УДК 517.52

М. Ф. Тиман (Днепропетр. аграр. ун-т)

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ

We present a survey of results of the author, his postgraduates, and other mathematicians related to the problem of finding the best approximations of functions in the investigation of properties of spaces of functions defined on zero-dimensional compact commutative groups.

Наведено огляд результатів, отриманих автором та іншими математиками, що стосуються питань значення найкращих наближень функцій при дослідженні властивостей просторів функцій, заданих на нульвимірних компактних комутативних групах.

Пусть $G = G\{g\}$ — некоторая компактная коммутативная группа с групповой операцией $(g_1 \dotplus g_2)$ и мерой Хаара $\mu(G)$ на ней. Обозначим через $L^p(G)$ множество функций, измеримых относительно меры $\mu(G)$ и таких, что при некотором p, $1 \le p \le \infty$, $\int_G |f(g)|^p \, d\mu(g) < \infty$. Известно, что $L^p(G)$ есть полное нормированное пространство с нормой $\|f\|_p = \left\{ \int_G |f(g)|^p \, d\mu(g) \right\}^{1/p}$ при $1 \le p < \infty$ и $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{g \in G} |f(g)|$ при $p = \infty$. Компактную коммутативную группу называют *нульмерной,* если топология в ней задается с помощью системы ее подгрупп. Как известно, топология нульмерной компактной коммутативной группы $G = G\{g\}$ может быть задана с помощью основной цепочки подгрупп — окрестностей нуля: $G = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$ (см. [1]).

Для компактной коммутативной группы $G = G\{g\}$ со второй аксиомой счетности при $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$, очевидно, справедливо вложение

$$L^{p_1}(G) \subset L^{p_2}(G). \tag{1}$$

Пусть $X = \{\chi_n\}_0^\infty$ — система характеров группы $G = G\{g\}$. *Характером* коммутативной топологической группы $G = G\{g\}$ называется непрерывная функция $\chi = \chi(g)$, для которой: 1) $|\chi(g)| = 1$; 2) $\chi(g_1 \dotplus g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2)$; 3) $\chi(0) = 1$; 4) $\chi(\dot{-} g) = \dfrac{1}{\chi(g)} = \overline{\chi(g)}$.

Систему $X = \{\chi_n\}_0^\infty$ называют *периодической,* если для каждой $\chi_n(g) \in X$ найдется целое число k_n такое, что $[\chi_n(g)]^{k_n} = 1$ для любого g.

Для коммутативной топологической группы $G = G\{g\}$ характеры образуют группу $X = \{\chi_n\}_0^\infty$ относительно умножения. Нулем группы X является элемент $\chi_0(g) \equiv 1$.

Известно, что если группа характеров $X = \{\chi_n\}_0^\infty$ компактной коммутативной группы $G = G\{g\}$ периодична, то G нульмерна (см. [1]).

Нумерация характеров в группе $X = \{\chi_n\}_0^\infty$ компактной нульмерной коммутативной группы G устанавливается следующим образом. Группа X представляется в виде возрастающей цепочки конечных подгрупп $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$. При этом порядок подгруппы X_n равен m_n, а $\dfrac{m_{n+1}}{m_n} = p_n$ — простое число. Далее полагаем $\chi_0(g) \equiv 1$. Затем в каждой подгруппе X_{n+1}, $n = 0,1,2,\ldots$, выбираем по одному характеру χ, не принадлежащему X_n, и присваиваем ему номер m_n. Пусть теперь натуральное число $n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k$ $(m_0 = 1)$, $a_k = 0,1,2,\ldots,p_k - 1$. Тогда $\chi_n(g) = \prod_{k=0}^{s} \left[\chi_{m_k}(g)\right]^{a_k}$. При этом элементы подгруппы X_n имеют номера $0,1,2,\ldots,m_n - 1$.

Известно также (см. [1, 4, 9, 14]), что система характеров $X = \{\chi_n\}_0^\infty$ образует полную ортонормированную систему функций относительно меры Хаара на $G = G\{g\}$.

Одним из важных утверждений относительно свойств системы характеров, аналогично тригонометрической системе функций, является следующее.

Лемма. *Пусть* $X = \{\chi_n\}_0^\infty$ *— система характеров некоторой нульмерной компактной коммутативной группы* G. *Тогда для любого многочлена* $P_n(g) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \chi_\nu(g)$ *при* $1 \le p < q \le \infty$ *выполняется неравенство*

$$\|P_n\|_q \le C(p,q)(n+1)^{1/p-1/q} \|P_n\|_p, \tag{2}$$

где $C(p,q)$ *— постоянная, зависящая лишь от* p, q.

Доказательство. Очевидно, что $P_n(g) = \int_G P_n(t) \sum_{\nu=0}^{n} \chi_\nu(g)\overline{\chi_\nu(t)}\, d\mu(t)$. Следовательно, в силу неравенства Буняковского – Коши и ортонормированности системы $X = \{\chi_n\}_0^\infty$, находим

$$|P_n(g)| \le \|P_n\|_2 \left(\int_G \left| \sum_{\nu=0}^{n} \chi_\nu(g)\overline{\chi_\nu(t)} \right|^2 d\mu(t) \right)^{1/2} =$$

$$= \|P_n\|_2 \left(\sum_{\nu=0}^{n} |\chi_\nu(g)|^2 \right)^{1/2} = (n+1)^{1/2} \|P_n\|_2. \tag{3}$$

Пусть теперь $1 \le p < \infty$. Выберем четное число $q_0 > p$. В силу (3) имеем

$$|P_n(g)|^{g_0/2} \le \left(\frac{nq_0}{2} + 1 \right)^{1/2} \left(\int |P_n(g)|^{q_0} d\mu(g) \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{nq_0}{2}+1\right)^{1/2}\left(\int |P_n(g)|^{q_0-p}\,|P_n(g)|^p\,d\mu(g)\right)^{1/2} \leq \left(\frac{nq_0}{2}+1\right)^{1/2}\|P_n\|_\infty^{(q_0-p)/2}\,\|P_n\|_p^{p/2}.$$

Из этой оценки следует, что

$$\|P_n\|_\infty \leq \left(\frac{nq_0}{2}+1\right)^{1/p}\|P_n\|_p. \qquad (4)$$

Наконец, используя оценку (4), получаем

$$\|P_n\|_q = \left(\int_G |P_n(g)|^{q-p}\,|P_n(g)|^p\,d\mu(g)\right)^{1/q} \leq \|P_n\|_\infty^{(q-p)/q}\left(\int_G |P_n(g)|^p d\mu(g)\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\frac{nq_0}{2}+1\right)^{(q-p)/q}\|P_n\|_p^{(q-p)/q}\ \|P_n\|_p^{p/q} \leq C(p,q)(n+1)^{1/p-1/q}\|P_n\|_p.$$

Таким образом, неравенство (2) доказано.

Аналогичное неравенство для тригонометрических полиномов ранее установлено Джексоном при $p=\infty$ и С. М. Никольским при $1\leq p<\infty$.

С помощью неравенства (2) можно для компактных коммутативных групп G со второй аксиомой счетности указать вложения, обратные к вложению (1).

Для этого, рассматривая банахово пространство $L^p(G)$, обозначим через $E_n^{(p)}(f)$ наилучшее приближение функции $f\in L^p(G)$ многочленами по системе характеров X порядка не выше $n-1$ в метрике $L^p(G)$, т. е.

$$E_n^{(p)}(f) = \underline{\inf_{\{a_k\}}\left\{\int_G \left| f(g)-\sum_{k=0}^{n-1} a_k\chi_k(g)\right|^p d\mu(g)\right\}^{1/p}}, \quad 1\leq p\leq\infty. \qquad (5)$$

Следовательно, каждая функция $f\in L^p(G)$ порождает последовательность ее наилучших приближений $\{E_n^{(p)}(f)\}$, $n=0,1,2,\ldots$, которая для нее является важной конструктивной характеристикой. Для пространства $L^p(G)$ верно также, что для любой монотонно стремящейся к нулю числовой последовательности $\{\alpha_n\}$ найдется функция $f\in L^p(G)$, у которой $E_n^{(p)}(f)=\alpha_n$, $n=0,1,2,\ldots$.

Для банаховых пространств $L^p(G)$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть G — нульмерная компактная коммутативная группа и для банахового пространства $L^p(G)$, $1\leq p\leq\infty$, при некотором q, $1\leq p<q\leq\infty$, выполнено условие*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{q/p-2} \left[E_n^{(p)}(f) \right]^q < \infty, \tag{6}$$

где $E_n^{(p)}(f)$ *определено равенством* (5). *Тогда имеет место вложение* $L^q(G) \subset L^p(G)$ (*обратное к вложению* (1)) *и выполняется неравенство*

$$\|f\|_q \le C(p,q) \left\{ \left| \int_G f(g)\, d\mu(g) \right|^q + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \left[E_n^{(p)}(f) \right]^q \right\}^{1/q}.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\Delta_\nu = T_{2^{\nu+1}}^{(p)} - T_{2^\nu}^{(p)}$, где $\{T_n^{(p)}\}$ — последовательность полиномов наилучших в $L^p(G)$ приближений функции f по системе характеров X, $\sigma_\nu = \sum_{2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} l^{q/p-2} \left[E_l^{(p)}(f) \right]^q$. Обозначая $\alpha = \dfrac{p+q}{p}$, $\alpha' = \dfrac{p+q}{q}$, с помощью неравенства Гельдера и неравенства (2), как и в [1] (см. также. [2]), получаем оценку

$$\int_G \left| \Delta_\mu \Delta_\nu \right|^{q/2} d\mu(g) \le C(p,q) \cdot \sigma_\mu^{1/2}\, \sigma_\nu^{1/2}\, 2^{-|\nu-\mu|(1/2-\alpha)}. \tag{7}$$

Пусть теперь $r = [q] + 1$ и $\delta_\nu = |\Delta_\nu|^{q/2}$. Тогда с помощью оценки (7) находим

$$\int_G \left| \sum_{\nu=1}^{N} \Delta_\nu \right|^q d\mu(g) \le \int_G \left(\sum_{\nu=1}^{N} \delta_\nu \right)^r d\mu(g) = \int_G \sum_{\nu_1=1}^{N} \ldots \sum_{\nu_r=1}^{N} \delta_{\nu_1} \ldots \delta_{\nu_r}\, d\mu(g) =$$

$$= \sum_{\nu_1=1}^{N} \ldots \sum_{\nu_r=1}^{N} \int_G \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{r} \delta_{\nu_i}^{1/(r-1)}\, \delta_{\nu_j}^{1/(r-1)}\, d\mu(g) \le \sum_{\nu_1=1}^{N} \ldots \sum_{\nu_r=1}^{N} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{r} \left(\int_G \delta_{\nu_i}^{r/2} \delta_{\nu_j}^{r/2} d\mu(g) \right)^{2/r(r-1)} \le$$

$$\le [C(p,q)]^{2/r(r-1)} \sum_{\nu_1=1}^{N} \ldots \sum_{\nu_r=1}^{N} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{r} \left(\sigma_{\nu_i}^{1/2}\, \sigma_{\nu_j}^{1/2}\, 2^{-|\nu_i - \nu_j|(1/2-\alpha)} \right)^{2/r(r-1)} \le$$

$$\le C_1(p,q) \sum_{\nu_1=1}^{N} \ldots \sum_{\nu_r=1}^{N} \prod_{i=1}^{r} \sigma_{\nu_i}^{1/r} \prod_{j=1}^{r} 2^{-|\nu_i - \nu_j|\,(1/2-1/\alpha)\,2/r(r-1)} \le$$

$$\le C_1(p,q) \prod_{i=1}^{r} \sum_{\nu_1=1}^{N} \ldots \sum_{\nu_r=1}^{N} \sigma_{\nu_i} \prod_{j=1}^{r} 2^{-|\nu_i-\nu_j|(1/2-1/\alpha)2/r(r-1)} \le$$

$$\le C_1(p,q) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} 2^{-|\nu|\,(\alpha-2)/\alpha} \sum_{\nu=1}^{N} \sigma_\nu \le C_1(p,q) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{p/q-2} \left[E_n^{(p)}(f) \right]^q \right\}. \tag{8}$$

Таким образом, ряд $T_1^{(p)} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[T_{2^{\nu+1}}^{(p)} - T_{2^{\nu}}^{(p)}\right]$ сходится в метрике $L^p(G)$ к функции, эквивалентной f. Поскольку

$$\left\|T_1^{(p)}\right\|_q \leq C(p,q)\left\|T_1^{(p)}\right\|_p \leq C(p,q)\left[\left|\int_G f(g)\,d\mu(g)\right| + E_0^{(p)}(f)\right],$$

эта оценка вместе с (8) завершают доказательство теоремы 1.

Заметим, что при доказательстве теоремы нигде не предполагалась ограниченность системы чисел $\{p_n\}$.

Необходимость условия (6) подтверждается следующим примером.

Пусть функция

$$f(g) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{(\nu-n+1)\left(\alpha_\nu^p - \alpha_{\nu+1}^p\right)}{(\nu+1)^p}\right]^{1/p}\chi_n(g), \quad 1 \leq p < \infty,$$

где $\{\alpha_n\}$ — некоторая монотонно стремящаяся к нулю последовательность чисел, для которой при $q > p \geq 1$ расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{q/p-2}\alpha_n^q$. Тогда $f \in L^p(G)$, $E_n^{(p)}(f) = O(\alpha_n)$, однако $f \notin L^q(G)$.

Для периодических функций и тригонометрической системы аналогичный факт с подробным доказательством изложен в [12, с. 88].

Последовательность наилучших приближений позволяет также без использования структурных свойств функций из пространств $L^p(G)$ получить и некоторые другие важные оценки.

Пусть функция $f(g)$ принадлежит $L(G)$. Тогда она представима рядом $f(g) \sim \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\chi_n(g)$, где $c_n(f) = \int_G f(g)\overline{\chi_n(g)}\,d\mu(g)$ — коэффициенты Фурье функции $f(g)$ по системе характеров. В силу ортогональности системы характеров легко получить, что если $f(g) \in L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, то

$$|c_n(f)| \leq E_{n-1}^{(p)}(f), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Действительно, пусть $T_{n-1}(g)$ — многочлен наилучшего приближения функции $f(g)$ в метрике пространства $L^{(p)}(G)$. Справедливо равенство

$$c_n(f) = \int_G f(g)\overline{\chi_n(g)}\,d\mu(g) = \int_G \{f(g) - T_{n-1}(g)\}\overline{\chi_n(g)}\,d\mu(g),$$

из которого следует (9).

Кроме того, если функция $f(g)$ принадлежит $L^2(G)$, то

$$E_n^{(2)}(f) = \underline{\inf_{\{a_k\}} \left\{ \int_G \left| f(g) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(g) \right|^2 d\mu(g) \right\}^{1/2}} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2},$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(g)$.

Далее, полагая $a_n = c_n^2(f)$ в известном числовом неравенстве (см. [5, с. 307], теорема 345)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1/2} < \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + a_{n+1} + \ldots}{n} \right)^{1/2}, \tag{10}$$

где $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)| < \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^{(2)}(f)}{\sqrt{n}}. \tag{11}$$

Неравенство (11), таким образом, задает критерий абсолютной сходимости ряда Фурье функции $f(g) \in L^2(G)$, который для периодических функций в метрике $\mathbf{C}$ получил С. Н. Бернштейн, а для метрики L^2 — С. Б. Стечкин (см. [7]).

Последовательности наилучших приближений позволяют также в общем виде оценивать отклонения функций в соответствующей метрике от линейных операторов, построенных на базе рядов Фурье функций, заданных на нульмерных группах.

Пусть $f \in L^p(G)$, $1 \le p \le \infty$, и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)\chi_n(g)$ — ее ряд Фурье. Рассмотрим частную сумму порядка m_n ряда Фурье функции f, которая имеет вид

$$S_{m_n}(f;g) = \sum_{k=0}^{m_n-1} c_n(f)\chi_n(g) = \int_G f(g \dot{-} h) D_{m_n}(u) d\mu(u), \tag{12}$$

где

$$D_{m_n}(g) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \chi_n(g) = \begin{cases} m_n & \text{при } g \in U_n, \\ 0 & \text{при } g \in G \setminus U_n \end{cases}$$

— ядро Дирихле порядка m_n, U_n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ — элементы основной цепочки подгрупп группы G.

Из (12) следует, что если f принадлежит $L^p(G)$, $1 \le p \le \infty$, то

$$\left\| f(g) - S_{m_n}(f;g) \right\|_p \to 0 \quad (m_n \to \infty).$$

Из этого соотношения вытекает, что для восстановления функции по ее ряду Фурье в пространстве $L^p(G)$ достаточно воспользоваться лишь последовательностью ее частных сумм $S_{m_n}(f;g)$ порядка m_n.

Пусть теперь $\Lambda\{\lambda_{r,k}\}$, $0 \le r$, $k < \infty$, — произвольная треугольная матрица чисел, где $\lambda_{r,0} = 1$, $\lambda_{r,k} = 0$ при $k > r$, $r = 0,1,2,\ldots$. Рассмотрим линейный оператор

$$U_r(f;\Lambda;g) = \sum_{k=0}^{r} \lambda_{r,k} c_k(f) \chi_k(g), \tag{13}$$

где $c_k(f) = \int_G f(g)\overline{\chi_k(g)}\,d\mu(g)$.

Рассмотрим при любом p, $1 \le p \le \infty$, величину

$$R_r^{(p)}(f;\Lambda) = \|f - U_r(f;\Lambda)\|_p = \left\{\int_G |f(g) - U_r(f;\Lambda;g)|^p\, d\mu(g)\right\}^{1/p}. \tag{14}$$

Аналогичная величина для тригонометрической системы в периодическом случае рассматривалась автором в [3]. В [3] установлена оценка величины (14) через наилучшие приближения в тригонометрическом случае. Ниже приводится аналог результата автора, установленный С. Л. Блюминым в его кандидатской диссертации для нульмерных групп (см. [10]).

Теорема 2. *Пусть* $f \in L^p(G)$, $1 \le p \le \infty$, *и* $\Lambda\{\lambda_{r,k}\}$ — *произвольная треугольная матрица чисел, где* $\lambda_{r,0} = 1$, $\lambda_{r,k} = 0$ *при* $k > r$, $r = 0,1,2,\ldots$. *Тогда*

$$R_r^{(p)}(f;\Lambda) = \|f - U_r(f;\Lambda)\|_p \le (1 + \Phi_r) E_r^{(p)}(f) + 2\sum_{k=0}^{n} \delta(k+1;r) E_{m_k}^{(p)}(f), \tag{15}$$

где $m_n \le r < m_{n+1}$, $E_n^{(p)}(f)$ *определено равенством* (5),

$$\Phi_r = \int_G \left|\sum_{k=0}^{r} \lambda_{r,k}\, \chi_k(g)\right| d\mu(g),$$

$$\delta(s+1;r) = \int_G \left|\sum_{k=1}^{m_{n+1}-1} (1 - \lambda_{r,k}) \chi_k(h)\right| d\mu(h).$$

Доказательство. Пусть $T_r(g)$, $r = 1,2,\ldots$, — полиномы наилучшего приближения порядка r функции f в метрике $L^p(G)$. Тогда при $m_n \le r < m_{n+1}$ в силу ортогональности системы характеров группы G находим

$$R_r^{(p)}(T_r;\Lambda) = \left\|\int_G T_r(g \dot{-} h) \sum_{k=1}^{r} (1 - \lambda_{r,k}) \chi_k(h)\, d\mu(h)\right\|_p =$$

$$= \left\| \int_G T_r(g \dot{-} h) \sum_{k=1}^{m_{n+1}-1} (1-\lambda_{r,k}) \chi_k(h)\, d\mu(h) \right\|_p =$$

$$= \left\| \sum_{s=1}^{n-1} \int_G \left[T_{m_{s+1}}(g \dot{-} h) - T_{m_s}(g \dot{-} h) \right] \sum_{k=1}^{m_{n+1}-1} (1-\lambda_{r,k}) \chi_k(h)\, d\mu(h) + \right.$$

$$+ \int_G \left[T_r(g \dot{-} h) - T_{m_n}(g \dot{-} h) \right] \sum_{k=1}^{m_{n+1}-1} (1-\lambda_{r,k}) \chi_k(h)\, d\mu(h) +$$

$$\left. + \int_G \left[T_{m_1} - T_{m_0} \right] \sum_{k=1}^{m_1-1} (1-\lambda_{r,k}) \chi_k\, d\mu \right\|_p .$$

Используя неравенство Минковского, имеем

$$R_r^{(p)}(T_r; \Lambda) \le 2 \sum_{s=1}^{n-1} \int_G \left| \sum_{k=1}^{m_{n+1}-1} (1-\lambda_{r,k}) \chi_k(h) \right| d\mu(h)\, E_{m_s}^{(p)}(f) +$$

$$+ 2 E_{m_n}^{(p)}(f) \int_G \left| \sum_{k=1}^{m_{n+1}-1} (1-\lambda_{r,k}) \chi_k(h) \right| d\mu(h) +$$

$$+ 2 E_{m_0}^{(p)}(f) \int_G \left| \sum_{k=1}^{m_1-1} (1-\lambda_{r,k}) \chi_k(h) \right| d\mu(h) =$$

$$= 2 \sum_{s=0}^{n} \delta(s+1; r)\, E_{m_s}^{(p)}(f). \tag{16}$$

Далее, используя неравенство Минковского, получаем

$$R_r^{(p)}(f; \Lambda) \le \| f - T_r \|_p + R_r^{(p)}(T_r; \Lambda) + \| U_r(T_r - f; \Lambda; g) \|_p =$$

$$= E_r^{(p)}(f) + R_r^{(p)}(T_r; \Lambda) + \| U_r(T_r - f; \Lambda; g) \|_p . \tag{17}$$

Наконец, оценим величину $\| U_r(T_r - f;\, \Lambda; g) \|_p$.

$$\| U_r(T_r - f; \Lambda; g) \|_p = \left\{ \int_G \left| \int_G [f(g \dot{-} h) - T_r(g \dot{-} h)] \sum \lambda_{r,k} \chi_k(h)\, d\mu(h) \right|^p \right\}^{1/p} \le$$

$$\le E_r^{(p)}(f)\, \Phi_r . \tag{18}$$

Из оценок (16) – (18) вытекает утверждение теоремы 2.

Рассматривая указанные выше вопросы для функций, заданных на группе G отрезка $[0,1]$ с групповой операцией $x \dotplus y = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu + y_\nu \,(\operatorname{mod} p_\nu)}{m_\nu}$, $x \dot{-} y = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu - y_\nu + \alpha_\nu p_\nu}{m_\nu}$ ($\alpha_\nu = 1$, если $x_\nu < y_\nu$ и $\alpha_\nu = 0$ при $x_\nu \geq y_\nu$), где $x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu}{m_\nu}$, $y = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_\nu}{m_\nu}$, получаем, что для измеримых интегрируемых по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функций справедливо указанное Моргенталером [6] равенство

$$\int_0^1 f(x \dotplus y)\,dy = \int_0^1 f(y)\,dy = \int_0^1 f(x \dot{-} y)\,dy.$$

В работах Моргенталера [6] и Н. Я. Виленкина [11] для функций, заданных на нульмерных группах, введено понятие так называемого модуля непрерывности, являющегося основной структурной характеристикой функций $f \in L^p(G)$.

Определение. *Пусть функция* f *принадлежит* $L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$. *Модулем непрерывности функции* f *называют величины*

$$\omega_n^{(p)}(f) = \sup_{h \in U_n} \left\{ \int_G |f(g \dotplus h) - f(g)|^p \, d\mu(g) \right\}^{1/p} \quad \textit{при} \quad 1 \leq p < \infty$$

и

$$\omega_n^{(\infty)}(f) = \omega_n(f) = \sup_{h \in U_n; g \in G} |f(g \dotplus h) - f(g)| \quad \textit{при} \quad p = \infty,$$

где U_n, $n = 0,1,2,\ldots$, — *элементы основной цепочки подгрупп группы* G.

А. И. Рубинштейном (см. [1], гл. II) установлено, что для любой монотонно стремящейся к нулю последовательности чисел ω_n в случаях $p = \infty$, $p = 1$, $p = 2$ найдутся функции f, f_1 и f_2, для которых при каждом n, $n = 0,1,2,\ldots$, соответственно справедливы равенства

$$\omega_n(f) = \omega_n^{(1)}(f_1) = \omega_n^{(2)}(f_2) = \omega_n.$$

В случае, когда функции $f \in L^p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, определяются последовательностью (5) своих наилучших приближений, А. В. Ефимов [8] получил при любом p, $1 \leq p \leq \infty$, следующую оценку модулей непрерывности через наилучшие приближения $E_n^{(p)}(f)$:

$$E_{m_n}^{(p)}(f) \leq \omega_n^{(p)}(f) \leq 2E_{m_n}^{(p)}(f), \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Окончательные порядковые соотношения между структурными и конструктивными характеристиками периодических функций из пространств $L_p[0,1]$, $1 \leq p \leq \infty$, т. е. между модулем непрерывности $\omega(f;h)_p$ с шагом h периодической периода 1 функции f и ее наилучшими приближениями $E_n(f)_p$ порядка n в метрике пространства $L_p[0,1]$, выражаются следующими точными порядковыми неравенствами:

$$E_n(f)_p \cong \left\{\prod_{\nu=1}^{n} E_\nu(f)_p\right\}^{1/n} \cong \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma-1} E_\nu^{\gamma}(f)_p\right\}^{1/\gamma} \cong \omega\left(f;\frac{1}{n+1}\right)_p \cong$$

$$\cong \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\beta-1} E_\nu^{\beta}(f)_p\right\}^{1/\beta}, \quad \text{где} \quad \gamma = \max(2,p), \quad \beta = \min(2,p). \tag{19}$$

По поводу неравенств (19), которые существенно дополняют известные неравенства Джексона и С. Н. Бернштейна для пространств $L_p[0,1]$, см. монографию [12].

1. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультикативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. – Баку: Элм, 1981. – 180 с.
2. *Тиман М. Ф., Рубинштейн А. И.* О вложении классов функций, определенных на нульмерных группах // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 8.
3. *Тиман М. Ф.* Наилучшее приближение функций и линейные методы суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – **29**, № 3. – С. 587 – 604.
4. *Виленкин Н. Я.* Теория мультипликативных систем. Дополнение к книге С. Качмажа и Г. Штейнгауза „Теория ортогональных рядов”. – М.: Физмагиз, 1958.
5. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
6. *Morgenthaler G.* Walsh – Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. – 1947. – **84**, № 2. – P. 472 – 507 .
7. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**, № 2. – С. 87 – 98.
8. *Ефимов А. В.* О некоторых аппроксимативных свойствах периодических мультипликативных ортонормированных систем // Мат. сб. – 1966. – **69**, № 3. – С. 354 – 370.
9. *Голубов Б. И.* Об одном классе полных ортогональных систем // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 2. – С. 597 – 310.
10. *Блюмин С. Л.* О линейных методах суммирования рядов Фурье по мультипликативным системам // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 2. – С. 449 – 455.
11. *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормированных систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1947. – **11**. – С. 363 – 400.
12. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – Киев: Наук. думка, 2009. – 376 с.
13. *Тиман М. Ф., Тухлиев К.* Свойства некоторых ортонормированных систем. – Днепропетровск, 1980. – Деп. в ВИНИТИ, № 4929-80.

Получено 21.10.11