УДК 515.12

В. В. Остапенко, д-р физ.-мат. наук (Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

К ВОПРОСУ О НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

The question of upper and lower semicontinuity of the union and inersection of a family of set-valued maps is considered. New conditions for the intersection of a family of lower semicontinuous maps to be semicontinuous are obtained.

Розглядається питання напівнеперервності зверху і знизу об'єднання та перерізу родини многозначних відображень. Одержані нові умови напівнеперервності знизу перерізу родини напівнеперервних знизу відображень.

Понятие многозначного отображения (м. о.) применяется во многих областях современной математики, таких, к примеру, как теория дифференциальных включений, теория игр и дифференциальных игр, задачи оптимизации и оптимального управления. Описание вопросов, связанных с дифференциальными включениями, задачами оптимизации и оптимального управления, можно найти в работах [1–5]. Применение м. о. в теориях игр и дифференциальных игр описано соответственно в работах [6, 7]. Вместе с тем м. о. являются математическим объектом, достойным отдельного изучения в рамках топологических теорий [8, 9].

Свойство непрерывности м. о. описывается двумя основными понятиями — полунепрерывностью сверху (п. н. св.) и полунепрерывностью снизу (п. н. сн.). В настоящей работе рассматриваются вопросы сохранения свойства непрерывности при операциях объединения и пересечения. При этом для семейства п. н. св. м. о. многозначные отображения, получаемые как объединение или пересечение этого семейства, будут сохранять свойство п. н. св. при достаточно естественных топологических условиях. Этот же факт справедлив и для объединения семейства п. н. сн. м. о. Вопрос п. н. сн. пересечения семейства п. н. сн. м. о. является более сложным. Существующие в литературе условия сохранения п. н. св. для пересечения основываются на понятии выпуклости и его обобщениях [3] и, следовательно, требуют привлечения алгебраических понятий.

В данной статье предлагаются новые, топологические, условия п. н. сн. пересечения и исследуется связь этих условий с известными.

1. Полунепрерывность сверху. Пусть X и Y — два топологических пространства. Будем обозначать через 2^Y множество всех подмножеств пространства Y, включая и пустое множество $\varnothing$. Под м. о. F будем понимать обычное однозначное отображение $F: X \to 2^Y$, т. е. отображение, которое ставит каждому $x \in X$ в соответствие множество $F(x) \subset Y$.

***Определение* 1.** *М. о. $F(x)$ называется п. н. св. в точке x_0, если для любой окрестности U множества $F(x_0)$ существует окрестность V точки x_0 такая, что $F(x) \subset U$ для всех $x \in V$.*

***Замечания.* 1.** В различных работах (например, в [6]) при определении п. н. св. требуется компактнозначность м. о. F, т. е. компактность $F(x)$ для любого $x \in X$. Однако вопросы компактнозначности, с одной стороны, носят самостоятельный характер, а с другой, могут сузить область применения понятия п. н. св. Поэтому в данной статье изначально компактнозначность не предполагается.

2. Из определения м. о. возможно равенство $F(x_0) = \varnothing$. Поскольку $\varnothing$ включается в любое множество, то в данном случае F будет п. н. св. в точке x_0 тогда и только тогда, когда найдется такая окрестность V точки x_0, что $F(x) = \varnothing$ для всех $x \in V$.

Доказательство следующих теорем можно найти в [6].

Теорема 1. *Пусть м. о.* $F_i(x)$, $i = 1, 2$, *п. н. св. в точке* x_0. *Тогда м. о.* $G(x) = F_1(x) \bigcup F_2(x)$ *п. н. св. в точке* x_0.

Теорема 2. *Пусть м. о.* $F_\alpha(x)$, $\alpha \in A$ *(A — произвольное множество индексов), компактнозначно и п. н. св. в точке* x_0. *Тогда м. о.*

$$G(x) = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha(x)$$

п. н. св. в точке x_0.

Результат теоремы 1 автоматически не распространяется на случай произвольного семейства м. о., как в теореме 2. Существуют примеры, в которых объединение п. н. св. м. о. не будет п. н. св. Однако этот факт будет иметь место при некоторых дополнительных предположениях.

Следующая теорема приводится с доказательством, поскольку она отсутствует в известной автору литературе.

Пусть A — компактное топологическое пространство. Рассмотрим прямое произведение пространств $X_A = X \times A$.

Теорема 3. *Пусть м. о.* $F: X_A \to 2^Y$ *п. н. св. в точках* (x_0, α), *где* x_0 — *фиксированная точка из* X, $\alpha \in A$. *Тогда м. о.*

$$G(x) = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha(x, \alpha)$$

является п. н. св в точке x_0.

Доказательство. Пусть U — окрестность множества $G(x_0)$. Тогда для любого $\alpha \in A$ множество U — окрестность $F(x_0, \alpha)$. Поскольку F п. н. св. в любой точке (x_0, α), то существует окрестность V_0 точки (x_0, α) такая, что для всех точек $(x_0, \beta) \in V_\alpha$ выполняется включение $F(x_0, \beta) \subset U$. Можно считать, что V_α имеет вид $V_\alpha = V_\alpha^X \times V_\alpha^A$, где V_α^X — окрестность точки x_0, V_α^A — окрестность точки α. Рассмотрим в пространстве X_A множество $X_0 = (x_0, A)$. Это множество — компакт в X_A и $\{V_\alpha, \alpha \in A\}$ является его открытым покрытием. Отсюда следует существование конечного подпокрытия X_0. Пусть это будет набор $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}\}$. Множество $V = V_{\alpha_1}^X \bigcap \ldots \bigcap V_{\alpha_n}^X$ является окрестностью точки x_0, а набор $\left\{V_{\alpha_1}^A, \ldots, V_{\alpha_n}^A\right\}$ — покрытием множества A. Зафиксируем произвольную точку $x \in V$. Пусть $\alpha \in A$. Тогда существует такое i, что $\alpha \in V_{\alpha_i}^A$, и значит, $(x, \alpha) \in V_{\alpha_i}^X \times V_{\alpha_i}^A = V_{\alpha_i}$. По построению V_α это означает, что $F(x, \alpha) \subset U$. Поскольку α — произвольная точка, то отсюда следует, что $G(x) \subset U$, что и доказывает теорему.

2. Полунепрерывность снизу.

Определение 2. *М. о.* $F(x)$ *называется п. н. сн. в точке* x_0, *если для любого открытогомножества* $U \subset Y$ *такого, что* $U \bigcap F(x_0) \neq \varnothing$ *существует окрестность* V *точки* x_0 *такая, что* $U \bigcap F(x) \neq \varnothing$ *для всех* $x \in V$.

Замечание 3. *В случае* $F(x_0) = \varnothing$ *не существует такого множества* $U \subset Y$, *что* $U \bigcap F(x_0) \neq \varnothing$. *Поэтому можно считать, что в этой точке* F *п. н. сн.*

Очевидна следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть м. о.* $F_\alpha(x)$, $\alpha \in A$ (A *— произвольное множество индексов*), *п. н. сн. в точке* x_0. *Тогда м. о.*

$$G(x) = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha(x)$$

п. н. сн. в точке x_0.

Более сложным является вопрос: когда пересечение п. н. сн. м. о. будет п. н. сн. Для его исследования введем новое понятие п. н. сн.

***Определение* 3.** *М. о.* $F(x)$ *называется точечно полунепрерывным снизу (т. п. н. сн.) в точке* x_0, *если для любого* $y \in \operatorname{int} F(x_0)$ *существует окрестность* V *точки* x_0 *такая, что* $y \in F(x)$ *для любого* $x \in V$.

***Замечание* 4.** В случае $\operatorname{int} F(x_0) = \varnothing$ не существует ни одного $y \in \operatorname{int} F(x_0)$, и следовательно, можно считать, что F т. п. н. сн. в точке x_0.

Вопрос сохранения т. п. н. сн. для пересечения решается при определенных предположениях положительно.

Теорема 5. *Пусть м. о.* $F_i(x)$, $i = 1, 2$, *т. п. н. сн. в точке* x_0. *Тогда м. о.* $G(x) = F_1(x) \bigcap F_2(x)$ *т. п. н. сн. в точке* x_0.

Доказательство. Пусть $y \in \operatorname{int} G(x)$. Это означает, что $y \in \operatorname{int} F_i(x)$, $i = 1, 2$, и следовательно, существуют окрестности V_i, $i = 1, 2$, точки x_0 такие, что для любого $x \in V_i$ выполняется включение $y \in F_i(x)$. Отсюда следует, что для любого $x \in V_1 \bigcap V_2$ справедливо $y \in G(x)$.

Как и в предыдущем пункте, полагаем $X_A = X \times A$, где A — компакт.

Теорема 6. *Пусть м. о.* $F\colon X_A \to 2^Y$ *— т. п. н. сн. в точках* (x_0, α), *где* $x_0 \in X$, $\alpha \in A$. *Тогда м. о.*

$$G(x) = \bigcap_{\alpha \in A} F(x, \alpha)$$

т. п. н. сн. в точке x_0.

Доказательство этой теоремы сходно с доказательством теоремы 3 и поэтому приводить его не будем.

Рассмотрим теперь связь между п. н. сн. и т. п. н. сн.

***Пример* 1.** Построим пример п. н. сн. м. о., которое не является т. п. н. сн. Пусть $X = [0, 1]$, Y — вещественная ось, $F(x) = [0, 1-x] \bigcup [x+1, 2]$. В точке $x_0 = 0$ м. о. F не является т. п. н. сн., поскольку $F(0) = [0, 2]$ и, если $y = 1 \in \in F(0)$, то в любой окрестности x_0 справедливо $y \notin F(x)$ для $x \neq x_0$. С другой стороны, м. о. F, очевидно, п. н. сн.

***Пример* 2.** Построим пример т. п. н. сн. м. о., которое не является п. н. сн. Пусть X и Y те же, что и в примере 1. Положим

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] \bigcup \{2\}, & 0 \le x \le 0{,}5; \\ [0,1], & 0{,}5 < x \le 1. \end{cases}$$

М. о. F является т. п. н. сн., поскольку $\operatorname{int} F(x) \equiv [0, 1]$. С другой стороны, в точке $x_0 = 0{,}5$ м. о. F не является п. н. сн., поскольку для открытого множества $U = (3/2, 5/2)$ выполняется $U \bigcap F(x_0) \neq \varnothing$, но $U \bigcap F(x) = \varnothing$ для всех $x > x_0$.

Опишем условия, при которых т. п. н. сн. вытекает п. н. сн.

***Определение* 5.** *Множество $M \subset Y$ будем называть канонически телесным, если $M \subset \overline{\operatorname{int} M}$. Таким образом, канонически телесное и замкнутое множество будет канонически замкнутым.*

Лемма. *Пусть M — канонически телесное множество в пространстве Y. Тогда если для открытого множества $U \subset Y$ выполняется $U \cap M \neq \varnothing$, то $U \cap \operatorname{int} M \neq \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует открытое множество U такое, что $U \cap M \neq \varnothing$, но $U \cap \operatorname{int} M = \varnothing$. Пусть $y_0 \in U \cap M$. Поскольку U — окрестность y_0 и $U \subset Y \setminus \operatorname{int} M$, то $y_0 \in \operatorname{int}(Y \setminus \operatorname{int} M) = Y \setminus \overline{\operatorname{int} M}$. Отсюда следует, что $y_0 \notin \overline{\operatorname{int} M}$. Но поскольку $y_0 \in M$, то из условия леммы следует, что $y_0 \in \overline{\operatorname{int} M}$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Теорема 7. *Пусть м. о. $F(x)$ т. п. н. сн. в точке x_0 и $F(x_0)$ канонически телесно. Тогда $F(x)$ п. н. сн. в точке x_0.*

Доказательство. Пусть U — открытое множество такое, что $U \cap F(x_0) \neq \varnothing$. Из леммы следует, что $U \cap \operatorname{int} F(x_0) \neq \varnothing$. Пусть $y \in U \cap \operatorname{int} F(x_0)$. Тогда существует окрестность V точки x_0 такая, что $y \in F(x)$ для любого $x \in V$. Поскольку $y \in U$, то это означает, что $U \cap F(x) \neq \varnothing$.

Рассмотрим теперь условие т. п. н. сн. в терминах известного понятия п. н. св. Для любого м. о. F определим новое м. о. $F^{\text{com}}(x) = \overline{Y \setminus F(x)}$.

Теорема 8. *Пусть пространство Y регулярно и м. о. $F^{\text{com}}(x)$ п. н. св. в точке x_0.* Тогда *$F(x)$ т. п. н. сн. в точке x_0.*

Доказательство. Пусть $y \in \operatorname{int} F(x)$. Тогда из определения F^{com} следует, что $y \notin F^{\text{com}}(x_0)$. Из регулярности Y вытекает существование окрестности U множества $F^{\text{com}}(x_0)$ такой, что $y \notin U$. Поскольку $F^{\text{com}}(x)$ п. н. св. в точке x_0, то существует окрестность U точки x_0 такая, что $F^{\text{com}}(x) \subset U$ для всех $x \in V$. Теорема доказана.

Исследуем более подробно условие п. н. св. м. о. $F^{\text{com}}(x)$. Отметим, что оно ведет к более сильному условию п. н. сн., чем т. п. н. сн.

***Определение* 4.** *М. о. $F(x)$ называется сильно точечно полунепрерывным снизу* (*с. т. п. н. сн.*) *в точке x_0, если для любого $y \in \operatorname{int} F(x_0)$ существуют окрестность U_y точки y и окрестность U точки x_0 такие, что $U_y \subset F(x)$ для любого $x \in V$.*

Справедливо следующее обобщение теоремы 8.

Теорема 9. *Пусть пространство Y регулярно и м. о. $F^{\text{com}}(x)$ п. н. св. в точке x_0. Тогда $F(x)$ с. т. п. н. сн. в точке x_0.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8. При этом следует учесть, что в силу регулярности Y для любого $y \notin F^{\text{com}}(x_0)$ существует окрестность U_y точки y и окрестность U множества $F(x_0)$ такие, что $U_y \cap U = \varnothing$. Из п. н. св. F^{com} вытекает существование окрестности V точки x_0 такой, что $F^{\text{com}}(x) \subset U$ для всех $x \in V$. Отсюда $U_y \subset F(x)$ для всех $x \in V$.

Следующая теорема обратна теореме 9.

Теорема 10. *Пусть пространство Y регулярно, м. о. $F(x)$ с. т. п. н. св. в точке x_0 и $\overline{F(x_0)}$ — компакт. Тогда $F^{\text{com}}(x)$ п. н. св. в точке x_0.*

Доказательство. Пусть U — окрестность $F^{\text{com}}(x_0)$. Предположим, что $K = \overline{F(x_0)} \setminus U \neq \varnothing$. В противном случае $U = Y$ и, очевидно, $F^{\text{com}}(x) \subset U$ для всех $x \in X$. Поскольку любая точка $y \in K$ не принадлежит $F^{\text{com}}(x_0)$, то $y \in \operatorname{int} F(x_0)$ и, значит, существует окрестность U_y точки y и окрестность V_y точки x_0 такая, что $U_y \subset F(x)$ для любого $x \in V_y$. Множество K компактно, $\{U_y\}$ — его покрытие. Поэтому существует конечное подпокрытие $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}\}$. Положим

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}, \quad W = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}.$$

Для любого $x \in V$ выполняется $U_{y_i} \subset F(x)$, откуда $W \subset F(x)$. Поскольку $K \subset W$, то это означает, что $F^{\text{com}}(x) \subset U$ и, следовательно, F^{com} п. н. св.

Таким образом, для того чтобы доказать п. н. сн. пересечения семейства м. о., следует проверить, являются ли исходные м. о. т. п. н. сн. Для этого можно использовать условия теоремы 8, сформулированные в терминах п. н. св. Далее следует проверить свойство канонической телесности и применить теорему 7.

3. Условия полунепрерывности снизу пересечения м. о. в евклидовом пространстве. В этом пункте будем считать, что $Y = E^n$, где E^n — n-мерное евклидово пространство. Покажем, что известные ранее условия п. н. сн. пересечения сводятся к приведенным выше условиям т. п. н. сн., п. н. св. F^{com} и канонической телесности. Для этого докажем известные результаты на основе теорем предыдущего пункта.

Рассмотрим м. о. $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $G(x) = F_1(x) \cap F_2(x)$. Всюду в дальнейшем под S будем понимать единичный шар с центром в нуле. Наиболее распространенные условия п. н. сн. $G(x)$ можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 11. *Пусть $F_i(x)$, $i = 1, 2$, п. н. сн. в точке x_0; $F_i(x)$ — выпуклые множества для всех $x \in X$ и $\operatorname{int} G(x_0) \neq \varnothing$. Тогда $G(x)$ п. н. сн. в точке x_0.*

Доказательство. Отметим, что из условия теоремы вытекает, что $\operatorname{int} F_i(x_0) \neq \varnothing$, $i = 1, 2$.

Покажем теперь, что если выпуклозначное отображение $F(x)$ п. н. сн. в точке x_0 и $\operatorname{int} F(x_0) \neq \varnothing$, то $F(x)$ т. п. н. сн. в точке x_0. Обозначим

$$\Gamma(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \left\{ y = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i y_i : \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

— симплекс с вершинами в точках y_i таких, что векторы $y_i - y_0$, $i = 1, \ldots, n$, линейно независимы.

Пусть $y \in \operatorname{int} F(x_0)$. Тогда существует симплекс $\Gamma(y_0, \ldots, y_n)$ такой, что $y_i \in F(x_0)$ и $y \in \operatorname{int} \Gamma(y_0, y_1, \ldots, y_n)$. Из результатов выпуклого анализа [2] следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $y_i' \in y_i + \varepsilon S = S_i$ выполняется $y \in \Gamma(y_0', \ldots, y_n')$. Поскольку $(\operatorname{int} S_i) \cap F(x_0) \neq \varnothing$, то в силу п. н. сн. $F(x)$ существует окрестность V точки x_0 такая, что $S_i \cap F(x) \neq \varnothing$, для всех $x \in V$, $i = 0, \ldots, n$. Пусть $y_i(x) \in S_i \cap F(x)$. Тогда $y \in \Gamma(y_0(x), \ldots, y_n(x)) \subset F(x)$. Последнее включение следует из выпуклости $F(x)$.

Таким образом, показано, что $F_i(x)$ т. п. н. сн. в точке x_0. Отсюда и из теоремы 5 вытекает т. п. н. сн. в точке x_0 м. о. $G(x)$.

Из известных теорем выпуклого анализа [2] следует, что выпуклое множество с непустой внутренностью будет канонически телесным. Отсюда и из теоремы 7 вытекает п. н. сн. в точке x_0 отображения $G(x)$, что и доказывает теорему.

Приведем два определения из работы [3], которые обобщают некоторые свойства выпуклых множеств.

Для любых двух множеств $M,\ N \subset E^n$ Л. С. Понтрягин ввел понятие геометрической разности:

$$M \overset{*}{-} N = \{z \in E^n\colon\ z + N \subset M\}.$$

Известно, что если M и N — выпуклые компакты, то $(M+N) \overset{*}{-} N = M$.

***Определение* 5.** *Множество* $M \subset E^n$ *называется локально выпуклым, если существует такое число* $\nu > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0, \nu)$ *справедливо равенство* $(M + \varepsilon S) \overset{*}{-} \varepsilon S = M$. *Обозначим*

$$\nu(M) = \sup\{\varepsilon \geq 0\colon\ (M+\varepsilon S) \overset{*}{-} \varepsilon S = M\}.$$

***Определение* 6.** *Множество* M *называется звездным, если существует его подмножество* $M_0 \subset M$, *называемое центром, такое, что для любой точки* $y \in M$ *выполняется* $\mathrm{co}\{y, M_0\} \subset M$ ($\mathrm{co}\{y, M_0\}$ — *выпуклая оболочка точки* y *и множества* M_0).

Ниже будем считать, что отображения $F_i(x)$ компактнозначны.

В [3] доказана следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть м. о.* $F_i(x)$ *п. н. сн. в точке* x_0, $F_i(x)$ *локально выпуклы, причем существует такое* $\nu_0 > 0$, *что* $\nu(F_i(x)) \geq \nu_0$ *для всех* $x \in X$ *и множество* $G(x_0)$ *является звездным, причем его центр имеет непустую внутренность. Тогда* $G(x)$ *п. н. сн. в точке* x_0.

Докажем, что если м. о. $F(x)$ п. н. сн. в точке x_0 и $\nu(F(x)) \geq \nu_0 > 0$ для всех $x \in X$, то $F^{\mathrm{com}}(x)$ п. н. св. в точке x_0.

Известно (см., например, [3]), что компактнозначное отображение $F(x)$ п. н. сн. в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность V точки x_0 такая, что $F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon S$ для всех $x \in V$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\varepsilon < \nu_0$. Тогда из локальной выпуклости следует $F(x_0) \overset{*}{-} \varepsilon S \subset (F(x) + \varepsilon S) = F(x)$. Покажем, что отсюда следует $F^{\mathrm{com}}(x) \subset F^{\mathrm{com}}(x_0) + \varepsilon S$. В силу компактности $F(x)$, а значит, и границы $F^{\mathrm{com}}(x)$ последнее включение означает п. н. св. $F^{\mathrm{com}}(x)$ в точке x_0.

Отметим, что имеет место следующее представление:

$$M \overset{*}{-} \varepsilon S = \bigcap_{s \in \varepsilon S} (M + s).$$

Отсюда вытекает справедливость следующей цепочки включений и равенств:

$$Y \backslash F(x) \subset Y \backslash (F(x_0) \overset{*}{-} \varepsilon S) =$$
$$= Y \backslash \bigcap_{s \in \varepsilon S} (F(x_0) + s) = \bigcup_{s \in \varepsilon S} (Y \backslash (F(x_0) + s)) =$$

$$= (Y\backslash(F(x_0)) + \varepsilon S \subset \overline{Y \setminus F(x_0)} + \varepsilon S = F^{\text{com}}(x_0) + \varepsilon S.$$

Поскольку последнее множество в этой цепочке замкнуто и $F^{\text{com}}(x) = \overline{Y \setminus F(x)}$, то $F^{\text{com}}(x) \subset F^{\text{com}}(x_0) + \varepsilon S$.

Применяя теорему 8, получаем, что $F_i(x)$, а значит, и $G(x)$ т. п. н. сн. в точке x_0. Остается показать, что $G(x_0)$ канонически телесно. Пусть G_0 — центр $G(x_0)$ и $\operatorname{int} G_0 \neq \varnothing$. Возьмем точку $y_0 \in \operatorname{int} G_0$. Пусть y — произвольная точка из $G(x_0)$. Рассмотрим точки $y_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y$. Для всех $\lambda \in (0, 1)$ выполняется $y_\lambda \in \operatorname{int} \operatorname{co}(y, G_0) \subset \operatorname{int} G(x_0)$. Поскольку $\lim\limits_{\lambda \to 1} y_\lambda = y$, то $y \in \overline{\operatorname{int} G(x_0)}$. Отсюда, в силу произвольности y, следует каноническая телесность $G(x_0)$, что и доказывает теорему.

***Замечание* 5.** В работе [3] локальная выпуклость практически не исследовалась. В [7, 10] достаточно полно изучались почти выпуклые множества, которые, как показано в этих работах, являются локально выпуклыми. Существует гипотеза о совпадении классов локально выпуклых и почти выпуклых множеств. Множество M называется почти выпуклым, если существует константа $\kappa > 0$ такая, что для всех $x_i \in M$ и $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, выполняется

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in M + \kappa r^2 S,$$

где $r = \max\limits_{i \neq j} \| x_i - x_j \|$.

***Замечание* 6.** В [7, 11] изучались изучались условия телесности, которые обобщают понятие звездного множества с телесным центром. Можно показать, что эти условия также приводят к канонической телесности. (Предположим, что граница ∂M множества M компактна и обозначим

$$B(\alpha, M) = \partial M + \alpha S, \quad W(\alpha, M) = B(\alpha, M) \cap M, \quad l_{\alpha, M}\colon B(\alpha, M) \to \partial S,$$

$$K(z, \omega, r, l_{\alpha,M}) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq \omega} S(z + l_{\alpha,M}(z)\tau, \tau r),$$

где $S(z, r)$ — шар с центром в z, радиуса r. Множество M удовлетворяет условию телесности с положительными константами α, ω, r и непрерывной функцией $l_{\alpha,M}$, если $K(z, \omega, r, l_{\alpha,M}) \subset M$ для всех $z \in W(\alpha, M)$.)

1. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М.: Наука, 1977. – 624 с.
2. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
3. *Половинкин Е. С.* Элементы теории многозначных отображений. – М.: МФТИ, 1982. – 127 с.
4. *Половинкин Е. С.* Теория многозначных отображений. – М.: МФТИ, 1983. – 108 с.
5. *Aubin J.-P.* Viability theory. – Boston–Berlin: Basel–Birkhauser, 1991. – 243 p.
6. *Берж К.* Общая теория игр нескольких лиц. – М.: Физматгиз, 1961. – 126 с.
7. *Пшеничный Б. Н., Остапенко В. В.* Дифференциальные игры. – Киев: Наук. думка, 1991. – 264 с.
8. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. – М.: Мир, 1969. – 624 с.
9. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 252 с.
10. *Остапенко В. В.* Об одном условии почти выпуклости // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 2. – С. 169–172.
11. *Остапенко В. В.* Приближение основного оператора в дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. – 1984. – № 1. – С. 85–89.

Получено 18.04.94