КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК 517.23

К. С. Акбаш, І. К. Мацак (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОДНЕ УТОЧНЕННЯ ЗАКОНУ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ СХЕМИ МАКСИМУМУ

A lower bound is found in the law of the iterated logarithm for the maximum scheme.

Найдена точная нижняя грань в законе повторного логарифма для схемы максимума.

Закон повторного логарифма (ЗПЛ) для сум незалежних випадкових величин (н. в. в.) Бернуллі вперше становив Хінчин [1]. У подальшому ЗПЛ для сум довільних н. в. в. інтенсивно досліджувався (див., наприклад, [2]).

Для схеми максимуму ЗПЛ вивчався у роботах [3 – 6]. Наведемо один із основних результатів по цій тематиці.

Нехай $\xi, \xi_1, \xi_2 \ldots$ — послідовність н. в. в. з функцією розподілу (ф. р.) $F(x)$ і F має додатну похідну $F'(x)$ для всіх достатньо великих x.

Покладемо $z_n = \max_{1\le i\le n} \xi_i$. Відомо [3, 5], що асимптотична поведінка $\{z_n\}$ тісно пов'язана з поведінкою при $x\to\infty$ функцій $f(x)$ та $g(x)$, визначених рівностями

$$f(x) = \frac{1-F(x)}{F'(x)},$$
$$g(x) = f(x)\ln\ln\left\{\frac{1}{1-F(x)}\right\}. \tag{1}$$

Так, у роботі [5] при умові

$$\lim_{t\to\infty} g'(t) = 0 \tag{2}$$

було отримано наступний ЗПЛ для схеми максимуму:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln n} = 1 \quad \text{м. н.}, \tag{3}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln n} = 0 \quad \text{м. н.}, \tag{4}$$

де

$$a_n = F^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right), \qquad F^{-1}(y) = \inf\{x\colon F(x)\ge y\} \quad \text{обернена до} \quad F(x).$$

Покладемо

$$R(x) = -\ln(1-F(x)) \qquad \text{або} \qquad F(x) = 1-\exp\big(-R(x)\big).$$

Звичайно, $R(x)$, як і $F(x)$, — диференційовна функція і

$$R'(x) = \frac{F'(x)}{1 - F(x)} = \frac{1}{f(x)} \quad \forall x > x_0. \tag{5}$$

Далі будемо використовувати поняття правильно змінної функції (означення див. у [7, с. 317]).

Порівняння ЗПЛ (3), (4) із класичним ЗПЛ дозволяє висунути припущення, що рівність (4) можна уточнити. Виявляється, що це дійсно так. А саме, має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай функція $f(x)$ визначена рівністю* (1). *Якщо виконується одна з умов*:

(i) $f(x)$ *правильно змінюється при $x \to \infty$ і для будь-якого $t \in (0, 1)$*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dF(x)}{1 - F(tx)} < \infty, \tag{6}$$

(ii) $h(x) = f(R^{-1}(x))$ *правильно змінюється при $x \to \infty$,*

то

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n) \ln\ln n} = 1, \tag{7}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - a_n}{f(a_n) \ln\ln\ln n} = -1. \tag{8}$$

Зауваження. **1.** Умова (6) є відомою (див. [8, с. 206], умови (54), (55)). Вона достатня для відносної стійкості м. н. z_n, тобто при виконанні (6)

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{a_n} = 1\right) = 1. \tag{9}$$

2. Мабуть, умова (2) в деякому сенсі більш широка, ніж умови (i), (ii) теореми 1. Але приклади, наведені в кінці роботи, показують, що ці умови виконуються для досить широкого класу функцій розподілу. Неважко навести приклад функції розподілу, для якої умова (2) не виконується, а умова (i) виконується.

В доведенні теореми 1 будуть використані кілька допоміжних лем.

Лема 1. *Нехай (ξ_i) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (н. о. р. в. в.) з ф. р. $F(x)$. Нехай (u_n) — така неспадна послідовність дійсних чисел, що послідовність $n\,[1 - F(u_n)]$ також є неспадною. Крім того, припустимо, що функція $F(x)$ неперервна. Тоді при $u_n < \omega(F)$, де $\omega(F) = \sup\,(x\colon F(x) < 1)$, ймовірність*

$$\mathbf{P}\left(z_n \le u_n \ \ \textit{н.ч.р.}\right),$$

де н. ч. р. — нескінченне число разів, дорівнює нулю або одиниці у відповідності з тим, збігається чи розбігається ряд

$$\sum_{j=1}^\infty \left[1 - F(u_j)\right] \exp\Big\{-j\left[1 - F(u_j)\right]\Big\}. \tag{10}$$

Доведення леми 1 див. у [8].

Лема 2. *Нехай* (ξ_i) — *послідовність н. в. в. з ф. р.* $F(x) = 1 - \exp(-x)$. *Тоді м. н.*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{z_n - \ln n}{\ln\ln n} = 1, \tag{11}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - \ln n}{\ln\ln\ln n} = -1. \tag{12}$$

Доведення. Оскільки $a_n = \ln n$, $f(a_n) = 1$, то (11) випливає з (3). Тому залишається встановити лише (12). Нехай $1 > \varepsilon > 0$. Розглянемо два випадки:

1) $u_n = \ln n + (-1-\varepsilon)\ln\ln\ln n$,

2) $u_n = \ln n + (-1+\varepsilon)\ln\ln\ln n$

при $n \geq 3$.

Оцінимо суму ряду (10) у випадку 1:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \exp\Big\{-\ln n - (-1-\varepsilon)\ln\ln\ln n\Big\} \exp\Big\{-n\exp\{-\ln n - (-1-\varepsilon)\ln\ln\ln n\}\Big\} =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\ln\ln n)^{\varepsilon+1}}{n} \exp\Big\{-(\ln\ln n)^{\varepsilon+1}\Big\}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує n_ε таке, що при $n > n_\varepsilon$

$$(\ln\ln n)^{\varepsilon+1} \geq 2\ln\ln n \quad \Rightarrow \quad \exp\big\{-(\ln\ln n)^{\varepsilon+1}\big\} \leq (\ln n)^{-2}.$$

Тоді

$$\sum_{n\geq n_\varepsilon}^{\infty} \frac{(\ln\ln n)^{\varepsilon+1}}{n} \exp\Big\{-(\ln\ln n)^{\varepsilon+1}\Big\} \leq \sum_{n\geq n_\varepsilon}^{\infty} \frac{(\ln\ln n)^{\varepsilon+1}}{n(\ln n)^2} < \infty. \tag{13}$$

Оскільки ряд (13) збігається, то збігається і ряд (10). Елементарно перевіряється, що $n\big(1 - F(u_n)\big)$ — неспадна послідовність. Таким чином, згідно з лемою 1,

$$\mathbf{P}\left(\frac{z_n - \ln n}{\ln\ln\ln n} < -1-\varepsilon \ \text{ н. ч. р.}\right) = 0.$$

Звідси

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - \ln n}{\ln\ln\ln n} \geq -1-\varepsilon\right) = 1.$$

Оскільки ε довільне, то

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - \ln n}{\ln\ln\ln n} \geq -1\right) = 1. \tag{14}$$

Розглянемо ряд (10) у випадку 2:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \exp\{-\ln n - (\varepsilon-1)\ln\ln\ln n\} \exp\{-n\exp\{-\ln n - (\varepsilon-1)\ln\ln\ln n\}\} =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\ln\ln n)^{1-\varepsilon}}{n} \exp\left\{-(\ln\ln n)^{1-\varepsilon}\right\} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\ln\ln n)^{1-\varepsilon}}{n} \exp\left\{-(\ln\ln n)\right\} =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\ln\ln n)^{1-\varepsilon}}{n\ln n} = \infty. \tag{15}$$

Оскільки ряд (10) розбігається, то

$$\mathbf{P}\left(\frac{z_n - \ln n}{\ln\ln\ln n} < -1 + \varepsilon \ \text{ н.ч.р.}\right) = 1.$$

Звідси

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - \ln n}{\ln\ln\ln n} \leq -1 + \varepsilon\right) = 1,$$

а отже,

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{z_n - \ln n}{\ln\ln\ln n} \leq -1\right) = 1. \tag{16}$$

Із (14) і (16) випливає (12).

Лему 2 доведено.

Лема 3 [9]**.** *Нехай $H(x)$ правильно змінюється при $x \to \infty$, $c_n \to \infty$, $d_n \to \infty$, $c_n/d_n \to 1$ при $n \to \infty$.*

Тоді

$$\frac{H(c_n)}{H(d_n)} \to 1.$$

Зауважимо, що в [9] встановлено більш загальний результат, ніж наведений вище.

***Доведення теореми* 1**. (i) Нехай τ — стандартна експоненціально розподілена в. в., $\mathbf{P}(\tau < x) = 1 - \exp(-x)$, $x > 0$, (τ_i) — незалежні копії τ, $z_n^e = \max_{1\leq i\leq n} \tau_i$.

Нехай ξ — в. в. з ф. р. $F(x) = 1 - \exp(-R(x))$, що задовольняє умову (i) теореми 1, (ξ_i) — незалежні копії ξ, $z_n = \max_{1\leq i\leq n} \xi_i$.

Відомо (див., наприклад, [5]), що

$$\tau \overset{d}{=} R(\xi), \qquad \text{а отже,} \qquad z_n^e \overset{d}{=} R(z_n).$$

Позначення $\xi_1 \overset{d}{=} \xi_2$ означає однакову розподіленість в. в. ξ_1 та ξ_2. Зрозуміло, що

$$a_n = R^{-1}(\ln n).$$

Тоді, враховуючи (5), маємо

$$z_n^e - \ln n \overset{d}{=} R(z_n) - R(R^{-1}(\ln n)) = R(z_n) - R(a_n) =$$

$$= \frac{z_n - a_n}{f(\theta_n a_n + (1-\theta_n) z_n)}, \quad 0 \leq \theta_n \leq 1.$$

Звідси

$$\frac{z_n^e - \ln n}{\ln\ln\ln n} \stackrel{d}{=} \frac{f(a_n)}{f(\theta_n a_n + (1-\theta_n) z_n)} \left(\frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln\ln n} \right), \quad n \geq 3. \tag{17}$$

За рівністю (9) при $n \to \infty$

$$\frac{\theta_n a_n + (1-\theta_n) z_n}{a_n} \to 1 \quad \text{м. н.}$$

Оскільки $f(x)$ правильно змінюється, то за лемою 3

$$\frac{f(a_n)}{f(\theta_n a_n + (1-\theta_n) z_n)} \to 1 \quad \text{м. н.} \tag{18}$$

У відповідності з лемою 2 для послідовності (z_n^e) виконуються рівності (11), (12).

Об'єднуючи (17), (18) та (12), відразу одержуємо рівність (8).

(ii) Міркування в цьому випадку подібні наведеним вище. Маємо $\xi \stackrel{d}{=} R^{-1}(\tau)$ і, таким чином, $z_n \stackrel{d}{=} R^{-1}(z_n^e)$.

Далі запишемо

$$z_n - a_n \stackrel{d}{=} R^{-1}(z_n^e) - R^{-1}(\ln n) = (z_n^e - \ln n) f(R^{-1}(\theta_n \ln n + (1-\theta_n) z_n^e)).$$

Отже,

$$\frac{z_n - a_n}{f(a_n)\ln\ln\ln n} \stackrel{d}{=} \frac{z_n^e - \ln n}{\ln\ln\ln n} \left(\frac{h(\theta_n \ln n + (1-\theta_n) z_n^e)}{h(\ln n)} \right), \quad n \geq 3. \tag{19}$$

Відомо [8, с. 200], що при $n \to \infty$

$$\frac{z_n^e}{\ln n} \to 1 \quad \text{м. н.},$$

$h(x)$ правильно змінюється при $x \to \infty$ і, таким чином, за лемою 3

$$\frac{h(\theta_n \ln n + (1-\theta_n) z_n^e)}{h(\ln n)} \to 1 \quad \text{м. н.} \tag{20}$$

Із співвідношень (19), (20) та (12) отримуємо рівність (8).

Рівність (7) у обох випадках одержуємо аналогічно.

Приклади. **1.** Неважко перевірити, що умову (i) теореми 1 задовольняють функції

$$R(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \alpha > 0, \qquad \text{та} \qquad R(x) = \begin{cases} (\ln x)^\alpha, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases} \quad \alpha > 1,$$

а умову (ii) — функції

$$R(x) = \begin{cases} \exp(x^\alpha), & x > 1, \quad \alpha > 0, \\ \text{лінійна і неперервна на} \quad [0,1], & R(0) = 0, \end{cases}$$

та

$$R(x) = \begin{cases} \exp(\exp(x^\alpha)), & x > 1, \quad \alpha > 0, \\ \text{лінійна і неперервна на} \quad [0,1], & R(0) = 0, \end{cases}$$

2. Якщо ξ — стандартна нормальна в. в. з ф. р. $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(s)ds, \qquad \varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right),$$

то при $n \to \infty$

$$a_n = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = (2\ln n)^{1/2} - \frac{\ln\ln n + \ln(4\pi) + o(1)}{2(2\ln n)^{1/2}},$$

$$\frac{1}{f(x)} = R'(x) = \frac{\varphi(x)}{1 - \Phi(x)} = c(x)x,$$

де $c(x) \to 1$ при $x \to \infty$ (близькі обчислення можна знайти в [10, с. 25, 26]). Тоді рівності (7) та (8) запишуться так:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{(2\ln n)^{1/2}\left(z_n - (2\ln n)^{1/2}\right)}{\ln\ln n} = \frac{1}{2},$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{(2\ln n)^{1/2}\left(z_n - (2\ln n)^{1/2} + \frac{\ln\ln n}{2(2\ln n)^{1/2}}\right)}{\ln\ln\ln n} = -1.$$

Остання рівність дещо уточнює відомий результат із [3, 4].

1. *Khintchin A.* Uber einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Fund. Math. – 1924. – **6**, № 1. – P. 9 – 12.
2. *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
3. *Pickands J.* Sample sequences of maxima // Ann. Math. Statist. – 1967. – **38**, № 5. – P. 1570 – 1574.
4. *Pickands J.* An iterated logarithm law for the maximum in a stationary Gaussian sequence // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1969. – **12**, № 3. – S. 344 – 355.
5. *De Haan L., Hordijk A.* The rate of growth of sample maxima // Ann. Math. Statist. – 1972. – **43**. – P. 1185 – 1196.
6. *De Haan L., Ferreira A.* Extreme values theory: An Introduction. – Berlin: Springer, 2006.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 752 с.
8. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
9. *Булдигін В. В., Кльосов О. І., Штайнебах Й. Г.* Про деякі властивості асимптотично квазіобернених функцій та їх застосування // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2004. – Вип. 70. – С. 9 – 25.
10. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989. – 392 с.

Одержано 20.01.12,
після доопрацювання — 14.06.12