УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т им. А. Нобеля),
В. И. Забутная (Днепропетр. нац. ун-т)

О НАИЛУЧШЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2 И ПОПЕРЕЧНИКАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

We consider the problem of the best polynomial approximation of 2π-periodic functions in the space L_2 in the case where the error of approximation $E_{n-1}(f)$ is estimated in terms of the kth-order modulus of continuity $\Omega_k(f)$ in which the Steklov operator $S_h f$ is used instead of the operator of translation $T_h f(x) = f(x+h)$. For the classes of functions defined using the indicated smoothness characteristic, we determine the exact values of different n-widths.

Розглянуто питання про найкращу поліноміальну апроксимацію 2π-періодичних функцій у просторі L_2, коли величина похибки наближення $E_{n-1}(f)$ оцінюється через модуль неперервності k-го порядку $\Omega_k(f)$, в якому замість оператора зсуву $T_h f(x) = f(x+h)$ використано оператор Стєклова $S_h f$. Для класів функцій, визначених за допомогою вказаної характеристики гладкості, обчислено точні значення різних n-поперечників.

1. При решении некоторых задач теории аппроксимации функций действительной переменной часто используют различные модификации классического определения модуля непрерывности (см., например, [1 – 11]). Во многих случаях это обусловлено специфическими условиями рассматриваемых задач и позволяет получать результаты, раскрывающие содержательную сущность исследуемых проблем. Так, при аппроксимации непериодических функций алгебраическими полиномами М. К. Потаповым и его учениками были предложены различные модификации классического определения модуля непрерывности, использующие вместо оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ различные усредняющие операторы (см., например, [3, 4]).

В случае аппроксимации 2π-периодических функций вместо оператора сдвига $T_h f$ В. А. Абиловым и Ф. В. Абиловой была использована функция Стеклова $S_h(f)$ [5]. Аналогичный подход был применен В. Кокилашвили и Ю. Уилдириром в работе [8] и авторами в работе [10]. В данной статье продолжается указанная тематика.

Пусть $L_2 \equiv L_2([0,2\pi])$ — пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций, у которых норма

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Для произвольного элемента $f \in L_2$ запишем функцию Стеклова

$$S_h(f,x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(\tau) d\tau; \quad h > 0,$$

положив при этом $S_{h,i}(f) \overset{\text{df}}{=} S_h(S_{h,i-1}(f))$, где $i \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$. Обозначив через $\mathbb{I}$ единичный оператор в пространстве L_2, определим конечные разности первого и высших порядков

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x) \overset{\text{df}}{=} S_h(f,x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f,x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^k(f,x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \widetilde{\Delta}_h^1\Big(\widetilde{\Delta}_h^{k-1}(f),x\Big) = (S_h - \mathbb{I})^k(f,x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}S_{h,i}(f,x),$$

где $k=2,3,\ldots$. Использовав указанные обозначения, рассмотрим введенную в [5] характеристику гладкости функции $f\in L_2$

$$\Omega_k(f,t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup\{\|\widetilde{\Delta}_h^k(f)\| : 0<h\leqslant t\}, \tag{1}$$

которую назовем специальным модулем непрерывности k-го порядка.

Для произвольной функции $f\in L_2$, которая имеет разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f)\cos jx + b_j(f)\sin jx,$$

получаем (см., например, [5])

$$\|\widetilde{\Delta}_h^k(f)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin jh}{jh}\right)^{2k}\rho_j^2(f), \tag{2}$$

где $\rho_j^2(f) \stackrel{\mathrm{df}}{=} a_j^2(f)+b_j^2(f)$. Используя определение (1) и соотношение (2), имеем

$$\Omega_k(f,t) = \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin jh}{jh}\right)^{2k}\rho_j^2(f)\right)^{1/2} :\ 0<h\leqslant t\right\}. \tag{3}$$

Отметим, что для решения ряда задач конструктивной теории функций в пространстве 2π-периодических функций L_p, $0<p<1$, наряду с модулем непрерывности k-го порядка также используют усредненную характеристику гладкости

$$\widetilde{\Omega}_m(f,t)_p \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m(f)\|_{L_p}^p dh_1\ldots dh_m\right\}^{1/p}, \tag{4}$$

где $0<t<\infty$, $\overline{h}=(h_1,\ldots,h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1\circ\ldots\circ\Delta_{h_m}^1$, $\Delta_{h_j}^1(f,t)\stackrel{\mathrm{df}}{=} f(t+h_j)-f(t)$, $j=\overline{1,m}$. Напомним, что Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов и П. Освальд в работе [12] использовали величину $\widetilde{\Omega}_1(f,t)_p$ для изучения поведения наилучшего приближения функций полиномами, построенными по системе Хаара. Идея применения функции (4) в качестве усредненной характеристики гладкости получила дальнейшее распространение в статье К. В. Руновского [13]. Отметим, что иные подходы к построению обобщенных характеристик гладкости функций можно найти, например, в работах Х. Шапиро и Дж. Бомана [14], А. Г. Бабенко [15], С. Н. Васильева [16], А. И. Козко и А. В. Рождественского [17].

Характеристика гладкости (4) в случае $p=2$ применялась авторами при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации на классах 2π-периодических функций [9, 11]. Например, для произвольной функции $f\in L_2$ на основании (4) при $p=2$ имеем [9]

$$\widetilde{\Omega}_m^2(f,t)_2 = 2^m\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin jt}{jt}\right)^m\rho_j^2(f). \tag{5}$$

Сравнивая соотношения (2), (3) и (5) при $m=2k$, получаем

$$\widetilde{\Omega}_{2k}(f,t)_2=2^k\|\widetilde{\Delta}_t^k(f)\|\leqslant 2^k\Omega_k(f,t). \tag{6}$$

Через $\mathcal{T}_{n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Величина наилучшего приближения функции $f\in L_2$ элементами подпространства $\mathcal{T}_{n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f)=\inf\{\|f-T_{n-1}\|\colon\ T_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}\}=\|f-\widetilde{S}_{n-1}(f)\|=\left\{\sum\nolimits_{j=n}^{\infty}\rho_j^2(f)\right\}^{1/2},$$

где $\widetilde{S}_{n-1}(f)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f.

Символом L_2^r, $r\in\mathbb{N}$, обозначим множество функций $f\in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка принадлежат пространству L_2. Также полагаем $L_2^0\equiv L_2$.

Из полученной в [9] теоремы 1 следует, что для произвольной функции $f\in L_2^r$ выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f)\leqslant\left\{2\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-m/2}n^{-r}\widetilde{\Omega}_m(f^{(r)},t/n)_2,\quad m\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

которое является неулучшаемым в том смысле, что существует функция $f\in L_2^r$, $f\not\equiv\mathrm{const}$, для которой (7) обращается в равенство. Полагая в (7) $m=2k$ и учитывая (6), получаем

$$E_{n-1}(f)\leqslant\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{-k}n^{-r}\Omega_k(f^{(r)},t/n). \tag{8}$$

Рассмотрим функцию $f_0(x)=\sin nx$, принадлежащую классу L_2^r. Очевидно, что $E_{n-1}(f_0)=$ $=1$, и при $0<n\tau\leqslant 3\pi/4$, исходя из геометрических соображений, имеем (см., например, [18, с.132]) $\min\left\{\frac{\sin x}{x}:0<|x|\leqslant n\tau\right\}=\frac{\sin n\tau}{n\tau}$. Согласно определению (3) запишем

$$\Omega_k(f_0^{(r)},\tau)=n^r\sup\left\{\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)^k,\ 0<h\leqslant\tau\right\}=$$

$$=n^r\left(1-\min_{0<x\leqslant n\tau}\frac{\sin x}{x}\right)^k=n^r\left(1-\frac{\sin n\tau}{n\tau}\right)^k. \tag{9}$$

Полагая $t=n\tau$, из (9) получаем $\Omega_k\Big(f_0^{(r)},t/n\Big)=n^r\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{-k}$. Из вышеприведенного следует, что для функции f_0 неравенство (8) обращается в равенство, т. е. является неулучшаемым на классе L_2^r.

2. Напомним необходимые определения и понятия. Пусть $\mathbb{B}$ — единичный шар в L_2, $\mathcal{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2, $\Lambda_n\subset L_2$ — n-мерное подпространство, $\Lambda^n\subset L_2$ — подпространство коразмерности n, $V\colon L_2\to\Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, $V^{\perp}\colon L_2\to\Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathcal{M}; L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0\colon \varepsilon\mathbb{B}\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathcal{M}\right\}\colon\ \Lambda_{n+1}\subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|\colon g\in\Lambda_n\right\} : f\in\mathcal{M}\right\}\colon \Lambda_n\subset L_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-Vf\|\colon f\in\mathcal{M}\right\}\colon VL_2\subset\Lambda_n\right\}\colon \Lambda_n\subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|\colon f\in\mathcal{M}\cap\Lambda^n\right\}\colon \Lambda^n\subset L_2\right\},$$

$$\text{п}_n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-V^{\perp}f\|\colon f\in\mathcal{M}\right\}\colon V^{\perp}L_2\subset\Lambda_n\right\}\colon \Lambda_n\subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками. В силу того, что L_2 является гильбертовым пространством, имеют место следующие соотношения между перечисленными величинами:

$$b_n(\mathcal{M}; L_2) \leqslant d^n(\mathcal{M}; L_2) \leqslant d_n(\mathcal{M}; L_2) = \delta_n(\mathcal{M}; L_2) = \text{п}_n(\mathcal{M}; L_2). \tag{10}$$

Напомним, что вычислению в пространстве L_2 точных значений n-поперечников классов дифференцируемых 2π-периодических функций, определенных с помощью модулей непрерывности и иных характеристик гладкости, посвящены работы Л. В. Тайкова [19], В. В. Шалаева [20], М. Г. Есмаганбетова [21] и других (см., например, [6, 9 – 11]).

Использовав определение характеристики гладкости (3), рассмотрим следующие классы функций. Пусть $\Psi(t), t\geqslant 0,$ — непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Psi(0)=0$. Всюду далее будем ее называть мажорантой. Символом $W^r(\Omega_k,\Psi)$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $k\in\mathbb{N}$, обозначим класс функций $f\in L_2^r$, для которых при любом $0<t\leqslant 2\pi$ имеет место неравенство $\Omega_k(f^{(r)},t)\leqslant$ $\leqslant\Psi(t)$.

Доопределим функцию $\sin(t)/t$ в точке $t=0$ значением 1. Обозначим через t_* величину аргумента t функции $\sin(t)/t$, при котором она достигает на полусегменте $[0,\infty)$ своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* — наименьший положительный корень уравнения $t=\operatorname{tg} t$, $4,49<t_*<4,51$.

Полагаем [11]

$$\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_* \overset{\text{df}}{=} \left\{1-\frac{\sin t}{t},\ \text{если } 0\leqslant t\leqslant t_*;\ \ 1-\frac{\sin t_*}{t_*},\ \ \text{если }\ t\geqslant t_*\right\}.$$

Для множества $\mathcal{K}\subset L_2$ обозначим $E_{n-1}(\mathcal{K})\overset{\text{df}}{=}\sup\{E_{n-1}(f) : f\in\mathcal{K}\}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть для любых чисел $0<t<\infty$ и $n\in\mathbb{N}$ мажоранта Ψ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Psi(t)}{\Psi(\pi/2n)} \geqslant \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^k \left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)_*^k. \tag{11}$$

Тогда имеют место равенства

$$q_{2n-1}\big(W^r(\Omega_k,\Psi);L_2\big) = q_{2n}\big(W^r(\Omega_k,\Psi);L_2\big) =$$

$$= E_{n-1}\Big(W^r(\Omega_k,\Psi)\Big) = \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^k n^{-r}\Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \tag{12}$$

где $q_n(\cdot)$ *— любой из перечисленных выше* n*-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих* (11), *не пусто.*

Доказательство. Для произвольной функции $f \in W^r(\Omega_k,\Psi)$ из соотношения (8), в котором полагаем $t=\pi/2$, имеем

$$E_{n-1}(f) \leqslant \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^k n^{-r}\Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Из данного неравенства и неравенства (10) получаем оценки сверху

$$q_{2n}\big(W^r(\Omega_k,\Psi);L_2\big) \leqslant q_{2n-1}\big(W^r(\Omega_k,\Psi);L_2\big) \leqslant$$

$$\leqslant E_{n-1}\big(W^r(\Omega_k,\Psi)\big) \leqslant \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^k n^{-r}\Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{13}$$

Для получения оценок снизу рассмотрим в L_2 шар

$$\mathbb{B}_{2n+1} \overset{\text{df}}{=} \left\{T_n \in \mathcal{T}_n \colon \|T_n\| \leqslant \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^k n^{-r}\Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}.$$

Поскольку для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$

$$\|\widetilde{\Delta}_h^k(T_n^{(r)})\|^2 = \sum_{j=1}^n \left(1-\frac{\sin jh}{jh}\right)^{2k} j^{2r}\rho_j^2(T_n) \leqslant$$

$$\leqslant n^{2r}\sum_{j=1}^n \left(1-\frac{\sin jh}{jh}\right)_*^{2k}\rho_j^2(T_n) \leqslant n^{2r}\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)_*^{2k}\|T_n\|^2,$$

отсюда в силу (3) имеем

$$\Omega_k(T_n^{(r)},t) \leqslant n^r\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)_*^k\|T_n\|. \tag{14}$$

Использовав неравенство (14) и ограничение на мажоранту (11), для произвольного полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ при $0 < t \leqslant 2\pi$ запишем

$$\Omega_k(T_n^{(r)},t) \leqslant \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^k \left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)_*^k \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leqslant \Psi(t).$$

Следовательно, имеет место включение $\mathbb{B}_{2n+1} \subset W^r(\Omega_k, \Psi)$. Из определения бернштейновского n-поперечника и соотношения (10) получаем

$$q_{2n}\Big(W^r(\Omega_k, \Psi); L_2\Big) \geqslant b_{2n}\Big(W^r(\Omega_k, \Psi); L_2\Big) \geqslant$$

$$\geqslant b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1}, L_2) \geqslant \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^k n^{-r}\Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{15}$$

Соотношение (12) следует из сопоставления неравенств (13) и (15).

Покажем, что множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (11), не пусто. Для этого рассмотрим степенную функцию $\Psi_0(t) \overset{\text{df}}{=} t^\beta$, где $\beta \overset{\text{df}}{=} k\alpha$, $\alpha \overset{\text{df}}{=} 2/(\pi-2)$, и убедимся в том, что для нее выполнено указанное ограничение. Иными словами, установим неравенство

$$(nt)^\alpha \geqslant \frac{\pi^{1+\alpha}}{2^\alpha(\pi-2)}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)_*. \tag{16}$$

Положив $v \overset{\text{df}}{=} nt$, $0 \leqslant v < \infty$, запишем (16) в виде

$$v^\alpha \geqslant \frac{\pi^{1+\alpha}}{2^\alpha(\pi-2)}\left(1-\frac{\sin v}{v}\right)_*.$$

Введем вспомогательную функцию

$$G(v) \overset{\text{df}}{=} v^\alpha - \frac{\pi^{1+\alpha}}{2^\alpha(\pi-2)}\left(1-\frac{\sin v}{v}\right)_*,$$

для которой $G(0)=0$, и покажем, что для $0 \leqslant v < \infty$ выполняется неравенство $G(v) \geqslant 0$. Связанные с этим рассуждения проведем для трех случаев: $0 \leqslant v \leqslant \pi/2$, $\pi/2 \leqslant v \leqslant t_*$ и $t_* \leqslant v < \infty$.

Пусть $0 \leqslant v \leqslant \pi/2$. Очевидно, что в бесконечно малой окрестности нуля имеет место представление

$$G(v) = v^\alpha\left(1 - \frac{\pi^{1+\alpha}}{2^\alpha(\pi-2)}O(v^{3-\alpha})\right),$$

т. е. $G(v) \geqslant 0$ при $v \to 0+0$. Для получения нужного результата $G(v) \geqslant 0$ при $0 \leqslant v \leqslant \pi/2$ применим метод доказательства от противного, предположив, что существует по крайней мере одна точка $\xi \in (0, \pi/2)$, в которой функция G меняет знак. Из равенств $G(0) = G(\xi) = G(\pi/2) = 0$ в силу теоремы Ролля следует, что первая производная

$$G^{(1)}(v) = \frac{1}{v^2}\left\{\alpha v^{1+\alpha} + \frac{\pi^{1+\alpha}}{2^\alpha(\pi-2)}(v\cos v - \sin v)\right\} \overset{\text{df}}{=} \frac{G_1(v)}{v^2}, \tag{17}$$

а значит и функция $G_1(v)$, должна иметь на интервале $(0, \pi/2)$ не менее двух различных нулей. Рассмотрим далее функцию G_1. Поскольку $G_1(0) = 0$ и, как нетрудно проверить, в силу выбора числа α $G_1(\pi/2) = 0$, на основании теоремы Ролля заключаем, что производная

$$G_1^{(1)}(v) = v\left\{(1+\alpha)\alpha v^{\alpha-1} - \frac{\pi^{1+\alpha}}{2^{\alpha}(\pi-2)}\sin v\right\} \stackrel{\text{df}}{=} vG_2(v) \tag{18}$$

должна обращаться в нуль на интервале $(0,\pi/2)$ не менее трех раз. Очевидно, что функция G_2, к анализу которой мы переходим, также должна иметь на $(0,\pi/2)$ не менее трех различных нулей. Поскольку $G_2(0)=0$, в силу теоремы Ролля производная

$$G_2^{(1)}(v) = (1+\alpha)\alpha(\alpha-1)v^{\alpha-2} - \frac{\pi^{1+\alpha}}{2^{\alpha}(\pi-2)}\cos v$$

должна обращаться в нуль на интервале $(0,\pi/2)$ не менее чем в трех различных точках. Однако это невозможно, потому что $G_2^{(1)}$, как разность двух монотонно убывающих и выпуклых соответственно вниз и вверх функций, может иметь на $(0,\pi/2)$ не более двух различных нулей. Из полученного противоречия следует, что первоначальное предположение о знакопеременности функции G на интервале $(0,\pi/2)$ является неверным. Следовательно, для любого $v\in(0,\pi/2)$ имеет место неравенство $G_2(v)>0$.

Пусть $\pi/2\leqslant v\leqslant t_*$. Нетрудно проверить, что

$$G(\pi) = \pi^{\alpha}\bigl(1-\pi/(2^{\alpha}(\pi-2))\bigr) > 0,$$

а значит, в некоторой окрестности точки $v=\pi$ в силу непрерывности функция G принимает положительные значения. Покажем, что в интервале $(\pi/2,t_*)$ G является знакопостоянной, для чего снова проведем рассуждения от противного. Пусть существует по крайней мере одна точка $\eta\in(\pi/2,t_*)$, в которой функция G меняет знак. Поскольку $G(\pi/2)=G(\eta)=0$, по теореме Ролля в силу (17) производная $G^{(1)}$, а значит и функция G_1, имеет на интервале $(\pi/2,t_*)$ по крайней мере один нуль. Рассмотрим далее функцию G_1. Из равенства $G_1(\pi/2)=0$ следует, что производная $G_1^{(1)}$ должна, согласно приведенным выше соображениям, иметь не менее одного нуля на интервале $(\pi/2,t_*)$. В силу (18) это касается и функции G_2. Несложно подсчитать, что

$$G_2(\pi/2) = \alpha(\pi/2)^{\alpha-1}(\alpha+1-\pi^2/4) > 0.$$

Отсюда и из того факта, что функция G_2 является разностью монотонно возрастающей и монотонно убывающей функций, заключаем, что нигде на рассматриваемом интервале G_2 в нуль обращаться не может. Из полученного противоречия следует требуемое неравенство $G(v)>0$ для любого $v\in(\pi/2,t_*)$.

Пусть теперь $t_*\leqslant v<\infty$. Путем несложных вычислений можно убедиться в том, что $G(t_*)>0$. Поскольку в рассматриваемом случае G является монотонно возрастающей функцией, выполнение неравенства $G(v)>0$ для любого $v\in(t_*,\infty)$ очевидно. Следовательно, для рассматриваемой функции Ψ_0 ограничение (11) имеет место.

Теорема доказана.

Для функции $f\in L_2^r$, $r=2,3,\ldots$, ее промежуточные производные $f^{(r-\nu)}$, $\nu=1,\ldots,r-1$, принадлежат пространству L_2. Учитывая, что $f^{(r-\nu)}\in L_2^{\nu}$, и используя при $t=\pi/n$ вытекающее из (8) неравенство $E_{n-1}(f^{(r-\nu)})\leqslant\left(\dfrac{\pi}{\pi-2}\right)^k n^{-\nu}\Omega_k\left(f^{(r)},\dfrac{\pi}{2n}\right)$, а также применяя определение класса $W^r(\Omega_k,\Psi)$ и вытекающую из доказательства теоремы принадлежность функции $f_1(x)\stackrel{\text{df}}{=}\left(\dfrac{\pi}{\pi-2}\right)^k n^{-r}\Psi\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\sin nx$ классу $W^r(\Omega_k,\Psi)$, получаем следующий результат.

Следствие. *Пусть* $k, n \in \mathbb{N}$, $r = 2, 3, \ldots$. *Если функция* Ψ *при любом значении аргумента* $t \in (0, \infty)$ *удовлетворяет ограничению* (11), *то для* $\nu = 0, 1, \ldots, r-1$ *справедливы равенства*

$$\sup\left\{E_{n-1}(f^{(r-\nu)})\colon f \in W^r(\Omega_k, \Psi)\right\} = \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^k n^{-\nu}\Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

1. *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of smoothness. – New York: Springer-Verlag, 1987. – 228 p.
2. *Сендов Б., Попов В.* Усредненные модули гладкости. – М.: Мир, 1988. – 328 с.
3. *Потапов М. К.* О применении одного оператора обобщенного сдвига в теории приближений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1998. – **3**. – С. 38 – 48.
4. *Потапов М. К.* О применении несимметричных операторов обобщенного сдвига в теории приближений // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы V Казан. междунар. летней шк.-конф. (Казань, 27 июня – 4 июля 2001 г.). Труды Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. – 2001. – **78**. – С. 185 – 189.
5. *Абилов В. А., Абилова Ф. В.* Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Мат. заметки. – 2004. – **76**, № 6. – С. 803 – 811.
6. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Некоторые вопросы теории аппроксимации 2π-периодических функций в пространствах $L_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ // Проблемы теории приближения функций и смежные вопросы: Сб. трудов Ин-та математики НАН Украины. – 2004. – **1**, № 1. – С. 25 – 41.
7. *Ephremidze L., Kokilashvili V., Yildirir Y. E.* On the inverse inequalities for trigonometric polynomial approximations in weighted Lorentz spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2007. – **144**. – P. 132 – 136.
8. *Kokilashvili V., Yildirir Y. E.* On the approximation in weighted Lebesgue spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2007. – **143**. – P. 103 – 113.
9. *Вакарчук С. Б.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. – 2005. – **78**, № 5. – С. 792 – 796.
10. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Точные неравенства типа Джексона – Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Мат. заметки. – 2009. – **86**, № 3. – С. 328 – 336.
11. *Vakarchuk S. B., Zabutna V. I.* Widths of functional classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East. J. Approxim. – 2008. – **14**, № 4. – P. 411 – 421.
12. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространстве L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
13. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространстве L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1984. – **185**, № 8. – С. 81 – 102.
14. *Shapiro H. S., Boman J.* Comparison theorems for a generalized modulas of continuity // Bull. Amer. Math. Soc. – 1969. – **75**, № 6. – P. 1266 – 1268.
15. *Бабенко А. Г.* О неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших L^2 приближений функций тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 1999. – **6**. – С. 2 – 19.
16. *Васильев С. Н.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. – 2000. – **385**, № 1. – С. 11 – 14.
17. *Козко А. И., Рождественский А. В.* О неравенствах Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Мат. сб. – 2004. – **195**, № 8. – С. 3 – 46.
18. *Рыбасенко В. Д. Рыбасенко И. Д.* Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики. – М.: Наука, 1987. – 416 с.
19. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. – 1976. – **20**, № 3. – С. 433 – 438.
20. *Шалаев В. В.* О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 1. – С. 125 – 129.
21. *Есмаганбетов М. Г.* Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 6. – С. 816 – 820.

Получено 15.11.10,
после доработки — 30.06.12