УДК 513.88

Ю. С. Самойленко, Д. Ю. Якименко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СКАЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, РАВНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЮ УНИТАРНЫХ КОРНЕЙ ИЗ ЕДИНИЧНОГО ОПЕРАТОРА

We study the set of all $\gamma \in \mathbb{C}$ for which there exist unitary operators U_i such that $U_1 U_2 \ldots U_n = \gamma I$ and $U_i^{m_i} = I$, where $m_i \in \mathbb{N}$ are given.

Вивчається множина тих $\gamma \in \mathbb{C}$, для яких існують такі унітарні оператори U_i, що $U_1 U_2 \ldots U_n = \gamma I$ та $U_i^{m_i} = I$, де $m_i \in \mathbb{N}$ є заданими.

Пусть H — гильбертово пространство (конечномерное или бесконечномерное сепарабельное) над $\mathbb{C}$. В ряде статей (см. [1 – 4] и приведенную в них библиографию) изучались, в частности, следующие задачи:

1) нахождение множества всех $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых существуют самосопряженные операторы $\{A_k\}_{k=1}^n$ с заданными спектрами $\{\sigma(A_k)\}_{k=1}^n$ такие, что выполняется соотношение

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \lambda I_H, \tag{1}$$

где I_H — единичный оператор в H;

2) описание с точностью до унитарной эквивалентности неприводимых наборов операторов $\{A_k\}_{k=1}^n$ с заданными спектрами $\{\sigma(A_k)\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих соотношению (1).

Аналогичные вопросы естественны и для произведений унитарных операторов (см., например, [5 – 7]):

1) при каких $\gamma \in S^1$ (через S^1 будем обозначать множество $\{|\gamma| = 1, \gamma \in \mathbb{C}\}$) существуют унитарные операторы $\{U_k\}_{k=1}^n$ с заданными спектрами $\{\sigma(U_k)\}_{k=1}^n$ такие, что выполняется соотношение

$$U_1 U_2 \ldots U_n = \gamma I_H; \tag{2}$$

2) дать описание с точностью до унитарной эквивалентности неприводимых наборов операторов $\{U_k\}_{k=1}^n$ с заданными спектрами $\{\sigma(U_k) \subset S^1\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих соотношению (2).

О мультипликативных задачах и их связях с аддитивными см., например, [8 – 10].

Настоящая статья посвящена изучению множества $\prod_{(m_1,\ldots,m_n)}$, $m_k \in \mathbb{N}$, $m_k \geq 2$, $k = 1,\ldots,n$, тех $\gamma \in S^1$, для которых существуют унитарные операторы $\{U_k\}_{k=1}^n$ такие, что $U_k^{m_k} = I$ и выполняется соотношение (2).

Через S_n^1 будем обозначать множество $\{\gamma^n = 1, \gamma \in \mathbb{C}\}$. Если $n = 1$, то очевидно, что $\prod_{(m)} = S_m^1$. При $n = 2$ нетрудно доказать, что $\prod_{(m_1,m_2)} = S^1_{\text{НОК}(m_1,m_2)}$, где НОК$(m_1,\ldots,m_n)$ — наименьшее общее кратное чисел m_k.

В случае $n = 3$ и $\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_3} > 1$ множество $\prod_{(m_1,m_2,m_3)}$ конечно и подсчитано (см. теорему 1).

При $\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \ldots + \dfrac{1}{m_n} \leq n - 2$ в [5], в частности, было показано, что $\prod_{(2,2,2,2)} = S^1$, а в [6] — что $\prod_{(m,m,m)} = S^1$ при $m \geq 3$.

Мы докажем (см. теорему 2), что при $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_3}\le 1$ множество $\prod_{(m_1,m_2,m_3)}=S^1$ при дополнительном условии, что m_2, m_3 являются четными, однако при $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_3}=1$ множество $\prod_{(m_1,m_2,m_3)}=S^1$ без дополнительных условий (теорема 3).

1. Отметим следующее свойство множества $\prod_{(m_1,\ldots,m_n)}$.

Утверждение. $\prod_{(m_1,\ldots,m_n)}$ *не зависит от порядка* $\{m_i\}$.

Доказательство. Действительно, если $U=U_1U_2\ldots U_n$, где $U_i^{m_i}=I$, U_i унитарные, то

$$U=U_1U_2\ldots U_{k-2}(U_k)(U_k^{-1}U_{k-1}U_k)U_{k+1}\ldots U_n,$$

где $U_i^{m_i}=I$ при $i\le k-2$, $(U_k)^{m_k}=I$, $(U_k^{-1}U_{k-1}U_k)^{m_{k-1}}=I$, $U_i^{m_i}=I$ при $i\ge k+1$. Отсюда получаем, что транспозиции в наборе $\{m_i\}$ не меняют множество $\prod_{(m_1,\ldots,m_n)}$, а значит, и любая перестановка $\{m_i\}$ его не меняет.

Утверждение доказано.

Отметим, что если $m_i\ge 2$, то $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_3}>1$ будет только при $(m_1,m_2,m_3)=$ $=(2,3,3),(2,3,4),(2,3,5)$ или $(2,2,n), n\ge 2$, а $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_3}=1$ только при $(m_1,m_2,m_3)=$ $=(2,4,4),(3,3,3)$ или $(2,3,6)$ с точностью до перестановки.

Теорема 1. *В случае, когда* $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_3}>1$,

$$\prod_{(2,2,n)}=S^1_{2n},\qquad \prod_{(2,3,3)}=S^1_{12},\qquad \prod_{(2,3,4)}=S^1_{24},\qquad \prod_{(2,3,5)}=S^1_{60}.$$

Доказательство. Через $G_{(m_1,m_2,m_3)}$ будем обозначать группу, заданную образующими и соотношениями $\langle x,y,z,u\mid x^{m_1}=y^{m_2}=z^{m_3}=1, xyz=u, u\in Z(G)\rangle$ (условие $u\in$ $\in Z(G)$ означает, что выполняются равенства $xu=ux$, $yu=uy$, $zu=uz$). Отметим, что любой неприводимый набор $\{U_1,U_2,U_3\}$, для которого $\gamma I=U_1U_2U_3, U_i^{m_i}=I$, порождает неприводимое представление π группы $G_{(m_1,m_2,m_3)}$: $\pi(x)=U_1$, $\pi(y)=U_2$, $\pi(z)=U_3$, $\pi(u)=$ $=\gamma I$. И наоборот, неприводимое представление дает неприводимый набор $\{U_1,U_2,U_3\}$.

1. Рассмотрим группу $G_{(2,2,n)}$. Имеем $(xy)^n=(uz^{-1})^n=u^nz^{-n}=u^n$; $(yx)^n=x(xy)^nx=$ $=xu^nx=u^n$, отсюда $u^{2n}=u^nu^n=(xy)^n(yx)^n=1$. Отсюда получаем $\prod_{(2,2,n)}\subset S^1_{2n}$.

Обозначим $t=u^n$. Несложно видеть, что $G_{(2,2,n)}\simeq\langle x,y,t\mid x^2=y^2=1,(xy)^n=t,$ $t^2=1,\ t\in Z(G)\rangle\times C_n$. Но $\langle x,y,t\mid x^2=y^2=1,(xy)^n=t,t^2=1,t\in Z(G)\rangle\simeq D_{2n}$, где $D_{2n}=\langle x,y\mid x^2=y^2=(xy)^{2n}=1\rangle$ (группа диэдра), так как $(xy)^n\in Z(D_{2n})$. Для D_{2n} существуют представления π, для которых $\pi((xy)^n)=-I$ (можно, например, взять одномерное представление $\{1,-1\}$ подгруппы $\{1,(xy)^n\}$ и построить индуцированное представление), а значит, существуют представления π группы $\langle x,y,t\mid x^2=y^2=1,(xy)^n=t,t^2=1,t\in Z(G)\rangle$, для которых $\pi(t)=-I$. Отсюда $\prod_{(2,2,n)}=S^1_{2n}$.

2. Рассмотрим группу $G_{(5,3,2)}=\langle x,y,z,u\mid x^5=y^3=z^2=1,xyz=u,u\in Z(G)\rangle$. Поскольку $z=(xy)^{-1}u$ и $z^2=1$, выполняется $(xy)^2=u^2$. Обозначим $Q_1=u^{-1}xy$, $Q_2=$ $=u^{-1}yx$. Тогда $Q_1^2=Q_2^2=1$. Поскольку $xyxy=u^2$, то $x^4=x^{-1}=u^{-2}yxy$, $y^2=y^{-1}=$ $=u^{-2}xyx$. Подсчитаем Q_1Q_2 :

$$Q_1Q_2=u^{-2}x(y^2)x=u^{-2}x(u^{-2}xyx)x=u^{-4}x^2yx^2=u^{-4}x^2y(x^{-1})x^3=$$

$$= u^{-4}x^2y(u^{-2}yxy)x^3 = u^{-6}x^2y^2xyx^3 = u^{-6}(x^2y^2)x(x^2y^2)^{-1}.$$

Отсюда $(Q_1Q_2)^5 = u^{-30}(x^2y^2)x^5(x^2y^2)^{-1} = u^{-30}$, $(Q_2Q_1)^5 = Q_1(Q_1Q_2)^5Q_1 = Q_1u^{-30}Q_1 = u^{-30}$. Отсюда $u^{-60} = u^{-30}u^{-30} = (Q_1Q_2)^5(Q_2Q_1)^5 = 1$, т. е. $u^{60} = 1$, а значит, $\prod_{(2,3,5)} \subset S^1_{60}$.

Обозначим $x' = xu^{-6}$, $y' = yu^{-10}$, $z' = zu^{-15}$. Тогда $x'^5 = y'^3 = z'^2 = u^{-30}$, $x'y'z' = xyzu^{-31} = u^{-30}$. Пусть $t = u^{-30}$. Тогда несложно видеть, что $G_{(5,3,2)} \simeq \langle x, y, z, t \mid x^5 = y^3 = z^2 = xyz = t,\ t^2 = 1,\ t \in Z(G)\rangle \times C_{30}$.

Группа $\langle x, y, z, t \mid x^5 = y^3 = z^2 = xyz = t,\ t^2 = 1,\ t \in Z(G)\rangle$ — это бинарная икосаэдрическая группа (порядка 120). Она имеет представления π, для которых $\pi(t) = -I$ (можно взять одномерное представление $\{1, -1\}$ подгруппы $\{1, t\}$ и построить индуцированное представление), а значит, есть представления $G_{(5,3,2)}$, для которых $\pi(u^{-30}) = -I$. Отсюда $\prod_{(2,3,5)} = S^1_{60}$.

Аналогично показываем, что $\prod_{(2,3,4)} = S^1_{24}$, $\prod_{(2,3,3)} = S^1_{12}$.

Рассмотрим группу $G_{(4,3,2)} = \langle x, y, z, u \mid x^4 = y^3 = z^2 = 1, xyz = u, u \in Z(G)\rangle$. Имеем $(xy)^2 = u^2$, $x^3 = x^{-1} = u^{-2}yxy$, $y^2 = y^{-1} = u^{-2}xyx$. Обозначим $Q_1 = u^{-1}xy$, $Q_2 = u^{-1}yx$, $Q_1^2 = Q_2^2 = 1$. Тогда

$$Q_1Q_2 = u^{-2}x(y^2)x = u^{-2}x(u^{-2}xyx)x = u^{-4}x^2yx^2 = u^{-4}(x^2)y(x^{-2}).$$

Отсюда $(Q_1Q_2)^3 = u^{-12}(x^2)y^3(x^{-2}) = u^{-12}$, $(Q_2Q_1)^3 = Q_1(Q_1Q_2)^3Q_1 = Q_1u^{-12}Q_1 = u^{-12}$, Откуда $u^{-24} = u^{-12}u^{-12} = (Q_1Q_2)^3(Q_2Q_1)^3 = 1$, т. е. $u^{24} = 1$, а значит, $\prod_{(2,3,4)} \subset S^1_{24}$.

Обозначим $x' = xu^{-3}$, $y' = yu^{-4}$, $z' = zu^{-6}$. Тогда $x'^4 = y'^3 = z'^2 = u^{-12}$, $x'y'z' = xyzu^{-13} = u^{-12}$. Пусть $t = u^{-12}$. Тогда несложно видеть, что $G_{(4,3,2)} \simeq \langle x, y, z, t \mid x^4 = y^3 = z^2 = xyz = t,\ t^2 = 1,\ t \in Z(G)\rangle \times C_{12}$.

Группа $\langle x, y, z, t \mid x^4 = y^3 = z^2 = xyz = t, t^2 = 1, t \in Z(G)\rangle$ — это бинарная октаэдрическая группа (порядка 48). Она имеет представления π, для которых $\pi(t) = -I$, а значит, есть представления $G_{(4,3,2)}$, для которых $\pi(u^{-12}) = -I$. Отсюда $\prod_{(2,3,4)} = S^1_{24}$.

Рассмотрим группу $G_{(3,3,2)} = \langle x, y, z, u \mid x^3 = y^3 = z^2 = 1,\ xyz = u,\ u \in Z(G)\rangle$. Имеем $(xy)^2 = u^2$, $x^2 = x^{-1} = u^{-2}yxy$, $y^2 = y^{-1} = u^{-2}xyx$. Обозначим $Q_1 = u^{-1}xy$, $Q_2 = u^{-1}yx$, $Q_1^2 = Q_2^2 = 1$. Тогда

$$Q_1Q_2 = u^{-2}x(y^2)x = u^{-2}x(u^{-2}xyx)x = u^{-4}x^2yx^2 = u^{-4}(x)(xy)(x^{-1}).$$

Отсюда $(Q_1Q_2)^2 = u^{-8}(x)(xy)^2(x^{-1}) = u^{-8}(x)u^2(x^{-1}) = u^{-6}$, $(Q_2Q_1)^2 = Q_1(Q_1Q_2)^2Q_1 = Q_1u^{-6}Q_1 = u^{-6}$. Отсюда $u^{-12} = u^{-6}u^{-6} = (Q_1Q_2)^2(Q_2Q_1)^2 = 1$, т. е. $u^{12} = 1$, а значит, $\prod_{(2,3,3)} \subset S^1_{12}$.

Обозначим $x' = xu^{-2}$, $y' = yu^{-2}$, $z' = zu^{-3}$. Тогда $x'^3 = y'^3 = z'^2 = u^{-6}$, $x'y'z' = xyzu^{-7} = u^{-6}$. Пусть $t = u^{-6}$. Тогда несложно видеть, что $G_{(3,3,2)} \simeq \langle x, y, z, t \mid x^3 = y^3 = z^2 = xyz = t,\ t^2 = 1,\ t \in Z(G)\rangle \times C_6$.

Группа $\langle x, y, z, t \mid x^3 = y^3 = z^2 = xyz = t, t^2 = 1, t \in Z(G)\rangle$ — это бинарная тетраэдная группа (порядка 24). Она имеет представления π, для которых $\pi(t) = -I$, а значит, есть представления $G_{(3,3,2)}$, для которых $\pi(u^{-6}) = -I$. Отсюда $\prod_{(2,3,3)} = S^1_{12}$.

Теорема 1 доказана.

Замечание. Чтобы найти все неприводимые наборы $\{U_1, U_2, U_3\}$, удовлетворяющие условиям $\gamma I = U_1 U_2 U_3$, $U_i^{m_i} = I$ при $\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_3} > 1$, достаточно найти все неприводимые представления группы $G_{(m_1,m_2,m_3)}$, которая, как было показано при доказательстве теоремы 1, конечна и при $(m_1, m_2, m_3) = (2, 2, n)$ есть прямое произведение циклической на группу диэдра, а при $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ — произведение циклической на соответствующую бинарную полиэдрическую группу.

2. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_3} \le 1$, *где* m_2, m_3 *являются четными. Тогда* $\prod_{(m_1,m_2,m_3)} = S^1$.

Доказательство. Рассмотрим треугольную группу $T_{(m_1,m_2,m_3)} = \langle x, y, z \mid x^{m_1} = y^{m_2} = z^{m_3} = xyz = 1\rangle$. В условиях теоремы эта группа бесконечная (см. например, [11]). Рассмотрим ее (левое) регулярное представление подгруппой перестановок натуральных чисел. Элементу x будет соответствовать некая перестановка чисел из $\mathbb{N}$, которую обозначим через X. Аналогично, y соответствует перестановка Y, а элементу z — Z. Ясно, что для перестановок выполняются те же соотношения: $X^{m_1} = Y^{m_2} = Z^{m_3} = XYZ = 1$, где 1 обозначает тождественную перестановку.

Возьмем сепарабельное гильбертово пространство H с ортонормированным базисом $\{v_1, \ldots, v_n, \ldots\}$, $\dim H = \infty$.

Рассмотрим унитарные операторы A, B, C в H следующего вида:

$Av_n = e^{i\cdot a(n)} v_{X(n)}$, $Bv_n = e^{i\cdot b(n)} v_{Y(n)}$, $Cv_n = e^{i\cdot c(n)} v_{Z(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, где $a, b, c \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — некоторые функции.

Покажем, что a, b, c можно подобрать таким образом, что будут выполняться соотношения

$$A^{m_1} = B^{m_2} = C^{m_3} = I, \qquad ABC = \gamma I,$$

для любого наперед заданного $\gamma = e^{i\lambda} \in S^1$, из чего будет следовать утверждение теоремы.

Условие $A^{m_1} = I$ эквивалентно следующему: для любого n

$$a(n) + a(X(n)) + \ldots + a(X^{m_1-1}(n)) = 2\pi k_1(n), \quad k_1(n) \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что для любого n $X^{m_1}(n) = n$, так как $x^{m_1} = 1$ в группе $T_{(m_1,m_2,m_3)}$. Аналогично, условия $B^{m_2} = I$, $C^{m_3} = I$ эквивалентны соответственно условиям

$$b(n) + b(Y(n)) + \ldots + b(Y^{m_2-1}(n)) = 2\pi k_2(n), \quad k_2(n) \in \mathbb{Z},$$

$$c(n) + c(Z(n)) + \ldots + c(Z^{m_3-1}(n)) = 2\pi k_3(n), \quad k_3(n) \in \mathbb{Z},$$

для любого n.

Условие $ABC = \gamma I$ эквивалентно следующему:

$$c(n) + b(Z(n)) + a(YZ(n)) = \lambda + 2\pi k_4(n), \quad k_4(n) \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что для любого n $XYZ(n) = n$, так как $xyz = 1$.

Покажем, что полученная бесконечная система уравнений имеет решение при любом $\lambda \in \mathbb{R}$, откуда следует, что искомые функции a, b, c существуют.

Положим $k_i(n) = 0, \;\; a(n) = 0$. Тогда при $n > 0$ получим следующую систему:

$$b(n) + b(Y(n)) + \ldots + b(Y^{m_2-1}(n)) = 0,$$

$$c(n) + c(Z(n)) + \ldots + c(Z^{m_3-1}(n)) = 0,$$

$$c(n) + b(Z(n)) = \lambda.$$

По условию теоремы m_2, m_3 являются четными, т. е. $m_2 = 2l_2$, $m_3 = 2l_3$, $l_2, l_3 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим более сильную систему

$$b(n) + b(Y^{l_2}(n)) = 0,$$

$$c(n) + c(Z^{l_3}(n)) = 0,$$

$$c(n) + b(Z(n)) = \lambda,$$

$$n > 0.$$

Выражая $c(n)$ из третьего уравнения и подставляя во второе, для любого n получаем $b(Z(n)) + b(Z^{l_3}(Z(n))) = 2\lambda$, что эквивалентно $b(n) + b(Z^{l_3}(n)) = 2\lambda$.

В итоге получаем эквивалентную систему

$$b(n) + b(Y^{l_2}(n)) = 0,$$

$$b(n) + b(Z^{l_3}(n)) = 2\lambda,$$

$$c(n) = \lambda - b(Z(n)),$$

$$n > 0.$$

Ясно, что эта система совместна тогда и только тогда, когда совместна система

$$b(n) + b(Y^{l_2}(n)) = 0,$$

$$b(n) + b(Z^{l_3}(n)) = 2\lambda,$$

$$n > 0.$$

Далее для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *В группе* $T_{(m_1,m_2,m_3)} = \langle x, y, z \mid x^{m_1} = y^{m_2} = z^{m_3} = xyz = 1 \rangle$ *при* $\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_3} \leq 1$ *и* $m_2 = 2l_2, m_3 = 2l_3$, $l_2, l_3 \in \mathbb{N}$, *выполняются неравенства*

$$\forall k \neq 0\colon (y^{l_2} z^{l_3})^k \neq 1, \qquad (y^{l_2} z^{l_3})^k y^{l_2} \neq 1, \qquad z^{l_3} (y^{l_2} z^{l_3})^k \neq 1.$$

Доказательство. Если $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{2l_2}+\dfrac{1}{2l_3}=1$, то это возможно лишь при $(m_1,2l_2,2l_3)=$ $=(2,4,4)$ или $(m_1,2l_2,2l_3)=(3,2,6)$.

Рассмотрим случай $(2,4,4)$. Группа $T_{(2,4,4)}$ имеет представление, которое удобно задавать как преобразования комплексных чисел. Отображение Y, соответствующее y, — это поворот плоскости $\mathbb{C}$: $Y(c)=\epsilon c$, где $\epsilon=e^{i2\pi/4}, c\in\mathbb{C}$; отображение Z — это поворот со смещением: $Z(c)-1=\epsilon(c-1)$. Тогда $Y^2(c)=(Y(Y(c))=-c$, $Z^2(c)-1=(Z(Z(c))-1=\epsilon(Z(c)-1)=$ $=-(c-1)$, т. е. $Z^2(c)=-c+2$. Отсюда $(Y^2Z^2)(c)=c-2$ и поэтому $\forall k\neq 0$: $(Y^2Z^2)^k\neq \mathrm{id}$ (тождественному преобразованию), а значит, и в группе $T_{(2,4,4)}$ $(y^2z^2)^k\neq 1\ \forall k\neq 0$.

Рассмотрим случай $(3,2,6)$. Группа $T_{(3,2,6)}$ в этом случае имеет следующее представление: отображение $Z(c)=\epsilon c$, где $\epsilon=e^{i2\pi/6}, c\in\mathbb{C}$; $X(c)-1=\epsilon^2(c-1)$; $Y(c)=-c-1-\epsilon$. Тогда $Z^3(c)=-c$, $YZ^3(c)=c-1-\epsilon$. Поэтому $\forall k\neq 0$: $(YZ^3)^k\neq id$, а значит, и в группе $T_{(3,2,6)}$ $(yz^3)^k\neq 1\ \forall k\neq 0$.

Пусть теперь $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{2l_2}+\dfrac{1}{2l_3}<1$. Рассмотрим так называемую „полную” треугольную группу $T^*_{(m_1,m_2,m_3)}=\langle a,b,c\mid a^2=b^2=c^2=(ab)^{m_1}=(bc)^{m_2}=(ca)^{m_3}=1\rangle$, которая является группой Кокстера. Элементы $x=ab$, $y=bc$, $z=ca$ порождают подгруппу G, изоморфную обычной треугольной группе $T_{(m_1,m_2,m_3)}$ (см. [11]), хотя для нас будет важно лишь то, что эта подгруппа является представлением $T_{(m_1,m_2,m_3)}$, что очевидно. Покажем, что в $T^*_{(m_1,2l_2,2l_3)}$ выполняются неравенства $(y^{l_2}z^{l_3})^k\neq 1\ \forall k\neq 0$, где $y=bc$, $z=ca$. Из этого будет следовать, что эти неравенства выполняются и в подгруппе G, а значит, и в группе $T_{(m_1,2l_2,2l_3)}$.

По теореме 2.9 из [11], если слово w из $T^*_{(m_1,m_2,m_3)}$, приведенное к каноническому виду (в котором любые две соседние буквы различны), равно 1, то в этом слове w есть подслово l, которое является подсловом одного из слов $r_1=(ab)^{m_1}$, $r_2=(bc)^{m_2}$, $r_3=(ca)^{m_3}$, $r_4=(ba)^{m_1}$, $r_5=(cb)^{m_2}$, $r_6=(ac)^{m_3}$ (приведенных к каноническому виду), и при этом длина l превышает половину длины соответствующего r_i.

Слово $(y^{l_2}z^{l_3})^k$ имеет канонический вид

$$(\underbrace{bcbc\ldots bc}_{2l_2-2\ \text{буквы}}\,ba\,\underbrace{caca\ldots ca}_{2l_3-2\ \text{буквы}})(bcbc\ldots bc\ ba\ caca\ldots ca)\ \ldots .$$

Несложно видеть, что это слово не содержит подслово r_i больше половины длины r_i. Значит, $(y^{l_2}z^{l_3})^k\neq 1\ \forall k\neq 0$.

Если $(y^{l_2}z^{l_3})^k y^{l_2}=1$, то $(y^{l_2}z^{l_3})^{2k}=(y^{l_2})^2=1$, поэтому $(y^{l_2}z^{l_3})^k y^{l_2}\neq 1$, аналогично $z^{l_3}(y^{l_2}z^{l_3})^k\neq 1$.

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2. Рассмотрим подгруппу, порожденную элементами Y^{l_2}, Z^{l_3}. Все числа $\mathbb{N}$ разбиваются на орбиты под действием этой подгруппы: $\mathbb{N}=\bigcup\mathbb{N}_n$, где

$$\mathbb{N}_n=\{n, Y^{l_2}(n), Z^{l_3}(n),\ldots,(Y^{l_2}Z^{l_3})^k(n),(Y^{l_2}Z^{l_3})^kY^{l_2}(n), Z^{l_3}(Y^{l_2}Z^{l_3})^k(n),\ldots\},$$

$k\geq 1$. Все элементы из $\mathbb{N}_n$ различны. Действительно, пусть $g_1,g_2,g\in T_{(m_1,m_2,m_3)}$, элементам g_1,g_2 соответствуют перестановки P_1,P_2 в регулярном представлении, а элементу g соответствует номер n в множестве $\mathbb{N}$, на котором действует регулярное представление. Тогда номерам

$P_1(n)$, $P_2(n)$ будут соответствовать элементы группы g_1g и g_2g. Отсюда $P_1(n) = P_2(n)$ только при $g_1 = g_2$. А в силу леммы 1 все $(y^{l_2}z^{l_3})^k$, $(y^{l_2}z^{l_3})^k y^{l_2}$, $z^{l_3}(y^{l_2}z^{l_3})^k$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) различны.

Для каждой орбиты произвольным образом зададим значение $b(n)$ для одного из чисел n из этой орбиты. В силу равенств $b(n) + b(Y^{l_2}(n)) = 0, b(n) + b(Z^{l_3}(n)) = 2\lambda$ получаем, что значения $b(n)$ для чисел n из одной орбиты будут получаться однозначно. Это несложно видеть, если соединить каждое число n с $Y^{l_2}(n)$ и $Z^{l_3}(n)$ отрезками. Тогда числа из одной орбиты $\mathbb{N}_n$ будут соединены в бесконечную цепочку.

Теорема 2 доказана.

3. Выделим как отдельное утверждение следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_3} = 1$. *Тогда* $\prod_{(m_1,m_2,m_3)} = S^1$.

Доказательство. При $(m_1, m_2, m_3) = (2, 4, 4)$ или $(2, 3, 6)$ это непосредственно следует из теоремы 2. Случай $(m_1, m_2, m_3) = (3, 3, 3)$ следует из [6] (следствие 1).

1. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, вып. 3. – С. 20 – 35.
2. *Меллит А. С., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда сумма частичных отражений кратна единичному оператору // Функцион. анализ и его прил. – 2004. – **38**, вып. 2. – С. 91 – 94.
3. *Островський В. Л., Самойленко Ю. С.* Про спектральні теореми для сімей лінійно пов'язаних самоспряжених операторів із заданими спектрами, що асоційовані з розширеними графами Динкіна // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1556 – 1570.
4. *Albeverio S., Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* On functions of graphs and representations of a certain class of $*$-algebras // J. Algebra. – 2007. – **308**. – P. 567 – 582.
5. *Halmos P. R., Kakutani S.* Products of symmetries // Bull. Amer. Math. Soc. – 1958. – **64**, № 3, pt 1. – P. 77 – 78.
6. *Hladnik M., Omladic M., Radjavi H.* Products of roots of the identity // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – **129**. – P. 459 – 465.
7. *Albeverio S., Rabanovich S.* Decomposition of a scalar operator into a product of unitary operators with two points in spectrum // Linear Algebra and its Appl. – 2010. – **433**. – P. 1127 – 1137.
8. *Kostov V.* On the Deligne – Simpson problem // Comp. Rend. l'Acad. Sci. – Ser. I – Math. – 1999. – **329**, Issue 8. – P. 657 – 662.
9. *Crawley-Boevey W., Shaw P.* Multiplicative preprojective algebras, middle convolution and the Deligne – Simpson problem // Adv. Math. – 2006. – **201**. – P. 180 – 208.
10. *Etingof P., Rains E.* New deformations of group algebras of Coxeter groups // Int. Math. Res. Not. – 2005. – № 10. – P. 635 – 646.
11. *Magnus W.* Noneuclidean tesselations and their groups. – New York: Acad. Press, 1974. – 208 p.

Получено 31.01.12,
после доработки — 10.04.12