УДК 519.21

**В. В. Булдыгин,** д-р физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т),
**В. В. Заяц,** канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ОЦЕНОК КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ*

Conditions for an empirical correlogram of a stationary Gaussian process to weakly converge to some Gaussian process in a space of continuous functions are considered. For a wide class of stationary Gaussian processes with square integrable spectral density, it is proved that such a convergence takes place.

Розглянуто умови слабкої збіжності емпіричної корелограми стаціонарного гауссова процесу до деякого гауссова процесу в просторі неперервних функцій. Встановлено, що для широкого класу стаціонарних гауссових процесів з інтегровною у квадраті спектральною щільністю така збіжність має місце.

**Введение.** Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ — базовое вероятностное пространство; $X = (X(t), t \geq 0)$ — измеримый сепарабельный действительнозначный гауссовский случайный стационарный процесс с нулевым средним и непрерывной корреляционной функцией $B(h) = B(|h|) = EX(t)X(t+h), h \in R$. В дальнейшем предполагаем, что существует спектральная плотность $f = (f(\lambda), \lambda \in R = (-\infty, \infty))$ процесса $X$, интегрируемая в квадрате $(f \in L_2(R))$, т. е.

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\, d\lambda < \infty. \tag{1}$$

По определению спектральной плотности $f$ интегрируема $(f \in L_1(R))$ и согласно теореме Бохнера – Хинчина

$$B(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda h} f(\lambda)\, d\lambda, \quad h \in R.$$

Так как процесс $X$ действительнозначный, то $f$ — четная функция.

Одной из задач статистики случайных процессов является оценивание (если явный вид не известен) или идентификация функции $B(h)$ по наблюдению за одной траекторией процесса $X$. В качестве несмещенной оценки рассматриваем коррелограмму

$$\hat{B}_T(h) = T^{-1} \int_0^T X(t)X(t+h)\, dt, \quad h \geq 0.$$

При условии (1) асимптотические свойства коррелограммы $\hat{B}_T$ (при $T \to \infty$) связаны с поведением процесса

$$Y_T(h) = \sqrt{T}\,(\hat{B}_T(h) - B(h)), \quad h \geq 0.$$

В частности, для любых $h_1, h_2 \geq 0$

$$\lim_{T\to\infty} EY_T(h_1)Y_T(h_2) = b(h_1, h_2) =$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \cos \lambda h_1 \cos \lambda h_2 \, d\lambda. \qquad (2)$$

Пусть $Y(h), h \geq 0,$ — измеримый сепарабельный действительнозначный гауссовский случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $b(h_1, h_2)$, т. е. для всех $h_1, h_2 \geq 0$

$$EY(h_1)Y(h_2) = b(h_1, h_2). \qquad (3)$$

Известно [1], что если выполнено условие (1), то все конечномерные распределения процесса $Y_T$ слабо сходятся при $T \to \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса $Y$. Более того, это же свойство имеют моментные функции процесса $Y_T$, а также интегральные функционалы (из достаточно широкого класса) от процесса $Y_T$.

Далее изучаются условия слабой сходимости процесса $Y_T$ к процессу $Y$ в пространстве непрерывных функций. Естественность такой задачи прежде всего связана с тем, что [2, с. 164] для любого $T > 0$ процесс $Y_T$ является непрерывным почти наверное (п. н.). Асимптотические свойства коррелограмм в пространствах непрерывных функций рассматривались в работах [2–6]. Основная теорема 1 не только уточняет результаты [5], но позволяет также получить неулучшаемые условия для широкого класса спектральных плотностей (теорема 2).

**1. Формулировка основных утверждений.** Пусть $A > 0$; $C[0, A]$ — банахово пространство непрерывных действительнозначных функций, заданных на интервале $[0, A]$, с равномерной нормой.

Пусть $S \subseteq R$ и $\rho(t, s)$, $t, s \in S$, — некоторая псевдометрика. Напомним, что псевдометрика удовлетворяет всем условиям метрики за исключением того, что множество $\{(t, s) \in S \times S : \rho(t, s) = 0\}$, возможно, шире множества $\{(t, s) \in S \times S : t = s\}$. Как обычно, $N_\rho(S, \varepsilon)$ — наименьшее число открытых $\rho$-шаров радиуса $\varepsilon > 0$, центры которых лежат в $S$, покрывающих множество $S$; если конечного покрытия не существует, то $N_\rho(S, \varepsilon) = \infty$; $H_\rho(S, \varepsilon) = \ln N_\rho(S, \varepsilon)$ — энтропия множества $S$ относительно псевдометрики $\rho$. Условимся, что выражение

$$\int_{0+} H_\rho(S, \varepsilon) \, d\varepsilon < \infty$$

означает, что существует число $a > 0$ такое, что

$$\int_0^a H_\rho(S, \varepsilon) \, d\varepsilon < \infty.$$

Рассмотрим функцию

$$\sigma(h) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \sin^2 \frac{\lambda h}{2} \, d\lambda \right]^{1/2}, \quad h \geq 0.$$

В силу условия (1) эта функция определена и задает псевдометрики

$$\sigma(h_1, h_2) = \sigma(|h_1 - h_2|), \qquad \sqrt{\sigma}(h_1, h_2) = \sqrt{\sigma(h_1, h_2)}, \quad h_1, h_2 \in R.$$

Заметим, что если $f(\lambda) \not\equiv 0$ на множестве положительной лебеговой меры, то $\sigma$, $\sqrt{\sigma}$ — метрики. Положим

$$H_\sigma(\varepsilon) = H_\sigma([0,1],\varepsilon), \qquad H_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon) = H_{\sqrt{\sigma}}([0,1],\varepsilon).$$

Поскольку псевдометрики $\sigma$, $\sqrt{\sigma}$ зависят лишь от $|h_1 - h_2|$, то для любого $A > 0$

$$\begin{gathered}\int\limits_{0+} H_\sigma(\varepsilon)\,d\varepsilon < \infty \;\Leftrightarrow\; \int\limits_{0+} H_\sigma([0,A],\varepsilon)\,d\varepsilon < \infty,\\ \int\limits_{0+} H_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon)\,d\varepsilon < \infty \;\Leftrightarrow\; \int\limits_{0+} H_{\sqrt{\sigma}}([0,A],\varepsilon)\,d\varepsilon < \infty.\end{gathered} \tag{4}$$

Кроме того, поскольку для всех $h_1, h_2 \in R$

$$\sigma(h_1,h_2) \le \Big[\max_{h_1,h_2\in R} \sigma(h_1,h_2)\Big]^{1/2} \sqrt{\sigma}(h_1,h_2) \le \sqrt{\|f\|_2}\,\sqrt{\sigma}(h_1,h_2), \tag{5}$$

то из соотношения

$$\int\limits_{0+} H_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon)\,d\varepsilon < \infty$$

получаем

$$\int\limits_{0+} H_\sigma(\varepsilon)\,d\varepsilon < \infty, \tag{6}$$

откуда, в свою очередь,

$$\int\limits_{0+} H_\sigma^{1/2}(\varepsilon)\,d\varepsilon < \infty.$$

В дальнейшем запись

$$Y_T \underset{T\to\infty}{\overset{C[0,A]}{\Rightarrow}} Y$$

обозначает слабую сходимость процесса $Y_T$ при $T \to \infty$ к процессу $Y$ в пространстве непрерывных функций, т. е. для любого $C[0,A]$ непрерывного функционала $G$ распределение случайной величины $G(Y_T)$ слабо сходится к распределению случайной величины $G(Y)$. При этом считаем, что

$$Y_T = (Y_T(h), h \in [0,A]), \quad Y = (Y(h), h \in [0,A])$$

и предполагаем, что $Y \in C[0,A]$ п. н.

**Теорема 1.** *Пусть выполнено условие* (1) *и*

$$\int\limits_{0+} H_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon)\,d\varepsilon < \infty. \tag{7}$$

*Тогда для любого* $A > 0$:

1) $Y \in C[0,A]$ п. н.;

2) $Y_T \underset{T\to\infty}{\overset{C[0,A]}{\Rightarrow}} Y$, в частности, для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\sqrt{T}\sup_{0\le h\le A}\left|\hat{B}_T(h) - B(h)\right| > \varepsilon\right\} \underset{T\to\infty}{\to} \left\{\sup_{0\le h\le A}|Y(h)| > \varepsilon\right\}.$$

***Следствие* 1.** *Пусть выполнено условие* (1) *и существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\int_0^\infty f^2(\lambda) \ln^{4+\delta}(1+\lambda)\, d\lambda < \infty. \tag{8}$$

*Тогда справедливы утверждения* 1, 2 *теоремы* 1.

***Замечание* 1.** Согласно теореме Дадли [7] о непрерывности гауссовских процессов утверждение 1 выполняется, если

$$\int_{0+} H_\sigma^{1/2}(\varepsilon)\, d\varepsilon < \infty.$$

Это условие (см. (6)) слабее условия (7). Соответственно в условии (8) показатель $4+\delta$ можно заменить на $1+\delta$ (см. также [2]).

***Определение* 1.** *Будем говорить, что спектральная плотность $f$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, если найдутся $u_0 > 0$, $C > 0$ такие, что для всех $u \ge u_0$*

$$\inf_{\lambda \in [u,\, 2u]} f(\lambda) \ge C f(2u).$$

***Определение* 2.** *Будем говорить, что спектральная плотность $f$ монотонно убывает на бесконечности, если найдется $u_0 \ge 0$ такое, что для всех $v \ge u \ge u_0$ $f(v) \le f(u)$.*

***Замечание* 2.** *Если $f$ монотонно убывает на бесконечности, то $f \in \mathfrak{M}$.*

**Теорема 2.** *Пусть выполнено условие* (1) *и $f \in \mathfrak{M}$. Тогда справедливы утверждения* 1, 2 *теоремы* 1.

***Следствие* 2.** *Пусть выполнено условие* (1) *и $f$ монотонно убывает на бесконечности. Тогда справедливы утверждения* 1, 2 *теоремы* 1.

**2. Предварительные утверждения.** Следующее утверждение обобщает соответствующий результат работы [8].

**Лемма 1.** *Пусть $(S, \rho)$ — псевдометрический компакт; $\{Z_\alpha(s),\, s \in S\}$ — семейство по параметру $\alpha$ непрерывных п. н. случайных процессов, а также выполнены следующие условия:*

1) *существуют константы $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $x_0 > 0$ и для каждого $\alpha$ существует такая псевдометрика $\rho_\alpha$ на $S$, что для любых $x \in (0, x_0)$ и $s$, $t \in S$*

$$P\{|Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t)| > x\} \le a \exp\left(-b\left[\frac{x}{\rho_\alpha(t,s)}\right]^c\right); \tag{9}$$

2) *псевдометрика*

$$\rho_\infty(t,s) = \sup_\alpha \rho_\alpha(t,s), \quad t, s \in S,$$

*ограничена на $S$ и непрерывна относительно псевдометрики $\rho$;*

3)
$$\lim_{u \downarrow 0} \sup_\alpha \int_0^u H_\alpha^{1/c}(S, \varepsilon)\, d\varepsilon = 0,$$

*где $H_\alpha(S,\varepsilon) = H_{\rho_\alpha}(S,\varepsilon)$.*

*Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\Delta \to 0} \sup_\alpha P\left\{ \sup_{\substack{s,\, t \in S \\ \rho(t,s) < \Delta}} |Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t)| > \varepsilon \right\} = 0. \tag{10}$$

***Доказательство.*** Следуем рассуждениям работы [8]. Не умаляя общности, можно считать, что $b = 1$. Так как для каждого $\alpha$ $Z_\alpha \in C(S, \rho)$ п. н., то при доказательстве соотношения (10) множество $S$ можно заменить любым его счетным подмножеством, всюду плотным в $S$ относительно псевдометрики $\rho$. Поэтому в дальнейшем считаем множество $S$ счетным.

Пусть

$$\varepsilon_0 = \sup_{t, s \in S} \rho_\infty(t, s).$$

В силу условия 2 $\varepsilon_0 < \infty$. Не умаляя общности, полагаем $\varepsilon_0 = 1$. Через $S_m^{(\alpha)}$ обозначим минимальную $2^{-m}$-сеть в $S$ относительно псевдометрики $\rho_\alpha$. Существование такой сети следует из условия 3. Тогда

$$\operatorname{card} S_m^{(\alpha)} = N_\alpha(S, 2^{-m}), \quad N_\alpha(S, \varepsilon) = N_{\rho_\alpha}(S, \varepsilon).$$

Отсюда

$$\operatorname{card} \{(s, t) \in S \times S : s, t \in S_{m-1}^{(\alpha)} \cup S_m^{(\alpha)}\} \leq 4 N_\alpha^2(2^{-m}). \tag{11}$$

Пусть $x_m^{(\alpha)} > 0$, тогда выполняются соотношения

$$P\left\{ \sup_{(s,t) \in \hat{F}_m^{(\alpha)}} | Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) | > x_m^{(\alpha)} \right\} \leq$$

$$\leq P\left\{ \sup_{(s,t) \in F_m^{(\alpha)}} | Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) | > x_m^{(\alpha)} \right\} \leq$$

$$\leq 4 N_\alpha^2(S, 2^{-m}) \sup_{(s,t) \in F_m^{(\alpha)}} P\{ | Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) | > x_m^{(\alpha)} \}, \tag{12}$$

где

$$F_m^{(\alpha)} = \{(s, t) : s, t \in S_{m-1}^{(\alpha)} \cup S_m^{(\alpha)}; \rho_\alpha(s, t) < 2^{-m+2}\},$$

$$\hat{F}_m^{(\alpha)} = \{(s, t) : s, t \in S_{m-1}^{(\alpha)} \cup S_m^{(\alpha)}; \rho_\infty(s, t) < 2^{-m+2}\}.$$

Если $x_m^{(\alpha)} \in (0, x_0)$, то согласно неравенствам (9), (12)

$$P\left\{ \sup_{(s,t) \in \hat{F}_m^{(\alpha)}} | Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) | > x_m^{(\alpha)} \right\} \leq K_m^{(\alpha)}, \tag{13}$$

где

$$K_m^{(\alpha)} = 4a \exp\left(2H_\alpha(S, 2^{-m}) - 2^{c(m-2)}\left(x_m^{(\alpha)}\right)^c\right).$$

Предположим, что для любых $m \geq 1$ и $\alpha$ $x_m^{(\alpha)} \in (0, x_0)$ и выполнены соотношения

$$\lim_{M \to \infty} \sup_\alpha \sum_{m=M}^\infty x_m^{(\alpha)} = 0,$$
$$\lim_{M \to \infty} \sup_\alpha \sum_{m=M}^\infty K_m^{(\alpha)} = 0. \tag{14}$$

Тогда для любых $\varepsilon > 0, \delta > 0$ существует такое натуральное число $m_0 = m_0(\varepsilon, \delta)$, что

$$\sup_{\alpha} \sum_{m=m_0}^{\infty} x_m^{(\alpha)} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sup_{\alpha} \sum_{m=m_0}^{\infty} K_m^{(\alpha)} < \delta. \tag{15}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0, \delta > 0$ и соответствующее им $m_0$.

Положим

$$\Omega_m^{(\alpha)} = \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{(s,t) \in \hat{F}_m^{(\alpha)}} \left| Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) \right| > x_m^{(\alpha)} \right\}.$$

Для $s \in S$ обозначим через $s_m^{(\alpha)}$ точку из $S_m^{(\alpha)}$, ближайшую к $s$ относительно псевдометрики $\rho_\alpha$. Если таких точек окажется несколько, то выбираем любую из них. Пусть $t, s \in S$ и $\rho_\infty(t, s) < 2^{-m_0}$. Тогда для всех $m \geq m_0$ и $\alpha$

$$\rho_\alpha\left(s_{m_0}^{(\alpha)}, t_{m_0}^{(\alpha)}\right) < 2^{-m_0+2},$$

$$\rho_\alpha\left(s_m^{(\alpha)}, s_{m+1}^{(\alpha)}\right) < 2^{-m+2}, \quad \rho_\alpha\left(t_m^{(\alpha)}, t_{m+1}^{(\alpha)}\right) < 2^{-m+2}.$$

Для любых точки $s \in S$ и $\alpha$

$$\lim_{m\to\infty} \rho_\alpha\left(s, s_m^{(\alpha)}\right) = 0$$

и в силу неравенства (9) для всех $\gamma \in (0, x_0)$ и $\alpha$

$$\varlimsup_{m\to\infty} P\left\{ \left| Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) \right| > \gamma \right\} \leq$$

$$\leq \varlimsup_{m\to\infty} \exp\left( -\left[ \frac{\gamma}{\rho_\alpha\left(s, s_m^{(\alpha)}\right)} \right]^c \right) = 0.$$

Следовательно, для произвольного $\alpha$

$$Z_\alpha\left(s_m^{(\alpha)}\right) \xrightarrow[m\to\infty]{P} Z_\alpha(s).$$

Отсюда вытекает, что для любых $(s, t) \in S$ и $\alpha$ ряды

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \left( Z_\alpha\left(s_m^{(\alpha)}\right) - Z_\alpha\left(s_{m+1}^{(\alpha)}\right) \right), \qquad \sum_{m=m_0}^{\infty} \left( Z_\alpha\left(t_m^{(\alpha)}\right) - Z_\alpha\left(t_{m+1}^{(\alpha)}\right) \right)$$

сходятся по вероятности. Поэтому п. н. справедливы неравенства

$$\left| Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) \right| \leq \left| Z_\alpha(s) - Z_\alpha\left(s_{m_0}^{(\alpha)}\right) \right| +$$

$$+ \left| Z_\alpha\left(s_{m_0}^{(\alpha)}\right) - Z_\alpha\left(t_{m_0}^{(\alpha)}\right) \right| + \left| Z_\alpha\left(t_{m_0}^{(\alpha)}\right) - Z_\alpha(t) \right| \leq$$

$$\leq \left| Z_\alpha\left(s_{m_0}^{(\alpha)}\right) - Z_\alpha\left(t_{m_0}^{(\alpha)}\right) \right| +$$

$$+ \sum_{m=m_0}^{\infty} \left| Z_\alpha\left(s_m^{(\alpha)}\right) - Z_\alpha\left(s_{m+1}^{(\alpha)}\right) \right| + \sum_{m=m_0}^{\infty} \left| Z_\alpha\left(t_m^{(\alpha)}\right) - Z_\alpha\left(t_{m+1}^{(\alpha)}\right) \right|.$$

Поскольку при доказательстве леммы множество $S$ предполагается счетным, то найдется такое множество $\Omega_1 \subseteq \Omega$, что $P(\Omega_1) = 1$ и для всех $\omega \in \Omega_1$ последние неравенства выполняются одновременно для всех $s, t \in S$. Тогда если

$$\omega \in \tilde{\Omega}_{m_0}^{(\alpha)} = \Omega_1 \cap \left[ \bigcap_{m=m_0}^{\infty} \left(\Omega \setminus \Omega_m^{(\alpha)}\right) \right],$$

то для всех $s, t \in S$ таких, что $\rho_\infty(s,t) < 2^{-m_0}$,

$$| Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) | \leq x_{m_0}^{(\alpha)} + 2 \sum_{m=m_0}^{\infty} x_m^{(\alpha)} \leq \varepsilon.$$

Отсюда следует включение

$$\tilde{\Omega}_{m_0}^{(\alpha)} \subset \left\{ \sup_{(s,t) \in D_{m_0}} | Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) | \leq \varepsilon \right\},$$

где $D_{m_0} = \{ (s,t) \in S \times S : \rho_\infty(s,t) < 2^{-m_0} \}$. Поэтому

$$\sup_\alpha P \left\{ \sup_{(s,t) \in D_{m_0}} | Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) | > \varepsilon \right\} \leq \sup_\alpha P\left(\Omega \setminus \tilde{\Omega}_{m_0}^{(\alpha)}\right) \leq$$

$$\leq P(\Omega \setminus \Omega_1) + \sup_\alpha \sum_{m=m_0}^{\infty} P\left(\Omega_m^{(\alpha)}\right) = \sup_\alpha \sum_{m=m_0}^{\infty} P\left(\Omega_m^{(\alpha)}\right).$$

В силу неравенств (13), (15) выполняется неравенство

$$\sup_\alpha P \left\{ \sup_{(s,t) \in D_{m_0}} | Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) | > \varepsilon \right\} \leq \sup_\alpha \sum_{m=m_0}^{\infty} K_m^{(\alpha)} < \delta.$$

Так как

$$\overline{\lim_{\Delta \to 0}} \sup_\alpha P \left\{ \sup_{\substack{(s,t) \in S \\ \rho_\infty(s,t) < \Delta}} | Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) | > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq \sup_\alpha P \left\{ \sup_{(s,t) \in D_{m_0}} | Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) | > \varepsilon \right\} < \delta,$$

то в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{\Delta \to 0}} \sup_\alpha P \left\{ \sup_{\substack{(s,t) \in S \\ \rho_\infty(s,t) < \Delta}} | Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t) | > \varepsilon \right\} = 0.$$

Так как по условию 2 полуметрика $\rho_\infty$ непрерывна относительно псевдометрики $\rho$, то соотношение (10) выполняется.

Для полного доказательства леммы осталось показать, что существуют последовательности $\{ x_m^{(\alpha)}, m \geq 1 \}$, удовлетворяющие условию (14). Положим

$$x_m^{(\alpha)} = \min \left\{ \frac{x_0}{2}, \max \left\{ 2^{2/c+2-m} H^{1/c}(S, 2^{-m}), m^{-2} \right\} \right\}.$$

Ясно, что для любых $\alpha$ и $m \ge 1$ $x_m^{(\alpha)} \in (0, x_0)$. Поскольку функции $H_\alpha(S, v)$ монотонно не убывают при $v \downarrow 0$, то для любого натурального числа $M$

$$\sum_{m=M}^{\infty} 2^{-m} H_\alpha^{1/c}(S, 2^{-m}) \le 2 \int_0^{2^{-M}} H_\alpha^{1/c}(S, v)\, dv.$$

В силу условия 3 справедливы соотношения

$$\varlimsup_{M\to\infty} \sup_\alpha \sum_{m=M}^{\infty} x_m^{(\alpha)} \le \varlimsup_{M\to\infty} \sum_{m=M}^{\infty} m^{-2} +$$

$$+ 2^{2/c+2} \varlimsup_{M\to\infty} \sup_\alpha \sum_{m=M}^{\infty} H^{1/c}(S, 2^{-m}) 2^{-m} \le$$

$$\le 2^{2/c+3} \varlimsup_{M\to\infty} \sup_\alpha \int_0^{2^{-M}} H_\alpha(S, v)\, dv = 0.$$

Таким образом, первое из условий (14) выполнено.

Далее, для достаточно больших $m$ $x_m^{(\alpha)} = m^{-2}$, если

$$H_\alpha(S, 2^{-m}) \le \frac{2^{mc-2c-2}}{m^{2c}}, \tag{16}$$

и $x_m^{(\alpha)} = 2^{2/c+2-m} H^{1/c}(S, 2^{-m})$, если

$$H_\alpha(S, 2^{-m}) > \frac{2^{mc-2c-2}}{m^{2c}}. \tag{17}$$

Пусть выполнено (16). Тогда имеем

$$K_m^{(\alpha)} = 4a \exp\left(2H_\alpha\left(S,\, 2^{-m}\right) - \frac{2^{mc-2c}}{m^{2c}}\right) \le$$

$$\le 4a \exp\left(\frac{2^{mc-2c-1}}{m^{2c}} - \frac{2^{mc-2c}}{m^{2c}}\right) = 4a \exp\left(-\frac{2^{mc-2c-1}}{m^{2c}}\right).$$

Пусть выполнено (17). Тогда получаем

$$K_m^{(\alpha)} = 4a \exp\left(2H_\alpha(S, 2^{-m}) - 4H_\alpha(S, 2^{-m})\right) =$$

$$= 4a \exp\left(-2H_\alpha(S, 2^{-m})\right) \le 4a \exp\left(-\frac{2^{mc-2c-1}}{m^{2c}}\right).$$

Следовательно, для достаточно больших $m$

$$\sup_\alpha K_m^{(\alpha)} \le 4a \exp\left(-\frac{2^{c(m-2)-1}}{m^{2c}}\right).$$

Поскольку $c > 0$, то

$$\lim_{M\to\infty} \sup_\alpha \sum_{m=M}^{\infty} K_m^{(\alpha)} \le 4a \lim_{M\to\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \exp\left(-\frac{2^{c(m-2)-1}}{m^{2c}}\right) = 0.$$

Таким образом, выполнено второе из условий (14). Лемма 1 доказана.

***Замечание 2.*** Согласно неравенству Чебышева – Маркова утверждение леммы 1 остается верным, если условие 1 заменить следующим: существуют такие $b > 0, c > 0$ и для каждого $\alpha$ существует такая псевдометрика $\rho_\alpha$ на $S$, что

$$\sup_{\alpha} \sup_{s,t \in S} E \exp\left( b \left| \frac{Z_\alpha(s) - Z_\alpha(t)}{\rho_\alpha(s, t)} \right|^c \right) < \infty.$$

**Лемма 2.** *Для любых* $T > 0;\ h_1, h_2 \ge 0$ *справедливо неравенство*

$$E\,|Y_T(h_1) - Y_T(h_2)|^2 \le$$

$$\le 8\pi \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \sin^2 \frac{\lambda(h_1 - h_2)}{2}\, d\lambda \right] +$$

$$+ \ 8\pi \|f\|_2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \sin^2 \frac{\lambda(h_1 - h_2)}{2}\, d\lambda \right]^{1/2} \tag{18}$$

***Доказательство.*** Из вида процесса $Y_T$, теоремы Бохнера – Хинчина и теоремы Планшереля следует

$$E\,|Y_T(h_1) - Y_T(h_2)|^2 =$$

$$= T^{-1} \int_0^T \int_0^T [2B^2(t-s) - 2B(t-s)B(t-s+h_2-h_1) +$$

$$+ B(t-s+h_2)B(t-s+h_1) + B(t-s+h_2)B(t-s-h_1) +$$

$$+ B(t-s+h_2)B(t-s-h_2) + B(t-s+h_1)B(t-s-h_1) -$$

$$- B(t-s-h_2)B(t-s+h_1)]\, dt\, ds =$$

$$= T^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) f(\mu) \left[ \int_0^T \int_0^T e^{i(\lambda+\mu)(t-s)}\, dt\, ds \right];$$

$$[2 - 2\cos\mu(h_1 - h_2) + \cos(\lambda - \mu)h_1 + \cos(\lambda - \mu)h_2 -$$

$$- \cos(\lambda h_1 - \mu h_2) - \cos(\mu h_1 - \lambda h_2)]\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= 8\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) f(\mu)\, \Phi_T(\lambda + \mu) \times$$

$$\times \left[ \sin^2 \frac{\mu(h_1 - h_2)}{2} + \sin \frac{\mu(h_1 - h_2)}{2} \sin \frac{\lambda(h_1 - h_2)}{2} \cos \frac{(\lambda - \mu)(h_1 + h_2)}{2} \right] d\lambda\, d\mu,$$

где

$$\Phi_T(u) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin^2 (uT/2)}{u^2 T/2} \right), \quad u \in R.$$

Пусть

$$I_1 = 8\pi \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) f(\mu)\, \Phi_T(\lambda+\mu) \times$$

$$\times \sin\frac{\mu(h_1-h_2)}{2} \sin\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2} \cos\frac{(\lambda-\mu)(h_1+h_2)}{2}\, d\lambda\, d\mu,$$

$$I_2 = 8\pi \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) f(\mu)\, \Phi_T(\lambda+\mu) \sin^2\frac{\mu(h_1-h_2)}{2}\, d\lambda\, d\mu.$$

Тогда $E|Y_T(h_1) - Y_T(h_2)|^2 = I_1 + I_2$.

Зафиксировав $h_1, h_2$, положим

$$\varphi(\lambda) = \left| f(\lambda) \sin\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2} \right|.$$

Тогда справедливы соотношения

$$|I_1| \le 8\pi \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\varphi(\mu)\, \Phi_T(\lambda+\mu)\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= 8\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_T(\lambda+\mu)\varphi(\mu)\, d\mu \right] d\lambda.$$

Согласно неравенству Коши – Буняковского

$$|I_1| \le 8\pi \|\varphi\|_2 \|\Phi_T * \varphi\|_2.$$

В силу известного неравенства для нормы сверток (см., например, [9, с. 72]) имеем

$$\|\Phi_T * \varphi\|_2 \le \|\Phi_T\|_1 \|\varphi\|_2.$$

где

$$\|\Phi_T\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_T(u)|\, du = 1.$$

Поэтому

$$|I_1| \le 8\pi \|\varphi\|_2^2 = 8\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \sin^2\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2}\, d\lambda. \tag{19}$$

Оценим величину $I_2$. Положим

$$\psi(\mu) = f(\mu) \sin^2\frac{\mu(h_1-h_2)}{2}.$$

Тогда справедливы соотношения

$$I_2 = 8\pi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mu) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_T(\lambda+\mu) f(\lambda)\, d\lambda \right] d\mu \le$$

$$\le 8\pi \|\psi\|_2 \|\Phi_T * f\|_2 \le 8\pi \|\psi\|_2 \|f\|_2 \|\Phi_T\|_1 =$$

$$= 8\pi\|f\|_2\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^4\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2}d\lambda\right]^{1/2} \le$$

$$\le 8\pi\|f\|_2\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^2\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2}d\lambda\right]^{1/2}.$$

Отсюда и из неравенства (19) вытекает неравенство (18). Лемма 2 доказана.

**4. Доказательство основных утверждений.**

***Доказательство*** *теоремы* 1. Согласно теореме Дадли [7] о непрерывности гауссовских процессов утверждение 1 имеет место, если для любого $A > 0$

$$\int_{0+} H_{d_Y}^{1/2}([0, A], \varepsilon)\, d\varepsilon < \infty, \tag{20}$$

где

$$d_Y(h_1, h_2) = [E|Y(h_1) - Y(h_2)|^2]^{1/2}.$$

В силу соотношения (2) для любых $h_1, h_2 \ge 0$

$$d_Y^2(h_1, h_2) = 4\pi\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)(\cos\lambda h_1 - \cos\lambda h_2)^2 d\lambda =$$

$$= 16\pi\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^2\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2}\sin^2\frac{\lambda(h_1+h_2)}{2}d\lambda \le$$

$$\le 16\pi\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^2\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2}d\lambda = 16\pi\sigma^2(h_1, h_2).$$

Следовательно, (20) выполняется, если

$$\int_{0+} H_{\sigma}^{1/2}(\varepsilon)d\varepsilon < \infty.$$

Согласно (6) последнее соотношение вытекает из условия (7). Утверждение 1 доказано.

Далее, согласно теореме Прохорова [10] о слабой сходимости случайных процессов в пространстве непрерывных функций утверждение 2 справедливо, если:

а) все конечномерные распределения процесса $Y_T$ слабо сходятся при $T \to \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса $Y$;

б) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sup_{T>0} P\left\{\sup_{\substack{h_1, h_2\in[0, A]\\ |h_1-h_2|<\Delta}}\left|Y_T(h_1) - Y_T(h_2)\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Как показано в [1], условие а) вытекает из условия (1).

В работе [4] установлено, что для любого $A > 0$

$$\sup_{T>0}\sup_{h_1, h_2\in[0, A]} E\left\{\frac{|Y_T(h_1) - Y_T(h_2)|}{\sqrt{2}\rho_T(h_1, h_2)}\right\} < \infty, \tag{21}$$

где

$$\rho_T(h_1, h_2) = \left[E\left|Y_T(h_1) - Y_T(h_2)\right|^2\right]^{1/2}.$$

Кроме того, в силу неравенств (18), (5), для всех $h_1, h_2 \geq 0$

$$\rho_T(h_1, h_2) \leq \sqrt{8\pi}\,\sigma(h_1, h_2) + \sqrt{8\pi\|f\|_2}\,\sqrt{\sigma}(h_1, h_2) \leq K\sqrt{\sigma}(h_1, h_2), \quad (22)$$

где $K = 4\sqrt{2\pi\|f\|_2}$.

Из условия (1) и теоремы Лебега вытекает, что псевдометрика $\sqrt{\sigma}$ непрерывна относительно метрики $\rho(h_1, h_2) = |h_1 - h_2|$. Применяя неравенство (22), видим, что полуметрика

$$\rho_\infty(h_1, h_2) = \sup_{T>0} \rho_T(h_1, h_2)$$

также непрерывна относительно метрики $\rho$. Из условия (7) и неравенства (22) следует

$$\lim_{u\downarrow 0} \sup_{T>0} \int_0^u H_{\rho_T}([0, A], \varepsilon)\, d\varepsilon = 0. \quad (23)$$

Соотношения (21), (23) показывают, что выполнены все условия леммы 1 при $c = 1$, $\alpha = T$ (см. также замечание 2). Из этой леммы вытекает условие б). Утверждение 2, а значит, и теорема 1 доказаны.

***Доказательство*** *следствия* 1. Из условия (8) следует [11, с. 182], что при $\tau \downarrow 0$

$$\sqrt{\sigma(\tau)} = O\left(\frac{1}{|\ln \tau|^{1+\gamma}}\right),$$

где $\gamma = \varepsilon/4 > 0$. Отсюда вытекает, что при $\varepsilon \downarrow 0$

$$H_{\sqrt{\sigma}}(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{-1(1+\gamma)}\right).$$

Так как

$$\int_0^1 \varepsilon^{-1(1+\gamma)}\, d\varepsilon < \infty,$$

то выполнено условие (7). Остается воспользоваться теоремой 1. Следствие 1 доказано.

***Доказательство*** *теоремы* 2. Так как

$$\int_0^\infty f(\lambda)\, d\lambda < \infty,$$

то согласно критерию Коши найдется такое $u_1 \geq 2u_0$, что

$$\sup_{u\geq u_1} \int_{u/2}^u f(\lambda)\, d\lambda \leq \frac{C}{2}.$$

Далее, пусть $u \geq u_1$. Тогда по определению класса $\mathfrak{M}$ (определение 1)

$$\frac{u f(u)}{2} \le C^{-1} \int\limits_{u/2}^{u} f(\lambda)\, d\lambda \le \frac{1}{2}.$$

Следовательно, при $u \ge u_1$ $f(u) \le u^{-1}$. Из этого неравенства и условия (1) вытекает

$$\int\limits_0^\infty f^2(\lambda) \ln^5(1+\lambda)\, d\lambda = \int\limits_0^{u_0} f^2(\lambda) \ln^5(1+\lambda)\, d\lambda +$$

$$+ \int\limits_{u_0}^{\infty} f^2(\lambda) \ln^5(1+\lambda)\, d\lambda \le$$

$$\le \|f\|_2^2 \ln^5(1+u_0) + \int\limits_{u_0}^{\infty} \lambda^{-2} \ln^5(1+\lambda)\, d\lambda < \infty.$$

Таким образом, условие (8) выполнено при $\delta = 1$, и согласно следствию 1 теорема 2 доказана.

Следствие 2 непосредственно вытекает из теоремы 2, если воспользоваться замечанием 2.


1. *Булдыгин В. В.* О свойствах эмпирической коррелограммы гауссовского процесса с интегрируемой в квадрате спектральной плотностью // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 876–889.
2. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей. – Киев: Вища шк., 1986. – 216 с.
3. *Иванов А. В.* Одна предельная теорема для оценки корреляционной функции // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1978. – Вып. 19. – С. 76–81.
4. *Козаченко Ю. В., Стадник А. И.* Предгауссовские процессы и скорость сходимости в $C(T)$ оценок ковариационных функций // Там же. – 1991. – Вып. 45. – С. 54–62.
5. *Buldygin V. V., Zayats V. V.* Asymptotic normality of an estimate of the correlation function in different functional spaces. – Probability Theory and Mathematical Statistics (Proceedings of the 6th USSR – Japan Symposium, 1991). – World Scientific Publishing, 1992. – P. 19–31.
6. *Леоненко М. М., Портнова А. Ю.* Збіжність корелограми гауссівського поля до негауссівського розподілу // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1993. – Вип. 49. – С.137–144.
7. *Dudley R. M.* Sample functions of the Gaussian process // Annals Probab. – 1973. – **1**, № 1. – P. 66–103.
8. *Buldygin V. V.* Semiinvariant conditions of weak convergence of random processes in the space of continuous functions // New Trends in Probability and Statistics. – Utrecht: VSP, 1992. – P. 78–92.
9. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. – М.: Наука, 1989. – 260 с.
10. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения.– 1956. – **1**, № 2. – С. 177–238.
11. *Крамер Г., Лидбеттер М. Р.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969. – 398 с.


Получено 06.10.94