathcal{B})$ содержит по крайней мере три вершины, то существует узел $X \in K(\mathcal{B})$ такой, что:*

а) *$\varphi_{\mathcal{B}}(X) \not\approx \varphi_{\mathcal{B}}(Y)$ для произвольного узла $Y \in K(\mathcal{B})$;*

б) *X содержит более одной невырожденной вершины.*

Доказательство. а) Пусть $\mathcal{A} = (A^1, \ldots, A^m)$ — множество всех классов из $S/\approx$, для которых найдется узел $Y \in K(\mathcal{B})$ с $\varphi_{\mathcal{B}}(Y) \subset A^i$ для подходящего $i = \overline{1, m}$. Превратим $\mathcal{A}$ в ориентированный граф, считая, что есть стрелка $A^i \to A^j$, если в $\mathcal{B}$ имеются узлы X_i, Y_i, Z_j такие, что $\varphi_{\mathcal{B}}(X_i) \subset A^i$, $\varphi_{\mathcal{B}}(Y_i) \subset A^i$, $\varphi_{\mathcal{B}}(Z_j) \subset A^j$ и путь, ведущий из X_i в Y_i (в $K(\mathcal{B})$), проходит через Z_j.

Докажем, что $\mathcal{A}$ не содержит ориентированных циклов. В самом деле, пусть (после подходящей перенумерации) в нем есть цикл

$$\begin{array}{ccc} A^2 \to A^3 \to \ldots \to & A^{n-1} & \\ \uparrow & \downarrow & , \quad n \geq 1 . \\ A^1 \longleftarrow & A^n & \end{array}$$

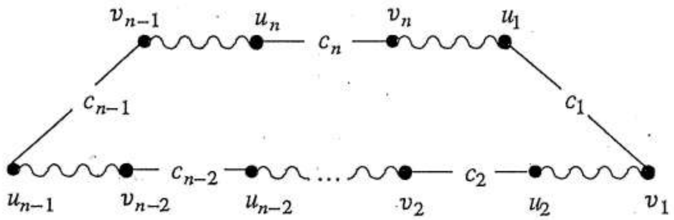
Это означает, что для любого $i = \overline{1, n}$ в S-графе $\mathcal{B}$ существует путь $(s_i | \mathbf{a}_i | t_i, p_i | \mathbf{b}_i | r_i)$ с $\varphi_{\mathcal{B}}(s_i), \varphi_{\mathcal{B}}(r_i) \in A^i$, $\varphi_{\mathcal{B}}(t_i), \varphi_{\mathcal{B}}(p_i) \in A^{i'}$ и $t_i - p_i$ в $\mathcal{B}$ (здесь $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ — некоторые пути в $\mathcal{B}$), $|$ обозначает сцепление путей, а

$$i' = \begin{cases} i+1, & i = \overline{1, n-1}; \\ 1, & i = n. \end{cases}$$

В силу леммы 7 $\varphi_{\mathcal{B}}(s_i) = \varphi_{\mathcal{B}}(r_i)$, а по определению пути $\varphi_{\mathcal{B}}(t_i) \sim \varphi_{\mathcal{B}}(p_i)$. Пусть теперь

$$(u_i|\mathbf{c}_i|v_i) = \begin{cases} (s_i\,|\,\mathbf{a}_i\,|\,t_i), & \text{esly } \varphi_{\mathcal{B}}(t_i) \neq \varphi_{\mathcal{B}}(s_{i'}); \\ (r_i\,|\,\bar{\mathbf{b}}_i\,|\,p_i), & \text{esly } \varphi_{\mathcal{B}}(t_i) = \varphi_{\mathcal{B}}(s_{i'}) \end{cases}$$

($\bar{\mathbf{b}}$ — это путь $\mathbf{b}$, проходимый в обратном направлении). Тогда в противоречие с ацикличностью S, S-графом будет



Итак, или $\mathcal{A}$ — несвязное объединение точек, или в $\mathcal{A}$ есть хотя бы один сток (т. е. точка, из которой не выходят стрелки) с действительно входящей в него стрелкой. В первом случае, поскольку число невырожденных вершин в узле не меньше числа ребер в $K(\mathcal{B})$, выходящих из этого узла, и два узла, принадлежащие этому классу эквивалентности в S, не могут быть соединены ребром (в $K(\mathcal{B})$), то в качестве искомого X можно взять любой узел, из которого выходит не менее двух ребер.

Во втором случае пусть $B \in \mathcal{A}$ — сток, $A \in \mathcal{A}$ и $A \to B$. Тогда в $K(\mathcal{B})$ есть путь вида Y_1 — ... — X — ... — Y_2, где Y_1, Y_2 принадлежат A, X принадлежит B и в X, по крайней мере, две вершины. Если $X' \in K(\mathcal{B})$, $X' \neq X$ — узел, также принадлежащий B, то он не может быть соединен непосредственно чертой с X в $K(\mathcal{B})$ и между ними есть узел, не принадлежащий B; следовательно, B — не сток. Итак, X искомый.

***Предложение* 3.** *Пополненное биупорядоченное множество S конечно и ациклично тогда и только тогда, когда $|\hat{C}(S)| < \infty$.*

Доказательство. Необходимость условий тривиальна. Предложение будет доказано, если мы покажем, что для конечного ациклического биупорядоченного множества S $\sup\{|\Gamma|\,|\,(\mathcal{B}, \Gamma, -, \sim, \varphi_{\mathcal{B}}) \in \hat{C}(S)\} < \infty$. Для этого определим функцию $\overline{\varphi}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{B} \to S/\approx$, $\overline{\varphi}_{\mathcal{B}} = \mathrm{can} \circ \varphi_{\mathcal{B}}$, и заметим, что для любого пути $(x_0', x_1, \ldots, x_n)$ в ациклическом S-графе $\mathcal{B}$ для всякого $i = \overline{1, n}$ существует не более одного $j = \overline{1, n}$ такого, что $\overline{\varphi}_{\mathcal{B}}(x_i) = \overline{\varphi}_{\mathcal{B}}(x_j)$, что следует из леммы 7. Поэтому длина пути, соединяющего две произвольные вершины $K(\mathcal{B})$, не превышает $2|S/\approx|$, и следовательно, так как $K(\mathcal{B})$ — дерево, то $|\Gamma/\approx|$ не превышает числа вершин в полном дереве высоты $2|S/\approx|$ на множестве $S/\approx$. Отсюда сразу получается ограниченность величины $|\Gamma|$.

4. Элементарные представления. Для цепного вектроида $\mathcal{V}$ положим $S = S(\mathcal{V})$, $\hat{C}(\mathcal{V}) = \hat{C}(S(\mathcal{V}))$. Вектроид $\mathcal{V}$ назовем *квазиконечным*, если $\hat{C}(\mathcal{V})$ — конечное множество и $\operatorname{def} \mathcal{V} \leq 1$. Далее покажем, что конечнопредставимый вектроид квазиконечен.

Зафиксируем треугольные базисы $\left(m_i^X\right)$ объектов X вектроида $\mathcal{V}$ и будем отождествлять $s \in S(\mathcal{V})$ с соответствующим вектором.

Представление M локально конечного пополненного биупорядоченного множества S назовем *элементарным,* если:

1. элементы матрицы M равны 0 или 1;
2. в каждой строке M стоит не более двух единиц, в каждом столбце — не более одной;
3. если в одной строке M есть две единицы, то они стоят в несравнимых столбцах.

В частности, полагая $S = S(\mathcal{V})$, получаем понятие *элементарного представления вектроида* $\mathcal{V}$ (в базисе $\left(m_i^X\right)$).

Каждой невырожденной по строкам матрице элементарного представления мы сопоставляем $S(\mathcal{V})$-граф:

– считая его вершины столбцами в матрице M принятого представления;

– считая его невырожденные вершины ненулевыми столбцами в матрице M;

– надписывая над каждой вершиной тот элемент из $S(\mathcal{V})$, которому принадлежит этот столбец;

– соединяя две вершины чертой, если эти столбцы содержат 1 в общей строке;

– соединяя две вершины волной, если столбцы эквивалентны.

Произвольному S-графу $\mathcal{B} \in \hat{C}(\mathcal{V})$ сопоставим невырожденное элементарное представление $R(\mathcal{B}) \in \operatorname{Rep} \mathcal{V}$. Для узла $X \in K(\mathcal{B})$ через V_X будем обозначать тот однозначно определенный объект вектроида $\mathcal{V}$, для которого $\varphi_{\mathcal{B}}(X) \subset V_X$. Теперь положим

$$\mathcal{X}_{\mathcal{B}} = \bigoplus_{X \in K(\mathcal{B})} V_X ,$$

$U_{\mathcal{B}}$ — подпространство в $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$, натянутое на векторы $\varphi_{\mathcal{B}}(x)$, если $x \in \Gamma$ и $\Gamma^-(x) = \varnothing$, и на векторы $\varphi_{\mathcal{B}}(x) + \varphi_{\mathcal{B}}(y) \in V_{\mathcal{B}^{\approx}(x)} \oplus V_{\mathcal{B}^{\approx}(y)}$, если $x - y$ в Γ, $i_{\mathcal{B}}$: $U_{\mathcal{B}} \to \mathcal{X}_{\mathcal{B}}$ — вложение подпространств. Мы получили представление $R(\mathcal{B}) = (U_{\mathcal{B}}, i_{\mathcal{B}}, \mathcal{X}_{\mathcal{B}})$, которое в базисе $S(\mathcal{V})$ вектроида $\mathcal{V}$ и в базисе $U_{\mathcal{B}}$, составленном из порождающих векторов, имеет требуемую в определении элементарного представления матрицу. При этом $R(\mathcal{B}) \in {}^i\operatorname{Rep} \mathcal{V}$, поскольку $i_{\mathcal{B}}$ — инъекция. Далее мы будем отождествлять вершину x S-графа $\mathcal{B}$ и вектор $\varphi_{\mathcal{B}}(x) \in V_{\mathcal{B}^{\approx}(x)}$. Заметим, что $\{x \mid x \in \mathcal{B}\}$ — базис пространства $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$.

R устанавливает биекцию между множеством классов изоморфизма $S(\mathcal{V})$-графов и множеством матриц невырожденных по строкам элементарных представлений вектроида $\mathcal{V}$ в данном базисе $S(\mathcal{V})$, рассматриваемых с точностью до перестановки строк и столбцов.

Конструкция биекции R показывает, что можно было бы считать всякий узел $\mathcal{B}^{\approx}(x)$ S-графа $\mathcal{B}$ состоящим из элементов множества $S \times \mathbb{N}$ вида (s, i), где $s \in S^{\approx}(\varphi_{\mathcal{B}}(x))$, а i является номером соответствующих столбцов в полосах, задаваемых элементами s, в некоторой матрице представления $R(\mathcal{B})$.

Пример 3. Вообще говоря, элементарное представление в одном базисе может быть не эквивалентно элементарному представлению в другом базисе. Пусть $\mathcal{W}$ — вектроид из примера 2 и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица представления $\mathcal{W}$, тогда в базисе m_1^X, m_2^X, m_3^X, m_4^X представление элементарно. Однако в базисе $\overline{m}_1^X = m_1^X - m_2^X$, $\overline{m}_2^X = m_2^X$, $\overline{m}_3^X = m_3^X$, $\overline{m}_4^X = m_4^X$ оно задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, не эквивалентной элементарной.

Пусть $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ — два цепных вектроида, $S_1 = S(\mathcal{V}_1)$, $S_2 = S(\mathcal{V}_2)$, и пусть f — инъективное отображение $S_1 \to S_2$ (не учитывающее структур на S_1, S_2). Предположим, что f индуцируется морфизмом $(F, \Phi) \in \mathcal{M}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$.

Для невырожденного S_1-графа $(\mathcal{B}, \Gamma, -, \sim, \varphi_{\mathcal{B}})$ определим невырожденный S_2-граф $(\mathcal{D}, \Delta, -', \sim', \varphi_{\mathcal{D}})$ следующим образом: $\Delta = \Gamma$, и для $x, y \in \Delta$:

$x -' y$, если $x - y$ (в Γ) и $f \circ \varphi_{\mathcal{B}}(x) \asymp f \circ \varphi_{\mathcal{B}}(y)$ (в S_2);

$x \sim' y$, если $x \sim y$ (в Γ) и $f \circ \varphi_{\mathcal{B}}(x) \sim f \circ \varphi_{\mathcal{B}}(y)$ (в S_2);

$\varphi_{\mathcal{D}}|_{\Delta} = f \circ \varphi_{\mathcal{B}}|_{\Gamma}$;

а затем восстановим $\mathcal{D}$, используя замечание 6. Очевидно, $f_*(\mathcal{B})$ — невырожденный S_2-граф.

Если f таково, что для $s, t \in S_1$ из $s \asymp t$ следует, что $f(s) \asymp f(t)$, то, как легко видеть, $\mathrm{Der}(F, \Phi)(R(\mathcal{B})) = R(f_*(\mathcal{B}))$.

***Пример* 4.** Пусть $\mathcal{B}$ — невырожденный S-граф.

а) Пусть $\mathcal{V}$ — вектроид, $S = S(\mathcal{V})$, $S^w = (S, \leq, \approx)$ — слабо пополненное чум (п. 1) и $w^s \colon S \to S^w$ — тождественное отображение несущих множеств. Построим по S^w вектроид $\mathcal{V}^w$ (ранга ≤ 1) и получим из w^s морфизм $W \in \mathcal{M}(\mathcal{V}, \mathcal{V}^w)$. Тогда $R\big(w_*^s(\mathcal{B})\big) = \mathrm{Der}(W)(R(\mathcal{B}))$.

б) Для слабо пополненного чум $(S, \leq, \approx)$ и $Q \subset S$ пусть $S^Q = (S, \leq, \approx')$ и $d^Q \colon S \to S^Q$ — тождественное отображение, а $x \sim' y$, если и только если $x \sim y$ и $x, y \notin Q$. Переход от S к S^Q с помощью d^Q (или морфизма соответствующих вектроидов $d^Q \colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^Q$) назовем разрывом волны для Q. Имеет место равенство $R\big(d_*^Q(\mathcal{B})\big) = \mathrm{Der}(\mathcal{D}^Q)(R(\mathcal{B}))$.

Получим для квазиконечного вектроида критерии неразложимости и подобия для элементарных представлений. Заметим, прежде всего, что если S-граф $\mathcal{B}$ несвязен, то представление $R(\mathcal{B})$ разложимо. Действительно, пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2$, тогда $R(\mathcal{B}) = R(\mathcal{B}_1) \oplus R(\mathcal{B}_2)$, что прямо следует из построения.

***Предложение* 4.** *Пусть вектроид $\mathcal{V}$ ацикличен, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ — S-графы, причем S-граф $\mathcal{B}$ связен.*

а) *Если $R(\mathcal{B}) \simeq R(\mathcal{D})$, то $\mathcal{B}$ изоморфен $\mathcal{D}$.*

б) *$R(\mathcal{B})$ неразложимо.*

Доказательство. Прежде всего, пример 4а) позволяет считать, что S — слабо пополненное чум. Доказательство предложения будет осуществляться индукцией по $\mathbf{d}(\mathcal{B})$ одновременно для всех слабо пополненных чум S и S-графов $\mathcal{B}$. Обозначим через $\mathbf{d}(\mathcal{B})$ число волн в Γ, т. е. $\mathbf{d}(\mathcal{B}) = |\{\{x, y\} \subseteq \Gamma \mid x \sim y\}|$. Тогда если найдется узел в $\mathcal{B}$, содержащий, по крайней мере, две невырожденные вершины, одна из которых принадлежит элементу из Q, то $\mathbf{d}(d_*^Q(\mathcal{B})) < \mathbf{d}(\mathcal{B})$. Если $\Gamma = \varnothing$, предложение очевидно (см. замечание 6). Поэтому будем считать $\Gamma \neq \varnothing$.

База индукции — $\mathbf{d}(\mathcal{B}) = 0$. В силу связности $\mathcal{B}$ имеет вид

$\mathcal{B}_1 =$  или $\mathcal{B}_2 =$  ,

где s, $t \in S$, и доказательство в этом случае легко получить, используя ацикличность S и теорему о замене $([1],\ 3.3, \text{b}))$.

Шаг индукции. В силу леммы 8 связный S-граф $\mathcal{B}$ или вообще не содержит вершин, соединенных волнами, т. е. $\mathbf{d}(\mathcal{B}) = 0$, или найдется узел, содержащий не менее двух вершин, и другого узла в $\mathcal{B}$, принадлежащего тому же классу эквивалентности в S, не существует. Выберем произвольную вершину x из этого узла и положим $Q = \{\varphi_{\mathcal{B}}(x)\}$. Получим $\mathcal{B}' = d_*^{Q}(\mathcal{B})$, $\mathcal{D}' = d_*^{Q}(\mathcal{D})$, причем $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ — связные $S(\mathcal{V}^{Q})$-графы, $R(\mathcal{B}') \simeq R(\mathcal{D}')$ (см. пример 4б)).

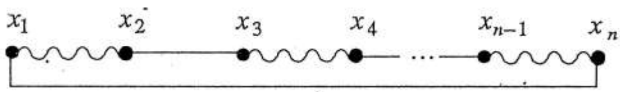
По индукционному предположению и однозначности разложения в прямую сумму в $\operatorname{Rep} \mathcal{V}^{Q}$ будет $\mathcal{D}' = \mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2$, $R(\mathcal{D}') = R(\mathcal{B}_1) \oplus R(\mathcal{B}_2)$, а $R(\mathcal{B}_1)$ и $R(\mathcal{B}_2)$ неразложимы. Поэтому $\mathcal{D} = \mathcal{B}$ или $\mathcal{D} = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2$. В последнем случае $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$ содержит два прямых слагаемых вида $V_{\mathcal{B}^{\approx}(x)}$, а $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$ — одно, чего не может быть. Если $R(\mathcal{B})$ разложимо, $R(\mathcal{B}) = (U_1, i_1, I_1) \oplus (U_2, i_2, I_2)$, то $\operatorname{Der}(\mathcal{D}^{Q})(U_1, i_1, I_1) \simeq R(\mathcal{B}_1)$, $\operatorname{Der}(\mathcal{D}^{Q})(U_2, i_2, I_2) \simeq R(\mathcal{B}_2)$, и снова в $I_1 \oplus I_2$ два прямых слагаемых вида $V_{\mathcal{B}^{\approx}(x)}$, а в $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$ такое слагаемое единственное. Итак, $R(\mathcal{B})$ неразложимо. Предложение доказано.

***Следствие* 1.** *Пусть вектроид $\mathcal{V}$ ацикличен и $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ — два произвольных $S(\mathcal{V})$-графа. Тогда из $R(\mathcal{B}) \simeq R(\mathcal{D})$, следует, что $\mathcal{B} \simeq \mathcal{D}$.*

Доказательство следует из 1а) предложения 4 и замечания 6.

***Пример* 5.** Пусть $\mathcal{V}$ — цепной вектроид, но $S(\mathcal{V})$ не ациклично. Докажем, что $\mathcal{V}$ *имеет бесконечно много неизоморфных неразложимых элементарных представлений.*

Пусть невырожденный $S = S(\mathcal{V})$-граф

$\mathcal{D} =$ 

есть цикл (отметим, что $n > 3$). Будем считать цикл $\mathcal{D}$ минимальным. Определим S-граф

$\mathcal{D}_m =$  ,

$\varphi_{\mathcal{D}_m}(y_i) = \varphi_{\mathcal{D}}(x_{\tilde{i}})$, где $1 \le \tilde{i} \le n$, $\tilde{i} \bmod n = i \bmod n$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ представление $R(\mathcal{D}_m) \in \operatorname{Rep} \mathcal{V}$ неразложимо (очевидно, тогда $R(\mathcal{D}_m) \ne R(\mathcal{D}_{m'})$, если $m \ne m'$). Пример 4а) позволяет считать, что S — слабо пополненное чум.

Для вершины y S-графа $\mathcal{D}_m$ обозначим через y' ту невырожденную вершину, для которой $y' \sim y$, а для $y \notin \{y_1, y_{m_n}\}$ через $\bar{y}$ будем обозначать вершину, для которой $\bar{y} - y$.

Пусть M — матрица представления $R(\mathcal{D}_m)$, $\dim U_{D_m} = l$, $\dim \mathcal{X}_{D_m} = k$. Введем на множестве невырожденных вершин Δ_m S-графа $\mathcal{D}_m$ частичный порядок $\preceq$. Пусть $y_i, y_j \in \Delta_m$. Если $\varphi_{\mathcal{D}_m}(y_i) \neq \varphi_{\mathcal{D}_m}(y_j)$, то положим $y_i \prec y_j$, если и только если $\varphi_{\mathcal{D}_m}(y_i) < \varphi_{\mathcal{D}_m}(y_j)$. Если же $\varphi_{\mathcal{D}_m}(y_i) = \varphi_{\mathcal{D}_m}(y_j)$, то для определения $\prec$ в этом случае будем строить две последовательности пар целых чисел (возможно, нулевой длины):

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_\alpha, b_\alpha), (a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1}), \ldots,$$
$$(c_1, d_1), \ldots, (c_\alpha, d_\alpha), (c_{\alpha+1}, d_{\alpha+1}), \ldots .$$

Если $j \in \{1, mn\}$, то построение не начинается и полагаем $y_i \prec y_j$; если $i \in \in \{1, mn\}$, то построение не начинается и полагаем $y_i \not\prec y_j$; если $i, j \notin \notin \{1, mn\}$, то $(y_{a_1}, y_{b_1}) = (y_i, y_j)$, $(y_{c_1}, y_{d_1}) = (\bar{y}_i, \bar{y}_j)$.

Далее продолжаем построение по индукции: если $(a_\alpha, b_\alpha) = (c_\alpha, d_\alpha) = = (0, 0)$, то построение заканчиваем и полагаем $y_i \prec y_j$; если $(a_\alpha, b_\alpha) = = (0, 0)$, то $(a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1}) = (0, 0)$, если $(c_\alpha, d_\alpha) = (0, 0)$, то $(c_{\alpha+1}, d_{\alpha+1}) = = (0, 0)$; если y'_{a_α} или y'_{c_α} лежит в $\{y_1, y_{mn}\}$, то построение заканчиваем и полагаем $y_i \not\prec y_j$; если $b_\alpha \in \{1, mn\}$, то $(a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1}) = (0, 0)$, если $d_\alpha \in \{1, mn\}$, то $(c_{\alpha+1}, d_{\alpha+1}) = (0, 0)$; в противном случае, если $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \neq (0, 0)$ и $y'_{a_\alpha}, y'_{b_\alpha} \neq y_1, y_{mn}$, то $(y_{a_{\alpha+1}}, y_{b_{\alpha+1}}) = \left((y'_{a_\alpha})^-, (y'_{b_\alpha})^-\right)$; если $(c_\alpha, d_\alpha) \neq (0, 0)$, и $y'_{c_\alpha}, y'_{d_\alpha} \neq y_1, y_{mn}$, то

$$(y_{c_{\alpha+1}}, y_{d_{\alpha+1}}) = \left((y'_{c_\alpha})^-, (y'_{d_\alpha})^-\right).$$

Из построения непосредственно видно, что из $y_i \preceq y_j \preceq y_i$ вытекает $y_i = y_j$.

Введем частичный порядок $\sqsubseteq$ на строках M. Для этого заметим, что множество строк M биективно множеству $K(\mathcal{D}_m) = \{\{y_1\}, \{y_2, y_3\}, \ldots \ldots, \{y_{mn-2}, y_{mn-1}\}, \{y_{mn}\}\}$. Будем считать, что $A \sqsubseteq B$, $A, B \in K(\mathcal{D}_m)$, если для любого $z \in B$ найдется $\tilde{z} \in A$ такой, что $\tilde{z} \preceq z$ (ср. [5, с. 13]).

Пусть $(\varphi, \xi) \in \operatorname{End}_{\operatorname{Rep} \mathcal{V}}(R(\mathcal{D}_m))$ — эндоморфизм и $(F = (f_{ij}), G = (g_{ij}))$ — его матричная запись, в частности, $FM = MG$. Тогда способом, аналогичным способу доказательства леммы 10, можно показать, что $f_{ij} \neq 0$ для какого-нибудь (φ, ξ), если и только если $i \sqsubseteq j$, $i, j = \overline{1, l}$, и $g_{ij} \neq 0$ для какого-нибудь (φ, ξ), если и только если $i \preceq j$, $i, j = \overline{1, k}$. Как следствие получаем, что $\sqsubseteq$ и $\preceq$ транзитивны, и следовательно, являются порядками.

Линейно упорядочим базисы $U_{\mathcal{D}_m}$ и $\mathcal{X}_{\mathcal{D}_m}$ так, чтобы $i \sqsubseteq j$ влекло $i \leq j$ (для $U_{\mathcal{D}_m}$), $i \preceq j$ влекло $i \leq j$ (для $\mathcal{X}_{\mathcal{D}_m}$). Это можно сделать, поскольку всякий порядок можно продолжить до линейного (см. [14], VII.8, теорема 8). При таком упорядочении базисов матрицы F и G являются, в частности, верхнетреугольными.

Предположив, что $R(\mathcal{D}_m)$ разложимо, найдем идемпотент (φ, ξ). Тогда для произвольного $\lambda \in k^*$ пара $(\varphi + \lambda \operatorname{id}_{U_{\mathcal{D}_m}}, \xi + \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{X}_{\mathcal{D}_m}})$ будет эндоморфизмом $R(\mathcal{D}_m)$. Произвольный ненулевой элемент матрицы $(F + \lambda E_l)M$ имеет вид $(\lambda + f_{ii})m_{it}$ или $\sum_{j \neq i} a_{ij} m_{jt}$; аналогично, каждый ненулевой элемент матрицы $M(G+\lambda E_k)$ имеет вид $m_{it}(\lambda+g_{tt})$ или $\sum_{j\neq i} m_{ij}g_{jt}$. Поскольку $(\lambda E_l+F)M = M(\lambda E_k+G)$ для всех $\lambda\in k^*$, то ненулевой элемент этой матрицы равен $(\lambda+f_{ii})m_{it} = m_{it}(\lambda+g_{tt})$ или $\sum_{j\neq i} a_{ij}m_{jt} = \sum_{j\neq i} m_{ij}g_{jt}$. Поэтому $(\overline{\varphi},\overline{\xi})\in \mathrm{End}(R(\mathcal{D}_m))$ ($\overline{\varphi}$ — диагональ матрицы φ).

Но тогда S-граф $\mathcal{D}_m$ несвязен, что неверно. Следовательно, представление $R(\mathcal{D}_m)$ неразложимо.

***Предложение* 5.** *Цепной вектроид $\mathcal{V}$ имеет конечное число классов изоморфизма неразложимых элементарных представлений тогда и только тогда, когда $|\hat{C}(\mathcal{V})|<\infty$.*

Доказательство очевидным образом следует из предложений 3, 4 и примера 5.

***Следствие* 2.** *Конечнопредставимый вектроид $\mathcal{V}$ квазиконечен.*

Доказательство следует из предложения 5.

5. Порядок на $C(S)$. Назовем *S-графом с отмеченной вершиной* пару $(\mathcal{B},x)$, где $\mathcal{B}$ — связный S-граф, а $x\in\mathcal{B}\backslash\Gamma$. Множество классов изоморфизма S-графов с отмеченной вершиной обозначим через $C(S)$. Будем считать, что пополненное биупорядоченное множество $\tilde{S}$ ациклично.

Пусть $(\mathcal{B},\Gamma,-,\sim,\varphi_{\mathcal{B}})$ — связный S-граф, и $x\in\mathcal{B}$ — его вершина. Определим (связные) S-графы $l_x\mathcal{B}$ и $r_x\mathcal{B}$ следующим образом.

а. Пусть $x\in\Gamma$ и $\Gamma^-(x)=\{y\}$. Удалим из Γ черту между x и y, т. е. введем на Γ отношение $-'$, считая что для $z_1,\ z_2\in\Gamma$ выполнено z_1-z_2' тогда и только тогда, когда z_1-z_2 и $\{z_1,z_2\}\neq\{x,y\}$. Тогда $(\mathcal{B},\Gamma\backslash\{x,y\},-',\sim,\varphi_{\mathcal{B}})$ — несвязный S-граф (в силу ацикличности S), имеющий две компоненты связности, одна из которых содержит вершину x (ее мы обозначим через $l_x\mathcal{B}$), другая содержит y (и обозначается $r_x\mathcal{B}$).

б. Пусть $x\in\Gamma$ и $\Gamma^-(x)=\varnothing$. Тогда $l_x\mathcal{B}=(\mathcal{B},\Gamma\backslash\{x\},-',\sim,\varphi_{\mathcal{B}})$, где $-'$ — ограничение на $\Gamma\backslash\{x\}$, а $r_x\mathcal{B}=(\mathcal{B}^{\approx}(x),\varnothing,\sim|_{\mathcal{B}^{\approx}(x)},\varphi_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{B}^{\approx}(x)})$.

в. Пусть $x\notin\Gamma$. Тогда $l_x\mathcal{B}=\mathcal{B}$, $r_x\mathcal{B}=\varnothing$.

Теперь для $(\mathcal{B},x)\in C(S)$ и $s\in S^{\sim}(\varphi_{\mathcal{B}}(x))$ введем производные $\partial_s^1(\mathcal{B},x)$ и $\partial_s^2(\mathcal{B},x)$. Пусть $y\in\mathcal{B}^{\sim}(x)$, $\varphi_{\mathcal{B}}(y)=s$. Положим

$$\partial_s^1(\mathcal{B},x) = (l_y\mathcal{B},y);$$

$$\partial_s^2(\mathcal{B},x) = \begin{cases} (r_y\mathcal{B},z), & \text{если } y\in\Gamma \text{ и } y-z;\\ 0, & \text{если } y\notin\Gamma;\\ 1, & \text{если } y\in\Gamma,\ \Gamma^-(y)=\varnothing.\end{cases}$$

Для вершины $x'\in\mathcal{B}^{\sim}(x)$ обозначим $\partial_{x'}^{\cdot}(\mathcal{B},x)=\partial_{\varphi_{\mathcal{B}}(x')}^{\cdot}(\mathcal{B},x)$; для S-графа $(\mathcal{D},y)$ с $\varphi_{\mathcal{D}}(y)\approx\varphi_{\mathcal{B}}(x)$ и вершины $y'\in\mathcal{D}^{\approx}(y)$, $\varphi_{\mathcal{D}}(y')\sim\varphi_{\mathcal{B}}(x)$, будем писать $\partial_{y'}^{\cdot}(\mathcal{B},x)=\partial_{\varphi_{\mathcal{D}}(y')}^{\cdot}(\mathcal{B},x)$.

Введем на $C(S)$ отношение $\leq$. Прежде всего добавим в $C(S)$ наибольший элемент 1 и наименьший элемент 0 (отношение $\leq$ на $C(S)$ индуцируется отношением $\leq$ на $C(S)\amalg\{0,1\}$). Возьмем два S-графа $(\mathcal{B},x)$, $(\mathcal{D},y)\in$

$\in C(S)$. Отношение $\leq$ определяется индукцией по общему числу вершин в обоих S-графах $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$.

а. В случае $\varphi_{\mathcal{B}}(x) \nsim \varphi_{\mathcal{D}}(y)$ положим $(\mathcal{B}, x) \nsim (\mathcal{D}, y)$;

б. В случае $\varphi_{\mathcal{B}}(x) \lhd \varphi_{\mathcal{D}}(y)$ положим $(\mathcal{B}, x) \leq (\mathcal{D}, y)$;

в. Если $\varphi_{\mathcal{B}}(x) = \varphi_{\mathcal{D}}(y) = s$ и $s \ntriangleleft s$, то $(\mathcal{B}, x) \leq (\mathcal{D}, y)$ тогда и только тогда, когда для любого $t \in S^{\sim}(s)$ справедливо неравенство $\partial_t^2(\mathcal{B}, x) \leq \partial_t^2(\mathcal{D}, y)$;

г. Если $s_1 = \varphi_{\mathcal{B}}(x) \Rightarrow s_2 = \varphi_{\mathcal{D}}(y)$, то $(\mathcal{B}, x) \leq (\mathcal{D}, y)$ тогда и только тогда, когда найдутся $t_1,\ t_2 \in S$ такие, что $s_1 \Rightarrow s_2$, $t_1 \Rightarrow t_2$, $s_1 \sim t_1$, $s_2 \sim t_2$ и выполнено хотя бы одно из трех условий:

г1) $\partial_{t_1}^2(\mathcal{B}, x) \leq \partial_{t_2}^2(\mathcal{D}, y)$;

г2) $\partial_{t_1}^1(\mathcal{B}, x) \leq \partial_{t_2}^2(\mathcal{D}, y)$;

г3) $\partial_{t_1}^2(\mathcal{B}, x) \leq \partial_{t_2}^1(\mathcal{D}, y)$.

Причину появления отношения $\leq$ объясняет следующая конструкция. Пусть $\mathcal{V}$ — цепной вектроид и $S = S(\mathcal{V})$. Определим *спектроид элементарных представлений с выделенным нулевым столбцом* El. Объектами спектроида El объявляются элементы множества $C(\mathcal{V}) = C(S(\mathcal{V}))$; для $(\mathcal{B}, x)$, $(\mathcal{D}, y) \in C(\mathcal{V}) = \mathrm{El}$ множеством морфизмов $\mathrm{El}((\mathcal{B}, x), (\mathcal{D}, y))$ служат те морфизмы $(\varphi, \xi) \in \operatorname{Rep} \mathcal{V}(R\mathcal{B}, R\mathcal{D}))$, для которых $x\xi \in U_{\mathcal{D}} + yk$ (отметим, что $y \notin U_{\mathcal{D}}$, $U_{\mathcal{D}} + yk$ — подпространство в $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}$). Очевидно, El — категория, поскольку $\mathrm{El}((\mathcal{B}, x), (\mathcal{D}, y)) \circ \mathrm{El}((\mathcal{D}, y), (\mathcal{E}, z)) \subset \mathrm{El}((\mathcal{B}, x), (\mathcal{E}, z))$.

***Лемма* 9.** *Если вектроид* $\mathcal{V}$ *ацикличный, то* El *— спектроид.*

Доказательство. Неразложимость объекта $(\mathcal{B}, x) \in \mathrm{El}$ следует из неразложимости представления $R(\mathcal{B})$, доказанной в п. б) предложения 4.

Покажем, что различные объекты категории El не изоморфны. Пусть $(\mathcal{B}, x)$, $(\mathcal{D}, y) \in \mathrm{El}$. Если $\mathcal{B} \neq \mathcal{D}$, то $R(\mathcal{B}) \neq R(\mathcal{D})$ в силу п. а) предложения 4, и значит, $(\mathcal{B}, x) \neq (\mathcal{D}, y)$. Если же $\mathcal{B} = \mathcal{D}$, но $x \neq y$, то изоморфизм $(\varphi, \xi)\colon (\mathcal{B}, x) \to (\mathcal{D}, x)$ индуцирует изоморфизм $(\varphi, \xi)\colon R(\mathcal{B}') \simeq R(\mathcal{D}')$, где $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}, \Gamma \bigcup \{x\}, -, \sim, \varphi_{\mathcal{B}})$, $\mathcal{D}' = (\mathcal{B}, \Gamma \bigcup \{y\}, -, \sim, \varphi_{\mathcal{B}})$ (напомним, что $\mathcal{B} = \mathcal{D}$, а $x,\ y \notin \Gamma$; $-$ на $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{D}'$ — тривиально продолженное отношение $-$ на Γ). Таким образом, достаточно доказать, что S-графы $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{D}'$ не изоморфны, если $x \neq y$.

Если $\mathcal{B}' \simeq \mathcal{D}'$, то $\varphi_{\mathcal{B}}(x) = \varphi_{\mathcal{B}}(y)$. По лемме 8 в $K(\mathcal{B})$ существует узел R такой, что для любого узла $Q \in K(\Gamma)$ $\varphi_{\mathcal{B}}(R) \neq \varphi_{\mathcal{B}}(Q)$. Из связности $\mathcal{B}$ вытекает существование путей $(x_0', x_1, x_1', \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}', x_n)$ и $(y_0', y_1, y_1', \ldots$ $\ldots, y_{m-1}, y_{m-1}', y_m)$, соединяющих $\mathcal{B}^{\approx}(x)$ с R и $\mathcal{B}^{\approx}(y)$ с R соответственно, так что $x_0' \approx x$, $y_0' \approx y$, $x_n \in R$, $y_m \in R$.

Если $f\colon \mathcal{B}' \to \mathcal{D}'$ — изоморфизм, то для любого $z \in R \bigcap \Gamma$ имеем $f(r_z \mathcal{B}') \subset r_z \mathcal{D}'$, что легко следует из тождественности $f|R$ и того, что f переводит путь, соединяющий какой-либо узел с R, в путь, соединяющий образ этого узла с R. Поэтому f индуцирует изоморфизм $r_z \mathcal{B}' \simeq r_z \mathcal{D}'$ для любого $z \in \Gamma \bigcap R$.

Если $x_n = y_m$, то, переходя к рассмотрению S-графа $r_{x_n}\mathcal{B}$, можем считать, что $x_n \neq y_m$. Если $x_n \neq y_m$, то по доказанному $r_{y_m}\mathcal{B}' \simeq r_{y_m}\mathcal{D}'$, что не верно, так как x — невырожденная вершина в $r_{y_m}\mathcal{D}'$ и вырожденная в $r_{y_m}\mathcal{B}'$. Лемма доказана.

Над категорией El имеется одномерный (неточный) модуль N, $N(\mathcal{B}, x) = a_{\mathcal{B},x}k$ $(\simeq U_{\mathcal{B}} + xk/U_{\mathcal{B}})$; каждый морфизм $(\varphi, \xi) \in \mathrm{El}((\mathcal{B}, x), (\mathcal{D}, y))$ индуцирует линейное отображение $\overline{\xi}: N(\mathcal{B}, x) \to N(\mathcal{D}, y)$, что и задает на N структуру El-модуля. Корректность определения очевидна.

Пусть $\overline{\mathrm{El}} = \mathrm{El}/\mathrm{Ann}_{\mathrm{El}}N$.

***Лемма* 10.** *Пусть вектроид $\mathcal{V}$ квазиконечен. Тогда* $\overline{\mathrm{El}}((\mathcal{B}, x), (\mathcal{D}, y)) \neq 0$, *если и только если* $(\mathcal{B}, x) \leq (\mathcal{D}, y)$.

Доказательство. 1. Для S-графа $\mathcal{B}$ пусть $\{\tau_z, z \in \mathcal{B}\}$ обозначает базис пространства $D\mathcal{X}_{\mathcal{B}} (= \mathrm{mod}\, k(\mathcal{X}_{\mathcal{B}}, k))$, двойственный к базису $\{z, z \in \mathcal{B}\}$. Тогда п. 1 доказательства леммы 2 показывает, что для $x \in \mathcal{B}$ и $y \in \mathcal{D}$ выполнено $\varphi_{\mathcal{B}}(x) \leq \varphi_{\mathcal{D}}(y)$, если и только если найдется $\xi \in \mathcal{V}(V_{\mathcal{B}^{\simeq}(x)}, V_{\mathcal{D}^{\simeq}(y)})$ такой, что $(x)\xi\tau_y \neq 0$.

В частности, если $\overline{\mathrm{El}}((\mathcal{B}, x), (\mathcal{D}, y)) \neq 0$, то $\varphi_{\mathcal{B}}(x) \leq \varphi_{\mathcal{D}}(y)$.

2. Пусть $s = \varphi_{\mathcal{B}}(x) \lhd t = \varphi_{\mathcal{D}}(y)$. Тогда существует морфизм $\xi \in \mathcal{V}(V_{\mathcal{B}^{\simeq}(x)}, V_{\mathcal{D}^{\simeq}(y)})$ такой, что $x\xi = y$. Поэтому $0 \neq \overline{(0, \xi)} \in \overline{\mathrm{El}}((\mathcal{B}, x), (\mathcal{D}, y))$.

3. Пусть $s = \varphi_{\mathcal{B}}(x) = \varphi_{\mathcal{D}}(y)$ и $s \ntriangleleft s$. Докажем, что если $(\mathcal{B}, x) \leq (\mathcal{D}, y)$, то $\overline{\mathrm{El}}((\mathcal{B}, x), (\mathcal{D}, y)) \neq 0$. В силу определения $\leq$ для всякого $t \in S^{\sim}(s)$ справедливо $\partial_t^2(\mathcal{B}, x) \leq \partial_t^2(\mathcal{D}, y)$; в частности, для произвольной невырожденной вершины $x' \in \Gamma^{\sim}(x)$ существует единственная невырожденная вершина $y'_{x'} \in \Delta^{\sim}(y)$ с $\varphi_{\mathcal{B}}(x') = \varphi_{\mathcal{D}}(y'_{x'})$. Положим $R_x = \left\{x' \in \Gamma^{\sim}(x) \,\middle|\, \partial^2_{x'}(\mathcal{B}, x) \neq 1\right\}$.

По индукционному предположению можно считать, что у нас уже есть ненулевые морфизмы $f_{x'} = \overline{(y_{x'}, \xi_{x'})} \in \overline{\mathrm{El}}\left(\partial^2_{x'}(\mathcal{B}, x), \partial^2_{x'}(\mathcal{D}, y)\right)$, заданные для всякого $x' \in R_x$. Разложим векторные пространства

$$\mathcal{X}_{\mathcal{B}} = V_{\mathcal{B}^{\simeq}(x)} \oplus \left(\bigoplus_{x' \in R_x} \mathcal{X}_{\partial^2_{x'}(\mathcal{B}, x)}\right),$$

$$\mathcal{X}_{\mathcal{D}} = V_{\mathcal{D}^{\simeq}(y)} \oplus \left(\bigoplus_{x' \in R_x} \mathcal{X}_{\partial^2_{x'}(\mathcal{D}, y)}\right) \oplus \left(\bigoplus_{y' \in R_y,\, y' \neq y'_{x'}} \mathcal{X}_{\partial^2_{x'}(\mathcal{D}, y)}\right).$$

Определим морфизм ξ (учитывая, что $V_{\mathcal{B}^{\simeq}(x)} = V_{\mathcal{D}^{\simeq}(y)}$):

$$\xi = \begin{pmatrix} 1_{V_{\mathcal{B}^{\simeq}(x)}} & 0 & 0 \\ 0 & \bigoplus\limits_{x' \in R_x} \xi_{x'} & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{X}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{X}_{\mathcal{D}}$$

и зададим $\varphi: U_{\mathcal{B}} \to U_{\mathcal{D}}$ как единственное линейное отображение, для которого $(\varphi, \xi) \in \mathrm{Rep}\, \mathcal{V}(R(\mathcal{B}), R(\mathcal{D}))$. Непосредственно проверяется, что $0 \neq \overline{(\varphi, \xi)} \in \overline{\mathrm{El}}$.

Пусть теперь $\overline{\mathrm{El}}((\mathcal{B},x),(\mathcal{D},y)) \ni \overline{(\varphi,\xi)} \neq 0$. Докажем, что $(\mathcal{B},x) \leq (\mathcal{D},y)$, т. е. для любого $t \in S^{-}(s)$ выполнено $\partial_t^2(\mathcal{B},x) \leq \partial_t^2(\mathcal{D},y)$. Обозначим через $x' \in \mathcal{B}^{\approx}(x)$ и $y' \in \mathcal{D}^{\approx}(y)$ те вершины, для которых $\varphi_{\mathcal{B}}(x') = \varphi_{\mathcal{D}}(y') = t$, при этом можно считать, что $\partial_t^2(\mathcal{D},y) \neq 1$. Кроме того, положим

$$\alpha = \begin{cases} \bar{x}', & \text{если } \Gamma^{-}(x') = \{\bar{x}'\}; \\ 0, & \text{если } \Gamma^{-}(x') = \varnothing. \end{cases}$$

Пусть $\bar{\xi} \in \mathcal{V}(V_{\mathcal{B}^{\approx}(x)}, V_{\mathcal{D}^{\approx}(y)})$ — компонента морфизма ξ. Отметим, что ξ обратим. Если $\partial_t^2(\mathcal{D},y) = 0$, то $\tau_{y'}|U_{\mathcal{D}} = 0$. Если же при этом $\partial_t^2(\mathcal{D},y) \neq 0$, то $x'+\alpha \in U_{\mathcal{B}}$ и $0 \neq (x'+\alpha)\bar{\xi}\tau_{y'} = (x'+\alpha)\varphi\tau_{y'}$. Но $(x'+\alpha)\varphi \in U_{\mathcal{D}}$. Получили противоречие, следовательно $\partial_t^2(\mathcal{B},x) = 0$.

Если же $\partial_t^2(\mathcal{D},y) \neq 0$, то пусть λ — компонента морфизма ξ, переводящая $\mathcal{X}_{\partial_t^2(\mathcal{B},x)}$ в $\mathcal{X}_{\partial_t^2(\mathcal{D},y)}$, и $\eta: U_{\partial_t^2(\mathcal{B},x)} \to \mathcal{X}_{\partial_t^2(\mathcal{D},y)}$ — такое однозначно определенное линейное отображение, что $(\eta,\lambda) \in \mathrm{El}\left(\partial_t^2(\mathcal{B},x), \partial_t^2(\mathcal{D},y)\right)$. Докажем, что $\overline{(\eta,\lambda)} \neq 0$ в $\overline{\mathrm{El}}$.

Для этого достаточно показать, что $x'\lambda\tau_{\bar{y}'} \neq 0$. Имеем $0 \neq (x'+\bar{x}')\xi\tau_{y'} = (x'+\bar{x}')\varphi\tau_{y'}$. Поскольку для $\beta \in U_{\mathcal{D}}$ условия $\beta\tau_{y'} \neq 0$ и $\beta\tau_{\bar{y}'} \neq 0$ равносильны (в силу того, что $\varphi_{\mathcal{D}}(y') \asymp \varphi_{\mathcal{D}}(\bar{y}')$ и п. 1 доказательства), то $0 \neq (x'+\bar{x}')\xi\tau_{\bar{y}'}$. При этом $\varphi_{\mathcal{B}}(x') = \varphi_{\mathcal{D}}(y') \asymp \varphi_{\mathcal{D}}(\bar{y}')$, и снова в силу п. 1 доказательства $(x'+\bar{x}')\xi\tau_{\bar{y}'} = \bar{x}'\xi\tau_{\bar{y}'}$. Итак, $0 \neq \bar{x}'\xi\tau_{\bar{y}'}$ и $0 \neq \overline{(\eta,\lambda)} \in \overline{\mathrm{El}}$.

4. $s = \varphi_{\mathcal{B}}(x) \Rightarrow t = \varphi_{\mathcal{D}}(y)$. Доказательство проводится аналогично доказательству в п. 3, с учетом того, что в этом случае найдется морфизм $\xi \in \mathcal{V}(V_{\mathcal{B}^{\approx}(x)}, V_{\mathcal{D}^{\approx}(y)})$ ранга 2, для которого $x\xi\tau_y \neq 0$.

***Следствие* 3.** *Для квазиконечного вектроида $\mathcal{V}$ отношение $\leq$ на $C(\mathcal{V})$ является частичным порядком и спектроид, построенный по чум $C(\mathcal{V})$, изоморфен спектроиду $\overline{\mathrm{El}}$.*

***Замечание* 9.** Чум $C(\mathcal{V})$ можно определить и для цепного вектроида $\mathcal{V}$, не предполагая, что $\operatorname{def}\mathcal{V} \leq 1$. В этом случае понятия $S(\mathcal{V})$-графа и элементарного представления остаются прежними, но в п. г) определения порядка $\leq$ на $C(\mathcal{V})$ появляется требование, чтобы ребра $s_1 \Rightarrow s_2$ и $t_1 \Rightarrow t_2$ были эквивалентными (см. замечание 4).

6. Мультиэлементарные представления. В этом пункте $\mathcal{V}$ — цепной вектроид. Пусть $\mathcal{U}$ — еще один вектроид, который мы тоже будем считать цепным. Тогда заданы пополненные биупорядоченные множества $S(\mathcal{U})$ и $S(\mathcal{V})$, а также множество $C(\mathcal{V})$ $S(\mathcal{V})$-графов. Имеется отображение $C(\mathcal{V}) \to \hat{C}(\mathcal{V})$, $(\mathcal{B},x) \mapsto \mathcal{B}$; его композицию с отображением $R: \hat{C}(\mathcal{V}) \to \operatorname{Rep}\mathcal{V}$ обозначим P.

Предположим, что задано отображение $\lambda: S(\mathcal{U}) \to C(\mathcal{V})$. Тогда определено отображение объектов $\operatorname{Ex}(\lambda)$: $\operatorname{Ob}\operatorname{Rep}\mathcal{U} \to \operatorname{Ob}\operatorname{Rep}\mathcal{V}$, сопоставляющее представлению $(W,g,Z) \in \operatorname{Rep}\mathcal{U}$ с матрицей $M(g)$ представление $\operatorname{Ex}(\lambda)g$ вектроида $\mathcal{V}$ с матрицей

$$
M(\mathrm{Ex}(\lambda)g) = \begin{array}{c}
\quad s_1, s_2, \ldots, s_t \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\left(\begin{array}{c|ccc}
M(g) & & 0 & \\
\hline
 & \boxed{\overline{M}(\lambda(s_1))} & & \\
0 & & \ddots & \\
 & & & \boxed{\overline{M}(\lambda(s_n))}
\end{array}\right)
\end{array},
$$

где $\overline{M}(\lambda(s_i))$ — матрица элементарного представления $P(\lambda(s))$ с отброшенным (нулевым) столбцом, отвечающим выделенной вершине $S(\mathcal{V})$-графа $\lambda(s_i)$, вместо которого в матрице $M(\mathrm{Ex}(\lambda)g)$ стоит столбец матрицы $M(g)$, отмеченный элементом s_i.

В случае, когда отображение λ удовлетворяет условиям:

1. если $t_1, t_2 \in S(\mathcal{U})$ и $t_1 \approx t_2$, то $P\lambda(t_1) \simeq P\lambda(t_2)$;

2. если $\lambda(t_1) < \lambda(t_2)$ (т. е. $\lambda(t_1) \neq \lambda(t_2)$ и $\overline{\mathrm{El}}(\lambda(t_1), \lambda(t_2)) \neq 0$), то $t_1 < t_2$,

представление $\mathrm{Ex}(\lambda)g$ будем называть *λ-расширением представления* g. В частности, пусть $\mathcal{V}$ — квазиконечный вектроид, тогда на $C(\mathcal{V})$ определен частичный порядок $\leq$ (см. п. 5), и пусть $\mathcal{U}$ — одномерный вектроид, построенный по $C(\mathcal{V})$; для него $S(\mathcal{U}) = (C(\mathcal{V}), \leq, \leq, \Delta)$, где Δ — диагональ. Образ отображения $\mathrm{Mul} = \mathrm{Ex}(\mathrm{id}_{C(\mathcal{V})})$: $\mathrm{Ob}\,\mathrm{Rep}\,\mathcal{U} = \mathrm{Ob}\,\mathrm{Rep}\,C(\mathcal{V}) \to \mathrm{Ob}\,\mathrm{Rep}\,\mathcal{V}$ состоит из представлений вектроида $\mathcal{V}$, которые мы назовем *мультиэлементарными представлениями.*

***Пример* 6** (не мультиэлементарного представления). Пусть

$$
E = \begin{tikzcd}
c\,\bullet & \bullet\, p \arrow[d] & \\
a\,\circ \arrow[r, Rightarrow] & \circ\, b & \mathrm{I} \\
a'\,\circ \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & \circ\, b' & \\
q\,\bullet & \bullet\, d & \mathrm{II}
\end{tikzcd}
\qquad
E = \begin{tikzcd}
a'\,\circ \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & \circ\, b' & \\
q\,\bullet & \bullet\, d & \mathrm{I} \\
c\,\bullet & \bullet\, p \arrow[d] & \\
a\,\circ \arrow[r, Rightarrow] & \circ\, b & \mathrm{II}
\end{tikzcd}
$$

$$
a \sim a',\ b \sim b',\ \mathrm{I} \lhd \mathrm{II} \qquad\qquad a \sim a',\ b \sim b',\ \mathrm{I} \lhd \mathrm{II}
$$

— пополненные биупорядоченные множества, $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(E)$, $\mathcal{E}^* = \mathrm{Vect}(E^*)$ (см. п. 2). Тогда E и E^* естественным образом могут рассматриваться как бикомпонентные пополненные чум в смысле [11, 12]. В этих работах показано, что вектроиды $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$ конечнопредставимы и каждый из них допускает единственное с точностью до изоморфизма точное неразложимое представление, а именно: представление g с матрицей

$$
M(g) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

(столбцы матрицы соответствуют a, b, c, p, a', b', d, q). Представление g не мультиэлементарно. Будем далее называть его *исключительным представлением* (E или E^*).

Предложение 6. *Пусть* $\mathcal{V}$ — *квазиконечный вектроид, и* g_1, g_2 — *представления частично упорядоченного множества* $C(\mathcal{V})$. *Тогда*:

1. $\mathrm{Mul}(g_1 \oplus g_2) \simeq \mathrm{Mul}(g_1) \oplus \mathrm{Mul}(g_2)$.

2. *Если* $g_1 \simeq g_1$ (*в* $\mathrm{Rep}\, C(\mathcal{V})$), *то* $\mathrm{Mul}(g_1) \simeq \mathrm{Mul}(g_2)$ (*в* $\mathrm{Rep}\, \mathcal{V}$).

Доказательству предложения мы предпошлем некоторую конструкцию. Пусть $(A, M) \in \mathcal{M}$ — модуль над агрегатом, $\mathrm{Der}(A, M) = (\mathrm{Rep}\, M, E_M)$ — производный модуль. Предположим, что задан еще один модуль над агрегатом $(B, N) \in \mathcal{M}$ и морфизм (F, Φ): $(B, N) \to \mathrm{Der}(A, M) \in \mathrm{Mor}\, \mathcal{M}$. В этой ситуации можно определить морфизм (I, Π): $\mathrm{Der}(B, N) \to \mathrm{Der}(A, M)$, где I: $\mathrm{Rep}\, N \to \mathrm{Rep}\, M$ — функтор, который на представлении $(W, g, Z) \in \mathrm{Rep}\, N$ с $F(Z) = (V, f, X)$ принимает значение

$$I(W, g, Z) = \left(W \oplus V, \begin{pmatrix} g \circ \Phi(Z) \\ f \end{pmatrix}, X\right),$$

а Π: $E_N \to I^* E_M$ — гомоморфизм B-модулей, определенный с помощью диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E_N(W, g, Z) & \xrightarrow{\Pi(W, g, Z)} & E_M(I(W, g, Z)) = E_M(FZ) \\ \| & & \| \\ N(Z) & \xrightarrow{\qquad \Phi(Z) \qquad} & M(FZ) \end{array}$$

При некоторых дополнительных условиях (которые легко явно выписать) $I(W, g, Z)$ будет λ-расширением представления g.

Доказательство *предложения.* Пусть (B, N) — модуль над агрегатом, полученный из модуля над спектроидом (El, N), т. е. $B = \oplus \mathrm{El}$, см. п. 5. Определим морфизм (F, Φ): $(B, N) \to \mathrm{Der}(\mathcal{V})$, полагая $F(\mathcal{B}, x) = R(\mathcal{B})$:

$$\Phi(\mathcal{B}, x)\colon N(\mathcal{B}, x) = a_{\mathcal{B},x} k \to \mathcal{X}_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{V}}(U_{\mathcal{B}}, i_{\mathcal{B}}, \mathcal{X}_{\mathcal{B}}),$$

$$a_{\mathcal{B},x} \Phi(\mathcal{B}, x) = x \in \mathcal{X}_{\mathcal{B}}.$$

Применив к этим данным нашу конструкцию, получим функтор I: $\mathrm{Rep}\, N \to \mathrm{Rep}\, \mathcal{V}$. С другой стороны, категория $\mathrm{Rep}\, N$ естественным образом эпивалентна категории $\mathrm{Rep}\, C(\mathcal{V})$ (см. следствие 3). Легко видеть, что для представления $g \in C(\mathcal{V})$ любой его прообраз f в $\mathrm{Rep}\, N$ имеет ту же матрицу, что и g, а $I(f)$ — это представление $\mathrm{Mul}(g)$. Из этих рассмотрений предложение следует тривиально.

Если $\dim \mathcal{V} = 2$, то частично упорядоченное множество $C(\mathcal{V})$ совпадает (по самому своему определению) с частично упорядоченным множеством „шатающихся последовательностей" $\mathrm{St}(\mathcal{V})$, определенным в ([1], 5.8). В [7–9] доказано, что вектроид $\mathcal{V}$ размерности ≤ 2 конечнопредставим тогда и только тогда, когда конечнопредставимо чум $C(\mathcal{V})$. В этом случае, однако, не все неразложимые представления мультиэлементарны [11, 12].

***Гипотеза* 1.** *Вектроид* $\mathcal{V}$ *конечнопредставим тогда и только тогда, когда* $\mathcal{V}$ *цепной,* $\operatorname{def} \mathcal{V} \le 1$, $\dim \mathcal{V} \le 3$ *и чум* $C(\mathcal{V})$ *конечнопредставимо.*

***Гипотеза* 2.** *Пусть вектроид* $\mathcal{V}$ *конечнопредставим и* g *— его точное представление. Тогда для* g *выполнено одно из трех взаимоисключающих условий:*

g *разложимо;*

g *неразложимо и мультиэлементарно;*

g *—* λ*-расширение исключительного представления* E *или* E^* *для подходящего* $\lambda: E \to C(\mathcal{V})$ или $\lambda: E^* \to C(\mathcal{V})$ *(и в частности,* g *неразложимо).*

Авторы признательны Питеру Габриэлю, в беседах с которым родилась идея написания этой статьи, и многие замечания которого учтены в ее окончательном варианте.

1. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras // Encyklopaedia of Math. Sci. Vol. 73. Algebra 8. – New York: Springer-Verlag, 1992. – 177 p.
2. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Категорные матричные задачи и проблема Брауэра–Трелла. – Киев, 1973. – 100 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 09.73).
3. *Gabriel P., Nazarova L. A., Roiter A. V., Sergeichuk V. V., Vossieck D.* Tame and wild subspace problems // Укр. мат. журн. – 1993. – **46**, № 3. – С. 313–352.
4. *Roiter A. V., Sergeichuk V. V.* Existence of a multiplicative basis for a finitely spaced module over an aggregate // Там же. – 1994. – **46**, № 5. – С. 567–579.
5. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. семинаров Ленингр. от-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **28**. – С. 5–31.
6. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Там же. – С. 32–41.
7. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления биинволютивных частично упорядоченных множеств. – Киев, 1991. – 32 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 91.34).
8. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления биинволютивных частично упорядоченных множеств, II. – Киев, 1994. – 72 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 94.02).
9. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления и формы слабо пополненных частично упорядоченных множеств // Линейная алгебра и теория представлений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 19–54.
10. *Vossieck D.* Représentations de bifoncteurs et interprétation en termes de modules // Comptes-Rendus Acad. Sc. Paris. – 1988. – **307**. – P. 713–716.
11. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления бикомпонентных пополненных множеств. – Киев, 1987. – 24 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.05).
12. *Nazarova L. A., Roiter A. V.* Representations of bipartite completed posets // Comment. Helv. Math. – 1988. – **63**. – С. 498–526.
13. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – М.: Наука, 1984. – 568 с.
14. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. – М.: Мир. – 1970. – 416 с.

Получено 29.12.94