УДК 517.55

**Н. Й. Ворошик,** асп.,
**В. Й. Горбайчук,** канд. фіз.-мат. наук (Волин. ун-т, Луцьк)

# ГРАНИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ В ЕЛІПТИЧНІЙ ОБЛАСТІ*

Solutions of a Dirichlet problem in a fixed ellipse are studied with respect to the integral metric when an interior point approaches to the boundary.

Досліджуються розв'язки задачі Діріхле у фіксованому еліпсі та їх поведінка в інтегральній метриці, коли внутрішня точка еліпса наближається до його межі.

**1.** В статті [1] розв'язана задача Діріхле для рівняння $\Delta U = 0$, $U = U(x, y)$, в еліптичній області $G$:

$$G := \left\{ (x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1,\ 0 < b < a \right\} \tag{1}$$

з крайовою умовою $U(x, y)\big|_{(x, y) \in \partial G} = f(x, y)$, де $\partial G$ — межа області $G$. Якщо покласти $x = c\operatorname{ch}\alpha\cos\varphi$, $y = c\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi$, $\alpha \in [0, \alpha_0]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, де $c = \mathrm{const} > 0$, то $a = c\operatorname{ch}\alpha_0$, $b = c\operatorname{sh}\alpha_0$ — півосі базового еліпса. Розв'язок цієї крайової задачі в базовому еліпсі можна записати в інтегральній формі [1], яка є повним аналогом інтеграла Пуассона:

$$U_f(\alpha, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{ch} n\alpha}{\operatorname{ch} n\alpha_0} \cos nt \cos n\varphi + \frac{\operatorname{sh} n\alpha}{\operatorname{sh} n\alpha_0} \sin nt \sin n\varphi \right) \right] dt, \tag{2}$$

де $f$ — задана функція точки еліпса. В роботі [2] було розглянуто поведінку функції $U_f(\alpha, \varphi)$ в залежності від близькості точки $(\alpha, \varphi)$ до межі базового еліпса, коли за міру цієї близькості взято величину $\alpha_0 - \alpha$, $\alpha \in [0, \alpha_0)$. Це можна зробити, оскільки точка $(x, y)$, для якої $x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1$, визначає єдиний еліпс з параметром $\alpha$, який має з базовим спільні фокуси. В [2] доведено, що для $f \in L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p < \infty$,

$$\| U_f(\alpha, \cdot) - f(\cdot) \|_{L_p} \to 0, \quad \alpha \to \alpha_0^-.$$

Це асимптотичне співвідношення не дає міри прямування до нуля швидкості відхилення розв'язку $U_f(x, y)$ від свого граничного значення $f(\varphi)$ в залежності від властивостей функції $f$ на $[0, 2\pi]$. У випадку канонічних областей (круг, півплощина) в роботах [3 – 5] знайдено оцінки відхилення гармонійних функцій від їх значень на межі в термінах модулів неперервності (м. н.) крайових даних. Ці дослідження підтвердили думку про природну залежність поведінки розв'язків задачі Діріхле від властивостей гладкості функцій, заданих на межі. Найбільш загальні оцінки в цій проблемі одержав в 1965 році О. Й. Буадзе [6]:

якщо $f \in L_p[0, 2\pi]$, то

$$\| f(\cdot) - U(re^{i\cdot}) \|_{L_p} \le B(p)\,\omega(1 - r; f)_{L_p} \quad \text{при } r \to 1^-, \tag{3}$$

де $B(p) = \mathrm{const} > 0$, $\omega(\delta, f)_{L_p}$ — інтегральний модуль гладкості функції $f$. (При $n = 2$ цей результат належить П. Л. Ульянову [7].) У випадку канонічних областей обернені теореми в термінах м. н. другого порядку одержані в [8].

* Частково підтримана Фондом фундаментальних досліджень при Державному комітеті України з питань науки та технологій.

В даній статті проведено дослідження розв'язків задачі Діріхле для еліптичної області (пряма і обернена задачі) і одержано аналоги результатів робіт [3 – 5, 8] в термінах м. н. вищих порядків. Означення і властивості м. н. вищих порядків викладено в [9, 10].

**2. Пряма задача.** Позначимо через $H_p^{\omega}[0, 2\pi]$, $1 \le p < \infty$, множину $2\pi$-періодичних функцій $f \in L_p[0, 2\pi]$, інтегральний м. н. другого порядку яких має мажоранту $\omega(t)$, $t > 0$, яка є функцією типу м. н. другого порядку ([10]).

**Теорема 1.** *Нехай* $f \in H_p^{\omega}[0, 2\pi]$, $U_f(\alpha, \varphi)$ — *розв'язок задачі Діріхле для рівняння* $\Delta U = 0$ *в еліптичній області* $G$ *з крайовою умовою* $f \in L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p < \infty$. *Тоді справедлива оцінка*

$$\| U_f(\alpha, \cdot) - f(\cdot) \|_{L_p} \le A\,\omega(\alpha_0 - \alpha), \tag{4}$$

*де* $A = \text{const} > 0$ *не залежить від* $\alpha$.

***Наслідок.*** *Оскільки* $\omega(t) \to 0$ $(t \to 0)$, *то з теореми* 1 *випливає теорема* 1 *роботи* [2].

***Доведення теореми* 1.** Ядро сингулярного інтеграла (2) розкладемо на три доданки:

$$P_1(\alpha, \varphi, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n(\alpha_0 - \alpha)\right) \cos\left(n(t - \varphi)\right), \tag{5}$$

$$P_2(\alpha, \varphi, t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n(\alpha_0 - \alpha)}{\operatorname{sh} 2n\alpha_0} \cos(nt) \cos(n\varphi), \tag{6}$$

$$P_3(\alpha, \varphi, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-3n\alpha_0 + n\alpha) - \exp(-n\alpha_0 - n\alpha)}{1 - \exp(-2n\alpha_0)} \cos\left(n(t - \varphi)\right). \tag{7}$$

Тоді

$$U_f(\alpha, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P_1(\alpha, \varphi, t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P_2(\alpha, \varphi, t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P_3(\alpha, \varphi, t)\, dt. \tag{8}$$

Таким чином,

$$\| U_f(\alpha, \cdot) - f(\cdot) \|_{L_p} \le \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P_1(\alpha, \cdot, t)\, dt - f(\cdot) \right\|_{L_p} +$$

$$+ \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P_2(\alpha, \cdot, t)\, dt \right\|_{L_p} + \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P_3(\alpha, \cdot, t)\, dt \right\|_{L_p}. \tag{9}$$

Справедливі такі оцінки:

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P_2(\alpha, \cdot, t)\, dt \right\|_{L_p} \le A_1(\alpha_0 - \alpha), \tag{10}$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P_3(\alpha, \cdot, t)\, dt \right\|_{L_p} \le A_2(\alpha_0 - \alpha), \tag{11}$$

де $A_1, A_2 > 0$ — сталі, які не залежать від $\alpha$.

Справді, використовуючи відповідні міркування з роботи [2], одержуємо

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P_2(\alpha, \cdot, t)\, dt \right\|_{L_p} \leq 4 \|f\|_{L_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(n(\alpha_0 - \alpha))}{\operatorname{sh}(2n\alpha_0)}.$$

Позначимо

$$\Phi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(n(\alpha_0 - \alpha))}{\operatorname{sh}(2n\alpha_0)}.$$

Тоді

$$\Phi(\alpha) \leq \frac{1}{1 - \exp(-4\alpha_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \exp(-n(\alpha_0 + \alpha)) - \exp(-3n\alpha_0 + n\alpha) \right].$$

За формулою скінченних приростів для функції $\exp(-nx)$ на сегменті $[3\alpha_0 - \alpha, \alpha_0 + \alpha]$ одержуємо

$$\exp(-n(\alpha_0 + \alpha)) - \exp(-n(3\alpha_0 - \alpha)) = 2n(\alpha_0 - \alpha) \exp(-n\alpha^*).$$

Отже,

$$0 \leq \Phi(\alpha) \leq \frac{2(\alpha_0 - \alpha)}{1 - \exp(-4\alpha_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\exp(n\alpha^*)} = A_1(\alpha_0 - \alpha),$$

де $A_1 = \text{const} > 0$ не залежить від $\alpha$. Оцінка (10) доведена.

Обгрунтування оцінки (11) аналогічне.

Покладемо $r = \exp(\alpha - \alpha_0)$. Тоді $0 < r < 1$. Для $P_1$ згідно з (5) маємо

$$P_1(\alpha, \varphi, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(t - \varphi)) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \varphi) + r^2} \tag{12}$$

і результат О. Й. Буадзе (3) дає оцінку

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P_1(\alpha, \cdot, t)\, dt - f(\cdot) \right\|_{L_p} \leq B(p)\omega(1 - r; f)_{L_p}.$$

Оскільки $1 - r = 1 - \exp(-(\alpha_0 - \alpha)) < \alpha_0 - \alpha$, то $\omega(1 - r) \leq \omega(\alpha_0 - \alpha)$, і оскільки розглянуті м. н. задовольняють умову $t \leq \omega(t)$ при $t \in [0, C_1]$, $C_1 > 0$, то, врахувавши ці факти в оцінках (3), (10), (11) і використавши (9), будемо мати оцінку (4). Теорема доведена.

**3. Обернена задача.** В оберненій задачі потрібно за відомою швидкістю відхилення розв'язку задачі Діріхле від свого граничного значення встановити властивості граничного значення, тобто властивості функції, за якою цей розв'язок побудований. Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в еліптичній області можна розглядати і як гармонійне продовження функції, заданої на межі, в цю область. Дослідження даного питання будемо проводити за схемою, викладеною в [11]. У випадку, коли $G$ — одиничний круг і $n = 2$, ця схема розглянута в [12]. Для цього потрібне наступне означення.

**Означення [11].** *Будемо говорити, що оператор* $F: \{f\} \to \{U_f\}$ *належить класу* $\mathcal{B}$ (*і писати* $F \in \mathcal{B}$), *якщо його значення* $U_f(\alpha, \varphi)$ *має такі властивості:*

1) $U_{f+g}(\alpha, \varphi) = U_f(\alpha, \varphi) + U_g(\alpha, \varphi)$, *де* $f = f(\varphi)$, $g = g(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, *належать класу* $L_p(\partial G)$, $1 \leq p < \infty$;

2) *для довільних точок* $(\alpha_1, \varphi)$, $(\alpha_2, \varphi) \in G$ *справедлива рівність*

$U_{U_f(\alpha_1,\cdot)}(\alpha_2,\varphi) = U_{U_f(\alpha_2,\cdot)}(\alpha_1,\varphi)$;

3) *для всіх точок еліпса з півосями* $a = c\,\mathrm{ch}\,\alpha$, $b = c\,\mathrm{sh}\,\alpha$, $0 < \alpha < \alpha_0$, *значення* $U_f$ *оператора* $F$ *є* $k$ *разів майже скрізь диференційовною функцією по* $\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ *і виконується нерівність типу С. Н. Бернштейна:*

$$\left\| \frac{\partial^k U_f(\alpha,\varphi)}{\partial\varphi^k} \right\|_{L_p} \le \frac{M\|f\|_{L_p}}{(\alpha_0-\alpha)^k},$$

$M = \mathrm{const} > 0$ *не залежить від* $\alpha$.

**Теорема 2.** *Нехай* $G$ — *еліптична область* (1), $f \in L_p(\partial G)$. *Якщо* $U_f(\alpha, \varphi)$ *є розв'язком задачі Діріхле для еліптичної області* $G$ *з крайовою умовою* $f$ *і для деякого* $\alpha$, $0 < \alpha < \alpha_0$, *і фіксованих цілих невід'ємних* $k$ *виконується умова*

$$\|U_f(\alpha,\cdot) - f(\cdot)\|_{L_p} \le A(\alpha_0-\alpha)^k \omega(\alpha_0-\alpha), \tag{13}$$

*де* $A = \mathrm{const} > 0$, $\omega(t)$, $t > 0$, — *функція типу м. н. порядку.* $n$, *яка у випадку* $k \ge 1$ *задовольняє умову Діні*

$$\int_0^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau < \infty,$$

*то функція* $f(\varphi)$ *майже скрізь на сегменті* $[0, 2\pi]$ *співпадає з функцією, яка має абсолютно неперервну похідну* $f^{(k-1)}(\varphi)$ *і похідну* $f^{(k)} \in L_p[0, 2\pi]$, $1 \le$ $\le p \le \infty$ (*при* $p = +\infty$ *неперервну*), *і її м. н.* $\omega_n(\alpha_0-\alpha, f^{(k)})$ *порядку* $n$ *задовольняє співвідношення*

$$\omega_n(\alpha_0-\alpha, f^{(k)}) \le \begin{cases} C_1(\alpha_0-\alpha)^n \displaystyle\int_{\alpha_0-\alpha}^{1} \frac{\omega(u)\,du}{u^{n+1}}, & k = 0; \\ C_2\left( \displaystyle\int_0^{\alpha_0-\alpha} \frac{\omega(u)\,du}{u} + (\alpha_0-\alpha)^n \int_{\alpha_0-\alpha}^{1} \frac{\omega(u)\,du}{u^{n+1}} \right), & k \ge 1, \end{cases} \tag{14}$$

*де* $0 < \alpha_0 - \alpha \le 1/2$, $C_1$ *і* $C_2$ — *додатні сталі, які не залежать від* $\alpha$.

***Доведення.*** Позначимо через $F$ оператор $F: \{f\} \to \{U_f\}$, де $f$ — крайова умова задачі Діріхле для еліптичної області, а розв'язок $U_f$ заданий формулою (2). Згідно з основною теоремою роботи [11], для доведення теореми 2 досить показати, що $F \in \mathcal{B}$. Для цього достатньо перевірити умови 1 – 3 означення класу $\mathcal{B}$ [11].

Умова 1 очевидна. Результати перевірки умов 2 та 3 подамо у вигляді наступних тверджень. Введемо спочатку позначення:

$$V_f(\alpha,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)P_1(\alpha,\varphi,t)\,dt; \quad W_f(\alpha,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)P_2(\alpha,\varphi,t)\,dt,$$

$$P_3(\alpha,\varphi,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-3n\alpha_0+n\alpha) - \exp(-n\alpha_0-n\alpha)}{1-\exp(-2n\alpha_0)} \cos(nt)\cos(n\varphi) +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-3n\alpha_0+n\alpha) - \exp(-n\alpha_0-n\alpha)}{1-\exp(-2n\alpha_0)} \sin(nt)\sin(n\varphi) =:$$

$$=: P_3'(\alpha,\varphi,t) + P_3''(\alpha,\varphi,t),$$

$$Q_f(\alpha, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)P_3'(\alpha, \varphi, t)\,dt; \quad R_f(\alpha, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)P_3''(\alpha, \varphi, t)\,dt.$$

Тоді, згідно з (8) справедлива рівність

$$U_f(\alpha, \varphi) = V_f(\alpha, \varphi) + W_f(\alpha, \varphi) + Q_f(\alpha, \varphi) + R_f(\alpha, \varphi). \tag{15}$$

Відмітимо, що запис $U_f(\alpha, \varphi)$ означає, що відповідний інтегральний оператор побудований за функцією $f(t)$, заданою на межі області. Аналогічний зміст мають інші позначення з індексами $f$, $U_f(\alpha_1, \cdot)$ і т. д.

**Лема 1.** *В прийнятих позначеннях для довільних точок* $(\alpha_1, \varphi)$ *і* $(\alpha_2, \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, *справедливі тотожності*

$$V_{V_f(\alpha_1,\cdot)}(\alpha_2, \varphi) = V_{V_f(\alpha_2,\cdot)}(\alpha_1, \varphi), \tag{16}$$

$$W_{W_f(\alpha_1,\cdot)}(\alpha_2, \varphi) = W_{W_f(\alpha_2,\cdot)}(\alpha_1, \varphi), \tag{17}$$

$$Q_{Q_f(\alpha_1,\cdot)}(\alpha_2, \varphi) = Q_{Q_f(\alpha_2,\cdot)}(\alpha_1, \varphi), \tag{18}$$

$$R_{R_f(\alpha_1,\cdot)}(\alpha_2, \varphi) = R_{R_f(\alpha_2,\cdot)}(\alpha_1, \varphi). \tag{19}$$

***Доведення леми*1.** Доведемо рівність

$$V_{V_f(\alpha_1,\cdot)}(\alpha_2, \varphi) - V_{V_f(\alpha_2,\cdot)}(\alpha_1, \varphi) = 0. \tag{16$'$}$$

Маємо

$$V_{V_f(\alpha_1,\cdot)}(\alpha_2, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)P_1(\alpha_1, t, \tau)\,d\tau\right)P_1(\alpha_2, \varphi, t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\tau)\int_0^{2\pi} P_1(\alpha_1, t, \tau)P_1(\alpha_2, \varphi, t)\,dt\,d\tau, \tag{16$''$}$$

$$V_{V_f(\alpha_2,\cdot)}(\alpha_1, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)P_1(\alpha_2, t, \tau)\,d\tau\right)P_1(\alpha_1, \varphi, t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} f(\tau)\int_0^{2\pi} P_1(\alpha_2, t, \tau)P_1(\alpha_1, \varphi, t)\,dt\,d\tau. \tag{16$'''$}$$

Розглянемо різницю внутрішніх інтегралів в $(16'')$ і $(16''')$:

$$\Phi(\tau, \varphi; \alpha_1, \alpha_2) = \int_0^{2\pi}[P_1(\alpha_1, t, \tau)P_1(\alpha_2, \varphi, t) -$$

$$-P_1(\alpha_2, t, \tau)P_1(\alpha_1, \varphi, t)]\,dt, \tag{16$^{\text{IV}}$}$$

де (згідно з (12))

$$P_1(\alpha_1, t, \tau) = \frac{1-\exp(2(\alpha_1-\alpha_0))}{1-2\exp(\alpha_1-\alpha_0)\cos(\tau-t)+\exp(2(\alpha_1-\alpha_0))},$$

$$P_1(\alpha_2, \varphi, t) = \frac{1-\exp(2(\alpha_2-\alpha_0))}{1-2\exp(\alpha_2-\alpha_0)\cos(t-\varphi)+\exp(2(\alpha_2-\alpha_0))},$$

$$P_1(\alpha_2, t, \tau) = \frac{1-\exp(2(\alpha_2-\alpha_0))}{1-2\exp(\alpha_2-\alpha_0)\cos(\tau-t)+\exp(2(\alpha_2-\alpha_0))},$$

$$P_1(\alpha_1, \varphi, t) = \frac{1-\exp(2(\alpha_1-\alpha_0))}{1-2\exp(\alpha_1-\alpha_0)\cos(t-\varphi)+\exp(2(\alpha_1-\alpha_0))}.$$

Проведемо заміну змінної інтегрування $t = u + (\tau + \varphi)/2$ і покладемо $v = (\tau - \varphi)/2$; тоді $\tau - t = -u + v$, $t - \varphi = u + v$. Врахувавши $2\pi$-періодичність функцій в $(16^{\mathrm{IV}})$, а також виконававши відповідні перетворення, одержимо

$$\Phi(\tau, \varphi; \alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\Phi}(u, v; \alpha_1, \alpha_2) =$$

$$= A(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(v) \sin(u)\, du}{B(u, v, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}, \qquad (16^{\mathrm{V}})$$

де

$$A(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = -64 \exp(2(\alpha_1 - \alpha_0) +$$

$$+ 2(\alpha_2 - \alpha_0)) \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_0) \operatorname{sh}(\alpha_2 - \alpha_0) \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1 - 2\alpha_0}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right),$$

$$B(u, v, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = [1 - 2\exp(\alpha_1 - \alpha_0)\cos(-u + v) + \exp(2(\alpha_1 - \alpha_0))][1 -$$

$$- 2\exp(\alpha_2 - \alpha_0)\cos(u + v) + \exp(2(\alpha_2 - \alpha_0))][1 -$$

$$- 2\exp(\alpha_2 - \alpha_0)\cos(-u + v) + \exp(2(\alpha_2 - \alpha_0))][1 -$$

$$- 2\exp(\alpha_1 - \alpha_0)\cos(u + v) + \exp(2(\alpha_1 - \alpha_0))].$$

Оскільки підінтегральна функція в $(16^{\mathrm{V}})$ непарна відносно $u$, то

$$\tilde{\Phi}(u, v; \alpha_1, \alpha_2) = 0 = \Phi(\tau, \varphi, \alpha_1, \alpha_2),$$

а тому $(16')$ виконується. Тотожність (16) доведена.

Тотожності (17) – (19) доводяться аналогічно. Встановимо, наприклад, рівність (17). Враховуючи формулу (6), маємо

$$W_f(\alpha, t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) P_2(\alpha, t, \tau)\, d\tau = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n(\alpha_0 - \alpha)}{\operatorname{sh} 2n\alpha_0} a_n(f) \cos nt,$$

де

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos(n\tau)\, d\tau.$$

Таким чином,

$$W_{W_f(\alpha_1, \cdot)}(\alpha_2, \varphi) = \frac{4}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n(\alpha_0 - \alpha_1)}{\operatorname{sh} 2n\alpha_0} \cos nt\, a_n(f) \right] \times$$

$$\times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n(\alpha_0 - \alpha_2)}{\operatorname{sh} 2n\alpha_0} \cos nt \cos n\varphi \right] dt =: \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} W_1(n, t, \varphi)\, dt,$$

$$W_{W_f(\alpha_2, \cdot)}(\alpha_1, \varphi) = \frac{4}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n(\alpha_0 - \alpha_2)}{\operatorname{sh} 2n\alpha_0} \cos nt\, a_n(f) \right] \times$$

$$\times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} n(\alpha_0 - \alpha_1)}{\operatorname{sh} 2n\alpha_0} \cos nt \cos n\varphi \right] dt =: \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} W_2(n, t, \varphi)\, dt.$$

Доведено, що при кожному $n \in N$ $\int_{\pi}^{-\pi} W_1(n, t, \varphi)\, dt = \int_{\pi}^{-\pi} W_2(n, t, \varphi)\, dt$.

При $n = 1$ маємо $W_1(1, t, \varphi) = W_2(1, t, \varphi)$. При $n = 2$, ввівши позначення

$$K = \frac{\operatorname{sh}(\alpha_0 - \alpha_1)}{\operatorname{sh}(2\alpha_0)}, \quad L = \frac{\operatorname{sh}(2(\alpha_0 - \alpha_1))}{\operatorname{sh}(4\alpha_0)},$$

$$D = \frac{\operatorname{sh}(\alpha_0 - \alpha_2)}{\operatorname{sh}(2\alpha_0)}, \quad E = \frac{\operatorname{sh}(2(\alpha_0 - \alpha_2))}{\operatorname{sh}(4\alpha_0)}$$

і виконавши відповідні перетворення, одержимо

$$W_1 = a_1 KD(\cos(t))^2 \cos(\varphi) + a_1 KE\cos(t)\cos(2t)\cos(2\varphi) +$$
$$+ a_2 LD\cos(t)\cos(2t)\cos(\varphi) + a_2 LE(\cos(2t))^2\cos(2\varphi),$$
$$W_2 = a_1 KD(\cos(t))^2 \cos(\varphi) + a_1 LD\cos(t)\cos(2t)\cos(2\varphi) +$$
$$+ a_2 KE\cos(t)\cos(2t)\cos(\varphi) + a_2 LE(\cos(2t))^2\cos(2\varphi).$$

Розглянемо різницю

$$W_{W_f(\alpha_1,\cdot)}(\alpha_2, \varphi) - W_{W_f(\alpha_2,\cdot)}(\alpha_1, \varphi) = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(W_1 - W_2)\,dt =$$

$$= (KE - LD)\left(a_1\cos(2\varphi) - a_2\cos(\varphi)\right)\frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t)\cos(2t)\,dt = 0.$$

Отже, при $n = 2$

$$W_{W_f(\alpha_1,\cdot)}(\alpha_2, \varphi) = W_{W_f(\alpha_2,\cdot)}(\alpha_1, \varphi).$$

При $n = 3$, позначивши

$$C = \frac{\operatorname{sh}(3(\alpha_0 - \alpha_1))}{\operatorname{sh}(6\alpha_0)}, \quad F = \frac{\operatorname{sh}(3(\alpha_0 - \alpha_2))}{\operatorname{sh}(6\alpha_0)}$$

і використавши прийняті раніше позначення, а також перетворивши вирази $W_1$ і $W_2$, дістанемо

$$W_1 - W_2 = \left(a_1\cos(2\varphi) - a_2\cos(\varphi)\right)(KE - LD)\cos(t)\cos(2t) +$$
$$+ \left(a_1\cos(3\varphi) - a_3\cos(\varphi)\right)(KF - CD)\cos(t)\cos(3t) +$$
$$+ \left(a_2\cos(3\varphi) - a_3\cos(2\varphi)\right)(LF - CE)\cos(2t)\cos(3t).$$

А тому в силу ортогональності тригонометричної системи на $[0, 2\pi]$ тотожність (17) вірна при $n = 3$. Завершується обгрунтування тотожності (17) методом математичної індукції. Лема 1 доведена.

**Лема 2.** *Для всіх точок еліпса з півосями* $a = c\operatorname{ch}\alpha$, $b = c\operatorname{sh}\alpha$, $0 < \alpha < \alpha_0$, *значення* $U_f$ *оператора* $F$ *є* $k$ *разів майже скрізь диференційовною функцією по* $\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, *і виконується нерівність*

$$\left\|\frac{\partial^k U_f(\alpha, \varphi)}{\partial\varphi^k}\right\|_{L_p} \le \frac{M\|f\|_{L_p}}{(\alpha_0 - \alpha)^k}, \tag{20}$$

*де* $M = \mathrm{const} > 0$ *не залежить від* $\alpha$.

***Доведення леми2.*** Виходячи з рівності (8), досить твердження довести для всіх трьох доданків правої частини.

1. Доведемо, що для фіксованих натуральних $k$ виконується нерівність

$$\left\|\frac{\partial^k V_f(\alpha, \varphi)}{\partial\varphi^k}\right\|_{L_p} \le \frac{M_1\|f\|_{L_p}}{(\alpha_0 - \alpha)^k}, \tag{21}$$

де $M_1 > 0$ — стала, що не залежить від $\alpha$.

В інтегралі, яким визначається $V_f(\alpha, \varphi)$, проведемо заміну $\tau = t - \varphi$ і, використовуючи нерівність Мінковського [9, с. 601], одержимо

$$\left\| \frac{\partial^k V_f(\varphi, r)}{\partial \varphi^k} \right\|_{L_p} \le \frac{\|f\|_{L_p}}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k P_1}{\partial \tau^k} \right| d\tau. \tag{21$'$}$$

Оцінимо інтеграл у правій частині нерівності (21′). Для цього, врахувавши (12), подамо ядро Пуассона у вигляді

$$P_1(\tau) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau)+r^2} = -1 + \frac{1}{1-r\exp(i\tau)} + \frac{1}{1-r\exp(-i\tau)}.$$

Тоді диференціюванням по $\tau$ одержимо формулу для похідної порядку $k$, $k = 1, 2, \ldots$ :

$$\frac{\partial^k P_1}{\partial \tau^k} = r(i)^k \left[ \frac{\exp(i\tau) Q_{k-1}^{(1)}(r, \exp(i\tau))}{(1-r\exp(i\tau))^{k+1}} + \frac{\exp(-i\tau) Q_{k-1}^{(2)}(r, \exp(-i\tau))}{(1-r\exp(-i\tau))^{k+1}} \right], \tag{21$''$}$$

де $Q_{k-1}^{(1)}(r, \exp(i\tau))$, $Q_{k-1}^{(2)}(r, \exp(-i\tau))$ — многочлени степеня $k-1$ по кожному з вказаних аргументів. Ці многочлени обмежені в замкнутому крузі $0 \le r \le 1$ сталою, що залежить тільки від степеня многочлена:

$$\left| Q_{k-1}^{(1)}(r, \exp(i\tau)) \right| \le A_1, \quad \left| Q_{k-1}^{(2)}(r, \exp(-i\tau)) \right| \le A_2. \tag{21$'''$}$$

Обчислимо модулі двох доданків в (21″). Маємо

$$\left| \frac{\exp(i\tau) Q_{k-1}^{(1)}(r, \exp(i\tau))}{(1-r\exp(i\tau))^{k+1}} \right|^2 = \frac{Q_{k-1}^{(1)}(r, \exp(i\tau)) \overline{Q_{k-1}^{(1)}(r, \exp(i\tau))}}{(1-r\exp(i\tau))^{k+1} (1-r\exp(-i\tau))^{k+1}} =$$

$$= \frac{\left| Q_{k-1}^{(1)}(r, \exp(i\tau)) \right|^2}{\left(1-2r\cos\tau+r^2\right)^{k+1}},$$

звідки

$$\left| \frac{\exp(i\tau) Q_{k-1}^{(1)}(r, \exp(i\tau))}{(1-r\exp(i\tau))^{k+1}} \right| = \frac{\left| Q_{k-1}^{(1)}(r, \exp(i\tau)) \right|}{\left(1-2r\cos\tau+r^2\right)^{(k+1)/2}}. \tag{21$^{\mathrm{IV}}$}$$

Аналогічно встановлюємо рівність

$$\left| \frac{\exp(-i\tau) Q_{k-1}^{(2)}(r, \exp(-i\tau))}{(1-r\exp(-i\tau))^{k+1}} \right| = \frac{\left| Q_{k-1}^{(2)}(r, \exp(-i\tau)) \right|}{\left(1-2r\cos\tau+r^2\right)^{(k+1)/2}}. \tag{21$^{\mathrm{V}}$}$$

З (21″) – (21$^{\mathrm{V}}$) одержуємо оцінку

$$\left| \frac{\partial^k P_1}{\partial \tau^k} \right| \le \frac{A_3}{\left(1-2r\cos\tau+r^2\right)^{(k+1)/2}}. \tag{21$^{\mathrm{VI}}$}$$

Враховуючи (21$^{\mathrm{VI}}$) і відомі співвідношення

$$\frac{1-r^2}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1-2r\cos t+r^2} = 1, \quad 1 - 2r\cos(t) + r^2 \ge (1-r)^2,$$

знаходимо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k P_1}{\partial \tau^k} \right| d\tau \le \frac{A_3}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\tau}{\left(1-2r\cos\tau+r^2\right)\left(1-2r\cos\tau \pm r^2\right)^{(k-1)/2}} \le$$

$$\leq \frac{A_3}{2\pi(1-r)^{k-1}(1-r^2)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)\,d\tau}{1-2r\cos\tau+r^2} = \frac{A_3}{(1+r)(1-r)^k} \leq \frac{A_4}{(1-r)^k}. \quad (21^{\mathrm{VII}})$$

Тому із $(21')$ і $(21^{\mathrm{VII}})$ отримуємо нерівність

$$\left\| \frac{\partial^k V_f(\varphi, r)}{\partial \varphi^k} \right\|_{L_p} \leq \frac{A_4 \| f \|_{L_p}}{(1-r)^k}. \quad (21^{\mathrm{VIII}})$$

Оскільки $1-r > (\alpha_0-\alpha)\exp(-\alpha_0)$, $0 < \alpha < \alpha_0$, то з $(21^{\mathrm{VIII}})$ одержуємо оцінку (21).

2. Доведемо, що для фіксованих натуральних $k$ виконується нерівність

$$\left\| \frac{\partial^k W_f(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^k} \right\|_{L_p} \leq \frac{M_2 \| f \|_{L_p}}{(\alpha_0-\alpha)^k}, \quad (22)$$

де $M_2 = \mathrm{const} > 0$.

Використовуючи знову нерівність Мінковського, дістаємо

$$\left\| \frac{\partial^k W_f(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^k} \right\|_{L_p} \leq \frac{\| f \|_{L_p}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k P_2}{\partial \varphi^k} \right| d\varphi.$$

Оцінимо інтеграл у правій частині $(21')$. Згідно з (6) $P_2$ подамо у вигляді

$$P_2(\alpha, \varphi, t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}(n(\alpha_0-\alpha)) - \mathrm{sh}(0)}{2\mathrm{sh}(n\alpha_0)\mathrm{ch}(n\alpha_0)} \cos nt \cos n\varphi.$$

За формулою скінченних приростів для функції $\mathrm{sh}(nx)$ на сегменті $[0, \alpha_0-\alpha]$ одержуємо

$$\mathrm{sh}(n(\alpha_0-\alpha)) - \mathrm{sh}\,0 = n(\alpha_0-\alpha)\,\mathrm{ch}\,(n\alpha^*) < n(\alpha_0-\alpha)\,\mathrm{ch}\,(n\alpha_0).$$

Оскільки $2\,\mathrm{sh}\,(n\alpha_0) = \exp(n\alpha_0) - \exp(-n\alpha_0) > \exp(n\alpha_0) - \exp(n(\alpha_0-\alpha))$, то за теоремою Лагранжа для функції $\exp(nx)$ на $[\alpha_0-\alpha, \alpha_0]$ знаходимо оцінку $\exp(n\alpha_0) - \exp(n(\alpha_0-\alpha)) = n\alpha \exp(n\alpha^{**}) > n(\alpha_0/2)\exp(n(\alpha_0-\alpha))$, якщо $\alpha_0 > \alpha > (\alpha_0/2)$. Для $P_2$ маємо оцінку

$$P_2(\alpha, \varphi, t) \leq \frac{4(\alpha_0-\alpha)}{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)\cos(n\varphi)}{\exp(n(\alpha_0-\alpha))}.$$

Тоді

$$\left| \frac{\partial P_2}{\partial \varphi} \right| \leq \left| \frac{4(\alpha_0-\alpha)}{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(nt)\sin(n\varphi)}{\exp(n(\alpha_0-\alpha))} \right| \leq \left| \frac{4(\alpha_0-\alpha)}{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\exp(n(\alpha_0-\alpha))} \right|.$$

Диференціюванням по $\varphi$ отримуємо оцінку для похідної порядку $k$, $k = 1, 2, \ldots$:

$$\left| \frac{\partial^k P_2}{\partial \varphi^k} \right| \leq \left| \frac{4(\alpha_0-\alpha)}{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{\exp(n(\alpha_0-\alpha))} \right|.$$

Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{\exp(nx)} = \frac{P_k(\exp(x))}{(\exp(x)-1)^{k+1}},$$

де $P_k(\exp(x))$ — многочлени степеня $k$, $\exp(\alpha_0-\alpha) < \exp(\alpha_0)$, $\exp(\alpha_0-\alpha) - 1 > \alpha_0-\alpha$, то одержуємо нерівність

$$\left|\frac{\partial^k P_2}{\partial\varphi^k}\right| \le \frac{A_1}{(\alpha_0-\alpha)^k}.$$

Оцінка (22) доведена.

3. Для третього доданку співвідношення (8) аналогічно доведенню нерівності (22) знаходимо оцінку

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial\varphi^k}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)P_3(\alpha,\varphi,t)\,dt\right]\right\|_{L_p} \le M_3\frac{\|f\|_{L_p}}{(\alpha_0-\alpha)^k}. \tag{23}$$

З (21) – (23) випливає оцінка (20). Лема 2 доведена.

**4.** Якщо функція $\omega(t)$ типу м. н. порядку $n$, яка фігурує в теоремах 1 та 2, задовольняє відому умову Зігмунда – Стечкіна [13, 14]

$$\int_0^t \frac{\omega(u)\,du}{u} + t^n\int_t^1 \frac{\omega(u)\,du}{u^{n+1}} \le C\,\omega(t),$$

$C=\mathrm{const}>0,\ 0<t\le 1/2,$ то при $k=0$ пряма і обернена теореми замикаються, що приводить до наступного твердження, яке дає конструктивну характеристику класу $H_p^\omega[0,2\pi]$.

**Теорема 3.** *Нехай* $U_f(\alpha,\varphi),\ 0<\alpha<\alpha_0,\ \varphi\in[0,2\pi]$, *— розв'язки задачі Діріхле для рівняння Лапласа в еліптичній області* $G$ (1) *з граничною функцією* $f\in L_p[0,2\pi],\ 1\le p<\infty$. *Для того щоб* $f\in H_p^\omega[0,2\pi]$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалось співвідношення*

$$\|U_f(\alpha,\cdot)-f(\cdot)\|_{L_p} \le C_1\,\omega(\alpha_0-\alpha),$$

*де* $C_1=\mathrm{const}>0,\ 0<\alpha_0-\alpha\le 1/2.$

1. *Górowski J.* On the Dirichlet problem for interior and for exterior of an elliptic domain // Comment. math. (Prace Mat.). – 1978. – **20**, № 2. – P. 337–340.
2. *Górowski J.* The Dirichlet problem for the elliptic domain and summability of the Fourier series // Ibid. – 1984. – **24**, № 2. – P. 257–261.
3. *Натансон И. П.* О порядке приближения непрерывной $2\pi$-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. – 1950. – **72**, № 1. – С. 11–14.
4. *Тиман А. Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Там же. – **74**, № 1. – С. 17–20.
5. *Геронимус Я. Л.* О порядке приближения посредством интеграла Пуассона // Там же. – 1959. – **129**, № 4. – С. 726–728.
6. *Буадзе А. И.* Об одной задаче П. Л. Ульянова // Сообщ. АН ГССР. – 1965. – **40**, № 3. – С. 545–550.
7. *Ульянов П. Л.* О приближении функций // Сиб. мат. журн. – 1964. – **5**, № 2. – С. 418–437.
8. *Горбайчук В. И.* Об обратных теоремах приближения гармоническими функциями // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 309–314.
9. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
10. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 508 с.
11. *Горбайчук В. И.* Обратные теоремы приближения специальными операторами продолжения и их приложения к некоторым задачам математической физики. – Киев, 1991. – 38 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 91.28).
12. *Горбайчук В. И.* Общая обратная теорема приближения функций операторами продолжения в каноническую область // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 3. – С. 8–16.
13. *Zygmund A.* Smooth functions // Duke Math. J. – 1945. – **12**, № 1. – P. 46–76.
14. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483–522.

Одержано 20.01.94