УДК 517.5

Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ В КОНЕЧНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

We establish a series of criteria for the existence of regular solutions of the Dirichlet problem for degenerate Beltrami equations in arbitrary Jordan domains. We also formulate the corresponding criteria for the existence of pseudoregular and multivalued solutions of the Dirichlet problem in the case of finitely connected domains.

Встановлено ряд критеріїв існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі у довільних жорданових областях. Відповідні критерії існування псевдорегулярних та багатозначних розв'язків задачі Діріхле сформульовано також для випадку скінченнозв'язних областей.

1. Введение. Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ почти всюду (п. в.) *Уравнением Бельтрами* называется уравнение вида

$$f_{\bar z} = \mu(z) f_z \,, \tag{1}$$

где $f_{\bar z} = \bar\partial f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

— *дилатацией* уравнения (1). Уравнение (1) называется *вырожденным*, если дилатация K_μ является существенно неограниченной, т. е. $K_\mu \notin L^\infty(D)$.

Краевые задачи для уравнений Бельтрами впервые изучались в известной диссертации Римана, который рассматривал частный случай аналитических функций, когда $\mu(z) \equiv 0$, в работах Гильберта (1904, 1924), который исследовал соответствующую систему Коши – Римана для действительной и мнимой частей аналитических функций $f = u + iv$, а также в работе Пуанкаре (1910) по приливам. Задача Дирихле хорошо изучена для равномерно эллиптических систем уравнений (см., например, [1, 2]).

Задача Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами в единичном круге изучалась в работе [3]. Заметим, что критерии существования решений задачи Дирихле, сформулированные в последней работе, не инвариантны относительно конформных отображений Римана. Недавние результаты о существовании сильных кольцевых решений для вырожденных уравнений Бельтрами в [4, 5], а также развитие теории граничного поведения кольцевых гомеоморфизмов (см., например, [6]) позволяют получить дальнейшие продвижения в области существования регулярных решений задачи Дирихле в более общих областях.

Любая аналитическая функция f в области D удовлетворяет простейшему уравнению Бельтрами

$$f_{\bar z} = 0,$$

когда $\mu(z) \equiv 0$. Если аналитическая функция f задана в единичном круге $\mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\big\}$ и непрерывна в его замыкании, то по формуле Шварца (см., например, § 8 гл. III ч. 3 в [7, с. 346])

$$f(z) = i\,\mathrm{Im}\, f(0) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \mathrm{Re}\, f(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

и, таким образом, аналитическая функция f в единичном круге $\mathbb{D}$ определяется с точностью до чисто мнимого числа ic, $c = \mathrm{Im}\, f(0)$, ее реальной частью $\varphi(\zeta) = \mathrm{Re}\, f(\zeta)$ на границе единичного круга.

Задача Дирихле для уравнений Бельтрами (1) в ограниченной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ состоит в нахождении непрерывной функции $f\colon D \to \mathbb{C}$, имеющей частные производные первого порядка п. в. и удовлетворяющей уравнению (1) п. в., а также граничному условию

$$\lim_{z\to\zeta} \mathrm{Re}\, f(z) = \varphi(\zeta) \quad \forall \zeta \in \partial D \tag{2}$$

для заданной непрерывной функции $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$. Очевидно, что если f — решение задачи Дирихле, то и функция $F(z) = f(z) + ic$ для любой постоянной $c \in \mathbb{R}$ также является ее решением.

В дальнейшем $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ обозначает класс отображений с обобщенными первыми частными производными по Соболеву (см., например, [1, 2]). При $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$ *регулярное решение* такой задачи является непрерывным в $\mathbb{C}$, дискретным и открытым отображением $f\colon D \to \mathbb{C}$ класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \neq 0$ п. в., удовлетворяющим условию (2) и п. в. уравнению (1). Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ *дискретно*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек, и *открыто*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{C}$. В случае $\varphi(\zeta) \equiv c$, $\zeta \in \partial D$, под *регулярным решением* задачи Дирихле (2) для уравнения Бельтрами (1) будем понимать любую постоянную функцию $f(z) = c + ic'$, $c' \in \mathbb{R}$.

Как впервые заметил Боярский (см., например, § 6 гл. 4 в [2]), в случае многосвязных областей задача Дирихле для уравнений Бельтрами, вообще говоря, не имеет решений в классе непрерывных (однозначных) в $\mathbb{C}$ функций. Поэтому естественно возникает вопрос: нельзя ли в этом случае существование решения задачи Дирихле получить в более широком классе? Оказывается можно, если решение задачи будем искать в классе функций, имеющих некоторое количество заранее фиксированных изолированных полюсов внутри области D. Точнее, при $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$ *псевдорегулярное решение* такой задачи является непрерывным в $\overline{\mathbb{C}}$, дискретным и открытым отображением $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ вне полюсов с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \neq 0$ п. в., удовлетворяющим уравнению (1) п. в. и граничному условию (2).

В многосвязных областях D в $\mathbb{C}$ помимо псевдорегулярных решений задача Дирихле (2) для уравнений Бельтрами (1) допускает многозначные решения в духе теории многозначных аналитических функций. Говорим, что непрерывное, дискретное и открытое отображение $f\colon B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$, где $B(z_0, \varepsilon_0) \subset D$, является *локальным регулярным решением* уравнения (1), если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $J_f \neq 0$ и f удовлетворяет уравнению (1) п. в. Два локальных регулярных решения $f_0\colon B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$ и $f_*\colon B(z_*, \varepsilon_*) \to \mathbb{C}$ уравнения (1) будем называть *продолжением друг друга*, если существует конечная цепь таких решений $f_i\colon B(z_i, \varepsilon_i) \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, m$, что $f_1 = f_0$, $f_m = f_*$ и $f_i(z) \equiv f_{i+1}(z)$ для $z \in E_i := B(z_i, \varepsilon_i) \cap B(z_{i+1}, \varepsilon_{i+1}) \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, m-1$. Совокупность локальных регулярных решений $f_j\colon B(z_j, \varepsilon_j) \to \mathbb{C}$, $j \in J$, будем называть *многозначным решением уравнения* (1) в D, если круги $B(z_j, \varepsilon_j)$ накрывают всю область D и f_j

попарно являются продолжениями друг друга в этой совокупности. Многозначное решение (1) будем называть *многозначным решением задачи Дирихле* (2), если $u(z) = \mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Re}\, f_j(z)$, $z \in B(z_j, \varepsilon_j)$, $j \in J$, является однозначной функцией в D, которая удовлетворяет условию (2).

Здесь мы приводим соответствующие теоремы о существовании регулярных решений задачи Дирихле (2) для уравнения Бельтрами (1) в произвольных жордановых областях, а также псевдорегулярных и многозначных решений в многосвязных областях. Необходимо заметить, что проблема существование решений соответствующей задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами с двумя характеристиками

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z + \nu(z) \overline{f_z}$$

остается открытой, хотя соответствующие теоремы существования регулярных гомеоморфных решений (1) класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ были установлены в статьях [8 – 10]. Это важная проблема, так как уравнения Бельтрами второго рода

$$f_{\bar{z}} = \nu(z) \overline{f_z}$$

играют важную роль во многих задачах математической физики (см., например, [11]). Однако решение этой проблемы потребует существенной модификации нашего подхода.

2. Определения и предварительные замечания. Пусть задано семейство Γ кривых γ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Борелевскую функцию $\varrho\colon \mathbb{C} \to [0, \infty]$ называют *допустимой* для Γ $\big($пишут $(\varrho \in \mathrm{adm}\, \Gamma)\big)$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(z)\, |dz| \geqslant 1 \quad \forall\, \gamma \in \Gamma\,.$$

Конформным модулем семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \mathrm{adm}\, \Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \varrho^2(z)\, dm(z)\,,$$

где $dm(z)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{C}$.

Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $d_0 = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$ и $Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}\colon r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Далее, как обычно, $\Delta(E, F; D)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу (см., например, [12]) и тесно связано с изучением вырожденных уравнений Бельтрами (1) на плоскости [13, 14]. Следуя работе [13] (см. также [14]), говорим, что гомеоморфизм f из области D в $\mathbb{C}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $z_0 \in D$, если соотношение

$$M\left(\Delta\left(fS_1, fS_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_A Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z) \tag{3}$$

выполнено для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для любой измеримой (по Лебегу) функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \geqslant 1\,. \tag{4}$$

Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом* в D, если условие (3) выполнено для всех точек $z_0 \in D$.

В работах [4, 5] впервые рассматривались кольцевые Q-гомеоморфизмы в граничных точках областей D. Гомеоморфизм f из области D в $\mathbb{C}$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в граничной точке* $z_0 \in \partial D$, если

$$M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2; fD\right)\right) \leqslant \int\limits_{A\cap D} Q(z)\cdot\eta^2(|z-z_0|)\,dm(z) \tag{5}$$

для любого кольца $A = A(z_0, r_1, r_2)$ и произвольных континуумов C_1 и C_2 в D, которые принадлежат различным компонентам дополнения кольца A в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащим z_0 и ∞ соответственно, и для любой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, удовлетворяющей условию (4). Говорим, что гомеоморфизм f из D в $\overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом* в $\overline{D}$, если условие (5) выполнено для всех точек $z_0 \in \overline{D}$.

Напомним также следующие топологические понятия. Область $D \subset \mathbb{C}$ называется *локально связной в точке* $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки z_0 существует окрестность $V \subseteq U$ точки z_0 такая, что $V \cap D$ связно. Заметим, что каждая жорданова область D в $\mathbb{C}$ является локально связной в любой точке ∂D (см., например, [15, с. 66]).

Будем говорить, что граница ∂D *слабо плоская в точке* $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки z_0 и любого числа $P > 0$ найдется окрестность $V \subset U$ точки z_0 такая, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant P$$

для всех континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Границу ∂D будем называть *слабо плоской*, если она слабо плоская в каждой точке из ∂D.

Замечание **1.** Известно, что многие регулярные области, такие как выпуклые, гладкие, липшицевы, равномерные, области квазиэкстремальной длины по Герингу – Мартио, имеют слабо плоские границы (см., например, [16]).

Напомним, что функция $\psi\colon D \to \mathbb{R}$, $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, называется функцией *ограниченного среднего колебания* по Джону – Ниренбергу (сокращенно $\psi \in \mathrm{BMO}$), если

$$\|\psi\|_* = \sup_{B\subset D} \frac{1}{|B|}\int\limits_B |\psi(z) - \psi_B|\,dm(z) < \infty\,,$$

где точная верхняя грань берется по всем кругам $B \subset D$, а ψ_B — среднее значение функции ψ в круге B. Пишем $\psi \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$, если $\psi \in \mathrm{BMO}(G)$, где G — область в $\mathbb{C}$, содержащая $\overline{D}$.

Следуя работе [17], говорим, что функция $\psi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $z_0 \in D$ $\big($пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(z_0)\big)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(z_0,\varepsilon)} \left|\psi(z) - \widetilde{\psi}_\varepsilon\right| dm(z) < \infty\,, \tag{6}$$

где $B(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < \varepsilon\}$, а $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ — среднее значение ψ в круге $B(z_0,\varepsilon)$. Пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(D)$, если (6) выполнено для каждой точки $z_0 \in D$. Также пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(\overline{D})$, если ψ задана в некоторой области G в $\mathbb{C}$, содержащей $\overline{D}$, и $\psi \in \mathrm{FMO}(z_0)$ для всех $z_0 \in \overline{D}$.

Как известно, $L^\infty(D) \subset \mathrm{BMO}(D) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ для всех $p \in [1,\infty)$. Однако $\mathrm{FMO}(D)$ не является подклассом $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ ни для какого $p > 1$, хотя $\mathrm{FMO}(D) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ (см., например, [14, с. 211]). Таким образом, FMO существенно шире $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}$.

Точка $z_0 \in D$ называется *точкой Лебега* функции $\psi\colon D \to \mathbb{R}$, если ψ интегрируема в окрестности z_0 и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \ \fint_{B(z_0,\varepsilon)} |\psi(z) - \psi(z_0)|\, dm(z) = 0\,.$$

Известно, что для функции $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ почти все точки D являются ее точками Лебега.

Как очевидно из неравенства треугольника, если для некоторого набора чисел $\psi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, выполнено условие

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(z_0,\varepsilon)} |\psi(z) - \psi_\varepsilon|\, dm(z) < \infty\,,$$

то ψ имеет конечное среднее колебание в точке z_0.

В частности, если для точки $z_0 \in D$ выполнено условие

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(z_0,\varepsilon)} |\psi(z)|\, dm(z) < \infty\,,$$

то ψ имеет конечное среднее колебание в точке z_0.

***Замечание* 2.** Если неотрицательная функция $\psi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке $z_0 \in D$, то для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ выполнено условие

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} \frac{\psi(z)\, dm(z)}{\left(|z - z_0| \log \frac{1}{|z-z_0|}\right)^2} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

(см. следствие 2.3 в [17]).

3. О задаче Дирихле в односвязных областях. Начнем со следующего критерия существования регулярных решений задачи Дирихле (2) для уравнения Бельтрами (1) в произвольных (ограниченных) жордановых областях D в $\mathbb{C}$, сформулированного в терминах контролируемой расходимости интеграла от дилатации K_μ с ядрами общего вида.

Лемма 1. *Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$, $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в. и $K_\mu \in L^1(D)$. Предположим, что для каждого $z_0 \in \overline{D}$ выполнено условие*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_\mu(z) \cdot \psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z-z_0|)\, dm(z) = o\left(I^2_{z_0}(\varepsilon)\right) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0 \tag{7}$$

для некоторого $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$ и однопараметрического семейства измеримых функций $\psi_{z_0,\varepsilon}\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, таких, что

$$0 < I_{z_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty\, .$$

Тогда уравнение Бельтрами (1) *имеет регулярное решение f задачи Дирихле* (2) *для любой непрерывной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$.*

В условии (7) мы предполагаем, что K_μ продолжена нулем вне области D.

Доказательство. Пусть F — регулярное гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\text{loc}}$, которое является кольцевым Q-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q = K_\mu$ и существует по лемме 4.1 из [4] в силу условия (7). Заметим, что $\overline{\mathbb{C}} \setminus D^*$, где $D^* = F(D)$, не может состоять из единственной точки ∞, так как в противном случае граница D^* была бы слабо плоской и по лемме 1 и теореме 3 из работы [6] F должно было бы иметь гомеоморфное продолжение в $\overline{D}$, что невозможно, поскольку граница D состоит более чем из одной точки. Кроме того, область D^* односвязна (см., например, лемму 5.3 в [17] или лемму 6.5 в [14]). Таким образом, по теореме Римана (см., например, теорему II.2.1 в [18]) D^* можно отобразить на единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ с помощью конформного отображения R. В силу инвариантности модуля при конформных отображениях $g\colon = R \circ F$ вновь является регулярным гомеоморфным решением уравнения Бельтрами (1), которое является кольцевым Q-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q = K_\mu$ и отображает D на $\mathbb{D}$. Более того, по лемме 1 и теореме 3 в [6] g допускает продолжение до гомеоморфизма $g_*\colon \overline{D} \to \overline{\mathbb{D}}$, так как $\mathbb{D}$ имеет слабо плоскую границу, а жорданова область D локально связна на границе.

Будем искать решение исходной задачи Дирихле (2) в виде $f = h \circ g$, где h — аналитическая функция в $\mathbb{D}$ с граничным условием

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} h(z) = \varphi(g_*^{-1}(\zeta)) \quad \forall \zeta \in \partial\mathbb{D}\, .$$

Как известно, аналитическая функция h восстанавливается в $\mathbb{D}$ с помощью формулы Шварца (см., например, § 8 гл. III ч. 3 в [7]) по ее действительной части на границе с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \varphi \circ g_*^{-1}(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\zeta}\, .$$

Как легко видеть, функция $f = h \circ g$ дает искомое регулярное решение задачи Дирихле (2) для уравнения Бельтрами (1).

Лемма доказана.

По лемме 1 с выбором $\psi_{z_0,\varepsilon}(t) \equiv \dfrac{1}{t} \log \dfrac{1}{t}$ (см. замечание 2) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\mu\colon D\to\mathbb{C}$ — *измеримая в жордановой области* D *в* $\mathbb{C}$ *функция такая, что* $|\mu(z)|<1$ *п. в. и*

$$K_\mu(z)\leqslant Q(z)\quad \text{п. в.} \tag{8}$$

для некоторой функции $Q\colon\mathbb{C}\to[0,\infty]$ *класса* $\mathrm{FMO}(\overline{D})$. *Тогда для любой непрерывной функции* $\varphi\colon\partial D\to\mathbb{R}$ *уравнение Бельтрами* (1) *имеет регулярное решение задачи Дирихле* (2).

Следствие **1.** *Теорема* 1 *остается в силе, если условие* (8) *имеет место для некоторой функции* $Q\colon\mathbb{C}\to[0,\infty]$ *класса* $\mathrm{BMO}(\overline{D})$.

Следствие **2.** *Теорема* 1 *остается в силе, если в условии* (8) *все точки* $z\in\overline{D}$ *являются точками Лебега локально интегрируемой функции* $Q\colon\mathbb{C}\to[0,\infty]$.

Следствие **3.** *Теорема* 1 *также имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\ \fint_{B(z_0,\varepsilon)} K_\mu(z)\,dm(z)<\infty\quad\forall z_0\in\overline{D}\,.$$

Как и в лемме 1, здесь и далее подразумевается, что K_μ продолжена нулем вне области D.

Теорема 2. *Пусть* $\mu\colon D\to\mathbb{C}$ — *измеримая в жордановой области* D *в* $\mathbb{C}$ *функция с* $|\mu(z)|<1$ *п. в. такая, что* $K_\mu\in L^1(D)$ *и*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)}\frac{dr}{\|K_\mu(z_0,r)\|_1(r)}=\infty\quad\forall z_0\in\overline{D}\,,$$

где $\|K_\mu\|_1(z_0,r)=\int_{\gamma_r}K_\mu(z)|dz|$ — *нормы в* L^1 *функции* K_μ *на окружностях* $S(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}\colon|z-z_0|=r\}$, $0<r<\delta(z_0)<d(z_0)$, $d(z_0)=\sup_{z\in D}|z-z_0|$. *Тогда уравнение Бельтрами* (1) *имеет регулярное решение задачи Дирихле* (2) *для любой непрерывной функции* $\varphi\colon\partial D\to\mathbb{R}$.

Доказательство. Теорема 2 следует из леммы 1 при специальном выборе

$$\psi_{z_0,\varepsilon}(t)\equiv\psi_{z_0}(t)=\begin{cases}1/\left[tk_{z_0}(t)\right], & t\in(0,\varepsilon_0),\\ 0, & t\in[\varepsilon_0,\infty),\end{cases}$$

где $\varepsilon_0=\varepsilon(z_0)$ и $k_{z_0}(t)$ — среднее значение $K_\mu(z)$ на окружности $S(z_0,t)$.

Следствие **4.** *Теорема* 2 *имеет место, если*

$$k_{z_0}(\varepsilon)=O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\qquad\text{при}\quad\varepsilon\to0\quad\forall z_0\in\overline{D}\,,$$

где $k_{z_0}(\varepsilon)$ — *среднее значение функции* K_μ *на окружности* $S(z_0,\varepsilon)$.

Из теоремы 2, используя теорему 3.1 из работы [19], получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $\mu\colon D\to\mathbb{C}$ — *измеримая в жордановой области* D *в* $\mathbb{C}$ *функция с* $|\mu(z)|<1$ *п. в. такая, что*

$$\int\limits_D\Phi(K_\mu(z))\,dm(z)<\infty\,, \tag{9}$$

где $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *— неубывающая выпуклая функция с условием*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{10}$$

для некоторого $\delta > \Phi(0)$. *Тогда уравнение Бельтрами* (1) *имеет регулярное решение задачи Дирихле* (2) *для любой непрерывной функции* $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$.

***Следствие* 5.** *Теорема* 3 *имеет место, если при некотором* $\alpha > 0$

$$\int\limits_{D} e^{\alpha K_\mu(z)}\, dm(z) < \infty.$$

***Замечание* 3.** По теореме Стоилова о факторизации (см., например, [20]) любое регулярное решение f задачи Дирихле для уравнения Бельтрами (1) с $K_\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ может быть представлено в виде композиции $f = h \circ F$, где h — аналитическая функция, а F — гомеоморфное регулярное решение класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Таким образом, по теореме 5.1 из [21] условие (10) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы любое уравнение Бельтрами (1) с интегральными ограничениями на дилатацию вида (9) имело регулярные решения задачи Дирихле (2) для любой непостоянной непрерывной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$.

Положив $H(t) = \log\Phi(t)$, заметим, что по теореме 2.1 в [19] условие (10) эквивалентно любому из следующих условий:

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H'(t)\,\frac{dt}{t} = \infty, \tag{11}$$

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \frac{dH(t)}{t} = \infty, \tag{12}$$

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H(t)\,\frac{dt}{t^2} = \infty \tag{13}$$

для некоторого $\Delta > 0$, а также каждому из равенств

$$\int\limits_{0}^{\delta} H\left(\frac{1}{t}\right) dt = \infty \tag{14}$$

для некоторого $\delta > 0$ и

$$\int\limits_{\Delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H^{-1}(\eta)} = \infty \tag{15}$$

для некоторого $\Delta_* > H(+0)$.

Интеграл в (12) понимается как интеграл Лебега – Стилтьеса, а интегралы в (11) и (13) – (15) понимаются как обычные интегралы Лебега.

4. О псевдорегулярных решениях задачи Дирихле в многосвязных областях. Следующая лемма является базовой в данном пункте.

Лемма 2. *Пусть* D — *ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *граница которой состоит из* $n \geqslant 2$ *попарно непересекающихся жордановых кривых. Пусть* $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — *измеримая функция с* $|\mu(z)| < 1$ *п. в. такая, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_\mu(z)\psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z-z_0|)\,dm(z) = o\left(I^2_{z_0}(\varepsilon)\right) \qquad \text{при} \quad \varepsilon\to 0 \quad \forall z_0\in\overline{D} \tag{16}$$

для некоторого $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(z_0,\partial D)$, *где* $\psi_{z_0,\varepsilon}(t)$ — *однопараметрическое семейство измеримых на* $(0,\infty)$ *функций таких, что*

$$0 < I_{z_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)\,dt < \infty \quad \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\,.$$

Тогда уравнение Бельтрами (1) *имеет псевдорегулярное решение задачи Дирихле* (2) *для любой непрерывной функции* $\varphi\colon \partial D\to\mathbb{R}$, $\varphi\,(\zeta)\not\equiv\mathrm{const}$, *с полюсами в* n *заданных внутренних точках* $z_i\in D$, $i=1,\ldots,n$.

Доказательство. Пусть F — регулярное гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\rm loc}$, которое является кольцевым Q-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q=K_\mu$ и существует по лемме 4.1 из [4] в силу условия (16). Рассмотрим $D^*=F(D)$. Заметим, что ∂D^* имеет n компонент связности Γ_i, $i=1,\ldots,n$, которые естественным образом соответствуют компонентам связности ∂D, жордановым кривым γ_i (см., например, лемму 5.3 в [17] или лемму 6.5 в [14]).

Область D^* допускает конформное отображение R на круговую область $\mathbb{D}^*$, граница которой состоит из n окружностей с возможным вырождением в точку (см., например, теорему V.6.2 в [18]). Заметим, что $\mathbb{D}^*$ имеет слабо плоскую границу, а D является локально связной на границе. Отображение $g=R\circ F\colon D\to\mathbb{D}^*$ также является регулярным гомеоморфным решением уравнения Бельтрами, которое является кольцевым Q-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q=K_\mu$, и по лемме 1 и теореме 3 в [6] g допускает гомеоморфное продолжение $g_*\,\overline{D}\to\overline{\mathbb{D}^*}$. Будем искать решение исходной задачи Дирихле (2) в виде $f=h\circ g$, где h — аналитическая в $\mathbb{D}^*$ функция с полюсами в точках $w_i=g(z_i)$, $i=1,\ldots,n$, и граничным условием

$$\lim_{w\to\zeta}\operatorname{Re}h(w)=\varphi(g_*^{-1}(\zeta)) \quad \forall\,\zeta\in\partial\mathbb{D}^*\,.$$

Такая функция h существует по теореме 4.14 в [2]. Легко видеть, что функция f является искомым псевдорегулярным решением задачи Дирихле (2) для уравнения Бельтрами (1).

Рассуждая, как и в случае односвязных областей, получаем из леммы 2 также следующие результаты.

Теорема 4. *Пусть* D — *ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *граница которой состоит из* $n\geqslant 2$ *попарно непересекающихся жордановых кривых, и* $\mu\colon D\to\mathbb{C}$ — *измеримая функция с* $|\mu(z)|<1$ *п. в. такая, что*

$$K_\mu(z)\leqslant Q(z) \quad \text{п. в.} \tag{17}$$

для некоторой функции $Q\colon \mathbb{C}\to[0,\infty]$ *класса* $\mathrm{FMO}(\overline{D})$. *Тогда уравнение Бельтрами* (1) *имеет псевдорегулярное решение задачи Дирихле* (2) *для любой непрерывной функции* $\varphi\colon \partial D\to\mathbb{R}$, $\varphi(\zeta)\not\equiv\mathrm{const}$, *с полюсами в* n *заданных внутренних точках* D.

***Следствие* 6.** *Теорема* 4 *остается в силе, если условие* (17) *выполнено для некоторой функции* $Q\in\mathrm{BMO}(\overline{D})$.

***Следствие* 7.** *Теорема* 4 *остается в силе, если в условии* (17) *все точки* $z\in\overline{D}$ *являются точками Лебега локально интегрируемой функции* $Q\colon\mathbb{C}\to[0,\infty]$.

***Следствие* 8.** *Теорема* 4 *также имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(z_0,\varepsilon)} K_\mu(z)\,dm(z)<\infty \quad \forall\, z_0\in\overline{D}.$$

Как и выше, здесь подразумевается, что K_μ продолжена нулем вне области D.

Теорема 5. *Пусть* D — *ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *граница которой состоит из* $n\geqslant 2$ *попарно непересекающихся жордановых кривых, и* $\mu\colon D\to\mathbb{C}$ — *измеримая функция с* $|\mu(z)|<1$ *п. в. такая, что* $K_\mu\in L^1(D)$ *и*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)}\frac{dr}{\|K_\mu(z_0,r)\|_1(r)}=\infty\quad \forall z_0\in\overline{D}\,,$$

где $\|K_\mu\|_1(z_0,r)=\int_{\gamma_r}K_\mu(z)\,|dz|$ — *нормы в* L^1 *функции* K_μ *на окружностях* $S(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}\colon |z-z_0|=r\}$, $0<r<\delta(z_0)<d(z_0)$, $d(z_0)=\sup_{z\in D}|z-z_0|$. *Тогда уравнение Бельтрами* (1) *имеет псевдорегулярное решение задачи Дирихле* (2) *для любой непрерывной функции* $\varphi\colon\partial D\to\mathbb{R}$, $\varphi(\zeta)\not\equiv\mathrm{const}$, *с полюсами в* n *заданных внутренних точках* D.

***Следствие* 9.** *Теорема* 5 *имеет место, если*

$$k_{z_0}(\varepsilon)=O\!\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\qquad \text{при}\quad \varepsilon\to 0\quad \forall z_0\in\overline{D},$$

где $k_{z_0}(\varepsilon)$ — *среднее значение функции* K_μ *на окружностях* $S(z_0,\varepsilon)$.

Теорема 6. *Пусть* D — *ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *граница которой состоит из* $n\geqslant 2$ *попарно непересекающихся жордановых кривых, и* $\mu\colon D\to\mathbb{C}$ — *измеримая функция с* $|\mu(z)|<1$ *п. в. такая, что*

$$\int\limits_D \Phi(K_\mu(z))\,dm(z)<\infty\,,$$

где $\Phi:\overline{\mathbb{R}}_+\to\overline{\mathbb{R}}_+$ — *неубывающая выпуклая функция с условием*

$$\int\limits_\delta^\infty\frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)}=\infty$$

для некоторого $\delta>\Phi(0)$. *Тогда уравнение Бельтрами* (1) *имеет псевдорегулярное решение задачи Дирихле* (2) *для любой непрерывной функции* $\varphi\colon\partial D\to\mathbb{R}$, $\varphi(\zeta)\not\equiv\mathrm{const}$, *с полюсами в* n *заданных внутренних точках* D.

***Следствие* 10.** *Теорема* 6 *имеет место, если при некотором* $\alpha > 0$

$$\int\limits_D e^{\alpha K_\mu(z)}\, dm(z) < \infty.$$

5. О существовании многозначных решений в многосвязных областях.

Лемма 3. *Пусть* D — *ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *граница которой состоит из* $n \geqslant 2$ *попарно непересекающихся жордановых кривых,* $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — *измеримая функция с* $|\mu(z)| < 1$ *п. в. такая, что*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_\mu(z)\cdot \psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z-z_0|)\, dm(z) = o\left(I^2_{z_0}(\varepsilon)\right) \qquad \text{\textit{при}} \quad \varepsilon \to 0 \quad \forall z_0 \in \overline{D}$$

для некоторого $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, *и* $\psi_{z_0,\varepsilon}(t)$ — *однопараметрическое семейство измеримых на* $(0,\infty)$ *функций таких, что*

$$0 < I_{z_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\,.$$

Тогда уравнение Бельтрами (1) *имеет многозначное решение задачи Дирихле* (2) *для любой непрерывной функции* $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2, строим отображение $g = R \circ F$ области D на круговую область $\mathbb{D}^*$, которое является регулярным гомеоморфным решением уравнения Бельтрами и допускает гомеоморфное продолжение $g_*\colon \overline{D} \to \overline{\mathbb{D}^*}$.

В области $\mathbb{D}^*$ найдем решение задачи Дирихле (2) для гармонических функций u, удовлетворяющее граничному условию

$$\lim_{w\to\zeta} u(w) = \varphi(g_*^{-1}(\zeta)) \quad \forall \zeta \in \partial\mathbb{D}^*$$

(см., например, § 3 гл. VI в [18]).

Пусть $z_0 \in D$, $B_0 = B(z_0, \varepsilon_0) \subset D$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и $w_0 = g(z_0)$. Тогда область $G_0 := g(B_0)$ односвязна, и поэтому найдется гармоническая функция $v(w)$ такая, что $h(w) = u(w) + iv(w)$ — голоморфная функция. Заметим, что $f_0 = h \circ g|_{B_0}$ — локально регулярное решение уравнения Бельтрами (1). Функция h может быть продолжена до, вообще говоря, многозначной аналитической функции H в области $\mathbb{D}^*$ и, таким образом, $H \circ g$ дает искомое многозначное решение задачи Дирихле (2) для уравнения Бельтрами (1).

Теорема 7. *Пусть* D — *ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *граница которой состоит из* $n \geqslant 2$ *попарно непересекающихся жордановых кривых, и* $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — *измеримая функция с* $|\mu(z)| < 1$ *п. в. такая, что*

$$K_\mu(z) \leqslant Q(z) \quad \text{\textit{п. в.}} \tag{18}$$

для некоторой функции $Q\colon \mathbb{C} \to [0,\infty]$ *класса* $\mathrm{FMO}(\overline{D})$. *Тогда уравнение Бельтрами* (1) *имеет многозначное решение задачи Дирихле* (2) *для любой непрерывной функции* $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$.

***Следствие* 11.** *Теорема* 7 *остается в силе, если условие* (18) *выполнено для некоторой функции* $Q \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$.

***Следствие* 12.** *Теорема* 7 *остается в силе, если в условии* (18) *все точки* $z \in \overline{D}$ *являются точками Лебега локально интегрируемой функции* $Q : \mathbb{C} \to [0, \infty]$.

***Следствие* 13.** *Теорема* 7 *также имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \fint_{B(z_0,\varepsilon)} K_\mu(z)\, dm(z) < \infty \qquad \forall\, z_0 \in \overline{D}.$$

Здесь также подразумевается, что K_μ продолжена нулем вне области D.

Теорема 8. *Пусть* D — *ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *граница которой состоит из* $n \geqslant 2$ *попарно непересекающихся жордановых кривых, и* $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — *измеримая функция с* $|\mu(z)| < 1$ *п. в. такая, что* $K_\mu \in L^1(D)$ *и*

$$\int_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\|K_\mu(z_0, r)\|_1(r)} = \infty \quad \forall z_0 \in \overline{D}\,,$$

где $\|K_\mu\|_1(z_0, r) = \int_{\gamma_r} K_\mu(z)|dz|$ — *нормы в* L^1 *функции* K_μ *на окружностях* $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < d(z_0)$, $d(z_0) = \sup_{z \in D} |z - z_0|$. *Тогда уравнение Бельтрами* (1) *имеет многозначное решение задачи Дирихле* (2) *для любой непрерывной функции* $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$.

***Следствие* 14.** *Теорема* 8 *имеет место, если*

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \varepsilon \to 0 \quad \forall z_0 \in \overline{D},$$

где $k_{z_0}(\varepsilon)$ — *среднее значение функции* K_μ *на окружности* $S(z_0, \varepsilon)$.

Теорема 9. *Пусть* D — *ограниченная область в* $\mathbb{C}$, *граница которой состоит из* $n \geqslant 2$ *попарно непересекающихся жордановых кривых, и* $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — *измеримая функция с* $|\mu(z)| < 1$ *п. в. такая, что*

$$\int_D \Phi(K_\mu(z))\, dm(z) < \infty,$$

где $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — *неубывающая выпуклая функция с условием*

$$\int_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty$$

для некоторого $\delta > \Phi(0)$. *Тогда уравнение Бельтрами* (1) *имеет многозначное решение задачи Дирихле* (2) *для любой непрерывной функции* $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$.

***Следствие* 15.** *Теорема* 9 *имеет место, если при некотором* $\alpha > 0$

$$\int_D e^{\alpha K_\mu(z)}\, dm(z) < \infty.$$

***Замечание* 4.** Можно показать, что имеет место аналог известной теоремы о монодромии для аналитических функций, состоящий в том, что любое многозначное решение уравнения Бельтрами (1) в односвязной области D является его регулярным однозначным решением.

1. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. – 1957. – **43 (85)**. – С. 451 – 503.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959.
3. *Dybov Yu.* On regular solutions of the Dirichlet problem for the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equat. – 2010. – **55**, № 12. – P. 1099 – 1116.
4. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equat. – 2010. – **55**, № 1 – 3. – P. 219 – 236.
5. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* To strong ring solutions of the Beltrami equations // Uzbek. Math. J. – 2009. – **1**. – P. 127 – 137.
6. *Ломако Т. В.* О распространении некоторых обобщений квазиконформных отображений на границу // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – P. 1329 – 1337.
7. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука, 1968.
8. *Боярский Б. В., Гутлянский В. Я., Рязанов В. И.* General Beltrami equations and BMO // Укр. мат. вестн. – 2008. – **5**, № 3. – P. 305 – 326.
9. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Var. Elliptic Equat. – 2009. – **54**, № 10. – P. 935 – 950.
10. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On integral conditions for the general Beltrami equations // Complex Anal. Oper. Theory. – 2011. – **5**, № 3. – P. 835 – 845.
11. *Крушкаль С. Л., Кюнау Р.* Квазиконформные отображения – новые методы и приложения. – Новосибирск: Наука, 1984.
12. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353 – 393.
13. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117 – 150.
14. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory // Springer Monogr. Math. – New York: Springer, 2009.
15. *Wilder R. L.* Topology of manifolds. – New York: Amer. Math. Soc., 1949.
16. *Афанасьева Е. С., Рязанов В. И.* Регулярные области в теории отображений на римановых многообразиях // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2011. – **22**. – P. 23 – 32.
17. *Игнатьев А. А., Рязанов В. И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – P. 395 – 417.
18. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.
19. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вестн. – 2010. – **7**, № 1. – P. 524 – 535.
20. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964.
21. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Integral conditions in the theory of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equat. – 2011. – DOI: 10.1080/17476933.2010.534790.

Получено 09.12.11