УДК 517.949

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Ю. В. Теплінський, В. А. Недокіс (Кам'янець-Поділ. ун-т)

МЕТОД УКОРОЧЕННЯ ДЛЯ ЗЛІЧЕННОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

We consider the possible methods of reduction of a countably point nonlinear boundary-value problem with nonlinear boundary condition on a segment to a finite-dimensional multipoint problem constructed on the basis of the initial one by the method of truncation. We illustrate the obtained results by examples.

Розглянуто можливі способи редукції зліченноточкової нелінійної крайової задачі з нелінійною крайовою умовою на відрізку до скінченновимірної багатоточкової задачі, побудованої на основі вихідної методом укорочення. Наведені результати проілюстровано прикладами.

Метод укорочення запропонував К. П. Персидський у середині минулого століття для дослідження властивостей розв'язків зліченних систем диференціальних рівнянь та побудови для них теорії стійкості. Цим питанням присвячено серію його наукових статей, які в 1976 році опубліковано у вигляді монографії [1]. Пізніше метод укорочення застосовувався для розв'язування різних задач теорії диференціальних, різницевих та диференціально-різницевих рівнянь у банахових просторах обмежених числових послідовностей. Особливого поширення набуло його застосування після опублікування монографії [2], в якій цей метод було використано для дослідження коливних розв'язків зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь. У роботі [3] метод укорочення вперше було застосовано до розв'язування двоточкових крайових задач із лінійними крайовими умовами для зліченних систем нелінійних диференціальних рівнянь. При розв'язуванні зліченноточкових крайових задач із лінійними крайовими умовами для таких систем цей метод використано у статтях [4, 5].

У цій роботі ми розглядаємо можливі способи редукції зліченноточкової крайової задачі з нелінійними крайовими умовами на відрізку для нелінійного диференціального рівняння у просторі обмежених числових послідовностей до багатоточкових крайових задач для рівнянь у скінченновимірних просторах зростаючої розмірності, тобто до відомих задач, які досліджувались, наприклад, у монографії [6].

1. Умови існування розв'язків нелінійних крайових задач на відрізку. Нехай $\mathfrak{M}$ — простір обмежених послідовностей $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ дійсних чисел із нормою $\|x\| = \sup_{i \in N}\{|x_i|\}$, де N — множина натуральних чисел, $\mathfrak{M}^\infty$ — простір послідовностей $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots)$, $\psi_i \in \mathfrak{M}$ $\forall\, i \in N$, обмежених за нормою $\|\psi\| = \sup_{i \in N}\{\|\psi_i\|\}$ ($\|\psi_i\|$ — норма у просторі $\mathfrak{M}$), норма нескінченної матриці $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ визначається рівністю

$$\|A\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|,$$

а множини D та D^∞ означено так:

$$D = \{x \mid x \in \mathfrak{M},\ \|x\| \le M_0 = \text{const} > 0\}$$

і

$$D^\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}^\infty \mid \|\psi\| \le M_0\}.$$

Нехай розв'язки рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.1}$$

підпорядковано крайовій умові

$$A_0 x(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i x(t_i) + Cx(T) = \varphi(x(0), x(T); x(t_1), x(t_2), \ldots),$$
$$0 < t_i < t_{i+1} < T, \quad i \in N. \tag{1.2}$$

Тут $x \in D$, $f(t, x)\colon [0, T] \times D = D_0 \to \mathfrak{M}$, A_i та C — обмежені за нормою нескінченні матриці і

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| < \infty, \qquad \frac{dx(t)}{dt} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \frac{dx_3(t)}{dt}, \ldots\right),$$

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots)\colon D^{\infty} \to \mathfrak{M}.$$

Будемо вважати, що функція $\varphi(\psi)$ задовольняє нерівності

$$\|\varphi(\psi)\| \le M_\varphi, \quad \|\varphi(\psi) - \varphi(\psi_*)\| \le K_\varphi \|\psi - \psi_*\| \quad \forall\, \{\psi, \psi_*\} \subset D^{\infty},$$
$$M_\varphi = \text{const} > 0, \quad K_\varphi = \text{const} > 0, \tag{1.3}$$

функція $f(t, x)$ є неперервною за сукупністю змінних на D_0, причому для $\{x, x'\} \subset D$

$$\|f(t, x)\| \le M = \text{const} > 0, \quad \|f(t, x) - f(t, x')\| \le K \|x - x'\|, \tag{1.4}$$

де $K = \text{const} > 0$.

Нехай, крім того, виконуються такі умови:

a_1) матриця

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} A_i + C$$

оборотна, і обернена до неї матриця H обмежена за нормою;

$б_1$) множина D_{β_φ} елементів $x_0 \in \mathfrak{M}$, що належать області D разом зі своїм β_φ-околом, де

$$\beta_\varphi(x_0) = \frac{T}{2} M + \beta_{1\varphi}(x_0),$$

$$\beta_{1\varphi}(x_0) = \|H\| \left\| d - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C\right) x_0 \right\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|HA_i\| \alpha_1(t_i) M,$$

$$0 \le \alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right) \le \frac{T}{2},$$

а елемент $d \in \mathfrak{M}$ підібрано так, що $|d_i| = M_\varphi$, $\operatorname{sign} d_i = -\operatorname{sign} d_i^0$, причому

$$d^0 = \operatorname{colon}\left(d_1^0, d_2^0, \ldots\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j + C\right) x_0, \quad i \in N,$$

не є порожньою;

в$_1$) $Q_\varphi = \dfrac{KT}{2}\left[1 + \|H\|\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\|\right] + K_\varphi\|H\| < 1.$

Запишемо формально рекурентну послідовність вектор-функцій

$$x_m(t,x_0) = x_0 + \int_0^t\left[f(\tau, x_{m-1}(\tau,x_0)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,x_0))\,ds\right]d\tau +$$

$$+ \frac{t}{T}H\left\{\varphi(x_{m-1}(0), x_{m-1}(T); x_{m-1}(t_1), x_{m-1}(t_2),\ldots) - \left(\sum_{i=0}^{\infty}A_i + C\right)x_0 -\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{\infty}A_i\int_0^{t_i}\left[f(\tau, x_{m-1}(\tau,x_0)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,x_0))\,ds\right]d\tau\right\},$$

$$m = 1, 2, \ldots, \quad x_0(t,x_0) = (x_{01}, x_{02}, \ldots) \equiv x_0, \quad x_0 \in D_{\beta_\varphi}, \tag{1.5}$$

яка задовольняє рекурентні крайові умови

$$A_0x_m(0) + \sum_{i=1}^{\infty}A_ix_m(t_i) + Cx_m(T) = \varphi(x_{m-1}(0), x_{m-1}(T); x_{m-1}(t_1), x_{m-1}(t_2),\ldots).$$

Про існування послідовності (1.5) та її збіжність до функції $x^*(t,x_0)$, яка задовольняє рівність

$$x^*(t,x_0) = x_0 + \int_0^t\left[f\big(\tau, x^*(\tau,x_0)\big) - \frac{1}{T}\int_0^T f\big(s, x^*(s,x_0)\big)\,ds\right]d\tau +$$

$$+ \frac{t}{T}H\left\{\varphi\big(x^*(0), x^*(T); x^*(t_1), x^*(t_2),\ldots\big) - \left(\sum_{i=0}^{\infty}A_i + C\right)x_0 -\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{\infty}A_i\int_0^{t_i}\left[f\big(\tau, x^*(\tau,x_0)\big) - \frac{1}{T}\int_0^T f\big(s, x^*(s,x_0)\big)\,ds\right]d\tau\right\},$$

свідчить наступне твердження.

Теорема 1.1. *Нехай виконуються умови* (1.3), (1.4) *та* а$_1$) – в$_1$). *Тоді послідовність* $\{x_m(t,x_0)\}_{m=0}^{\infty}$, *визначена рівностями* (1.5), *існує та рівномірно відносно* $(t,x_0) \in [0,T] \times D_{\beta_\varphi}$ *збігається при* $m \to \infty$ *до функції* $x^*(t,x_0)$, *причому для всіх натуральних* m

$$\|x_m(t,x_0) - x^*(t,x_0)\| \le \frac{Q_\varphi^m}{1-Q_\varphi}\beta_\varphi(x_0). \tag{1.6}$$

Функція $x^*(t,x_0)$ *задовольняє крайову умову* (1.2) *і є розв'язком збуреного рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \mu,$$

де μ *визначається співвідношенням*

$$\mu = \Delta_{\varphi_h}(x_0) = \frac{1}{T} H_h \left\{ \varphi\Big(x^*(0), x^*(T); x^*(t_1), x^*(t_2), \ldots\Big) - \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i + C \right) x_0 - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int_0^{t_i} \left[f\Big(\tau, x^*(\tau, x_0)\Big) - \frac{1}{T} \int_0^T f\Big(s, x^*(s, x_0)\Big) ds \right] d\tau \right\} - \frac{1}{T} \int_0^T f\Big(\tau, x^*(\tau, x_0)\Big) d\tau.$$

При цьому якщо $\Delta_\varphi(x_0) = 0$, *то* $x^*(t, x_0)$ *є розв'язком крайової задачі* (1.1), (1.2).

Доведення проводиться за стандартною схемою, і ми його тут не наводимо.

***Зауваження* 1.1.** Якщо в умовах теореми 1.1 нерівність в_1) замінити сильнішою умовою

$$\text{в}_1^0) \quad KT \left[1 + \|H\| \sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| + \|H\| \|C\| \right] + K_\varphi \|H\| < 1,$$

то не існує іншого значення μ такого, при якому розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \mu$$

з початковою умовою $x(0) = x_0$ задовольняв би крайову умову (1.2).

Аналогічні результати справджуються для рівняння (1.1), розв'язки якого задовольняють багатоточкову крайову умову

$$A_0 x(0) + \sum_{i=1}^{p} A_i x(t_i) + C x(T) = \varphi_p\Big(x(0), x(T); x(t_1), \ldots, x(t_p)\Big), \qquad (1.7)$$

де функція $\varphi_p(\psi) = \varphi_p(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{p+2}) = \varphi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{p+2}, 0, 0, \ldots): D^{p+2} \to \mathfrak{M}$.

Будемо вважати, що функція $\varphi_p(\psi)$ така, що

$$\|\varphi_p(\psi)\| \le M_{\varphi_p}, \quad \|\varphi_p(\psi) - \varphi_p(\psi_*)\| \le K_{\varphi_p} \|\psi - \psi_*\|, \qquad (1.8)$$

де M_{φ_p} та K_{φ_p} — додатні сталі.

На задачу (1.1), (1.7) накладемо наступні умови:

а_2) матриця

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{t_i}{T} A_i + C$$

оборотна, і обернена до неї матриця H_p обмежена за нормою;

б_2) множина $D_{\beta_{\varphi_p}}$ елементів $x_0 \in \mathfrak{M}$, що належать області D разом зі своїм β_{φ_p}-околом, не є порожньою; тут

$$\beta_{\varphi_p}(x_0) = \frac{T}{2} M + \beta_{1\varphi_p}(x_0),$$

$$\beta_{1\varphi_p}(x_0) = \|H_p\| \left\| d - \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right) x_0 \right\| + \sum_{i=1}^{p} \|H_p A_i\| \alpha_1(t_i) M,$$

$$d = (d_1, d_2, \ldots) \in \mathfrak{M}, \quad |d_i| = M_{\varphi_p},$$

$$\operatorname{sign} d_i = -\operatorname{sign} d_i^0,$$

причому

$$d^0 = \operatorname{colon}\left(d_1^0, d_2^0, \ldots\right) = \left(\sum_{j=0}^{p} A_j + C\right)x_0, \quad i \in N;$$

в$_2$) $\dfrac{KT}{2}\left[1 + \|H_p\| \sum_{i=1}^{p} \|A_i\| + \|H_p\| \|C\|\right] + K_{\varphi_p} \|H_p\| < 1.$

Встановивши, що всі члени послідовності

$$x_{p_m}(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f\left(\tau, x_{p_{m-1}}(\tau, x_0)\right) - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x_{p_{m-1}}(s, x_0)\right) ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{T} H_p \left\{ \varphi_p\left(x_{p_{m-1}}(0), x_{p_{m-1}}(T); x_{p_{m-1}}(t_1), \ldots, x_{p_{m-1}}(t_p)\right) - \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C\right)x_0 - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{p} A_i \int_0^{t_i} \left[f\left(\tau, x_{p_{m-1}}(\tau, x_0)\right) - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x_{p_{m-1}}(s, x_0)\right) ds \right] d\tau \right\}, \tag{1.9}$$

$$m = 1, 2, \ldots, \quad x_{p_0}(t, x_0) = (x_{01}, x_{02}, \ldots) \equiv x_0, \quad x_0 \in D_{\beta_{\varphi_p}},$$

задовольняють рекурентні крайові умови

$$A_0 x_{p_m}(0) + \sum_{i=1}^{p} A_i x_{p_m}(t_i) + C x_{p_m}(T) =$$

$$= \varphi_p\left(x_{p_{m-1}}(0), x_{p_{m-1}}(T); x_{p_{m-1}}(t_1), \ldots, x_{p_{m-1}}(t_p)\right)$$

при довільних $x_0 \in D_{\beta_{\varphi_p}}$, сформулюємо для крайової задачі (1.1), (1.7) аналог теореми 1.1.

***Наслідок* 1.1.** *Припустимо, що виконуються умови* (1.4), (1.8) *та* а$_2$) – в$_2$). *Тоді*:

1) *послідовність функцій* $\left\{x_{p_m}(t, x_0)\right\}_{m=0}^{\infty}$, *визначена рівностями* (1.9), *існує та рівномірно відносно* $(t, x_0) \in [0, T] \times D_{\beta_{\varphi_p}}$ *збігається при* $m \to \infty$ *до функції* $x_p(t, x_0)$, *причому*

$$\| x_{p_m}(t, x_0) - x_p(t, x_0) \| \le \frac{Q_{\varphi p}^m}{1 - Q_{\varphi p}} \beta_{\varphi_p}(x_0)$$

(*аналог оцінки* (1.6));

2) *функція* $x_p(t, x_0)$ *є розв'язком рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \mu_p$$

з крайовою умовою (1.7), *де* μ_p *визначається співвідношенням*

$$\mu_p = \Delta_{\varphi_p}(x_0) = \frac{1}{T} H_p \left\{ \varphi_p\left(x_p(0), x_p(T); x_p(t_1), \ldots, x_p(t_p)\right) - \left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C\right)x_0 - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{p} A_i \int_0^{t_i} \left[f\left(\tau, x_p(\tau, x_0)\right) - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x_p(s, x_0)\right) ds \right] d\tau \right\} - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(\tau, x_p(\tau, x_0)\right) d\tau.$$

При цьому якщо $\Delta_{\varphi_p}(x_0) = 0$, *то* $x_p(t, x_0)$ *є розв'язком задачі* (1.1), (1.7).

Зауваження **1.2.** Якщо в умовах наслідку 1.1 умову в_2) замінити умовою

$$\text{в}_2^0)\quad KT\left\{1+\|H_p\|\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|+\|H_p\|\|C\|\right\}+K_{\varphi_p}\|H_p\|<1,$$

то не існує іншого значення μ_p, при якому розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+\mu_p$$

з початковою умовою $x(0)=x_0$ задовольняв би крайову умову (1.7).

Поряд з оцінкою в_2^0) у подальшому будемо використовувати нерівність

$$\text{в}_2^*)\quad KT\left\{1+\|H_p\|\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|+\|H_p\|\|C\|\right\}+K_{\varphi_p}\|H_p\|\le q=\text{const}<1.$$

2. Редукція до скінченновимірного багатоточкового випадку. Введемо позначення

$$\overset{(n)}{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\qquad \overset{(n)}{f}=(f_1,f_2,\ldots,f_n),$$

$$\overset{(n)}{f}\left(t,\overset{(n)}{x}\right)=\left(f_1(t,x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots),\ldots,f_n(t,x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots)\right),$$

$$\overset{(n)}{x}_0=(x_{01},x_{02},\ldots,x_{0n}),\qquad \psi_i=(\psi_{1i},\psi_{2i},\ldots),$$

$$\overset{(n)}{\psi}_i=(\psi_{1i},\ldots,\psi_{ni}),\qquad i=\overline{1,p+2},$$

$$\varphi_p(\psi_1,\ldots,\psi_{p+2})=\left\{\varphi_{1p}(\psi_1,\ldots,\psi_{p+2}),\ldots,\varphi_{np}(\psi_1,\ldots,\psi_{p+2}),\ldots\right\},$$

$$\overset{(n)}{\varphi}_p\left(\overset{(n)}{\psi}_1,\ldots,\overset{(n)}{\psi}_{p+2}\right)=$$

$$=\left\{\varphi_{1p}\left(\overset{(n)}{\psi}_1,0,0,\ldots;\ldots;\overset{(n)}{\psi}_{p+2},0,0,\ldots\right),\ldots,\varphi_{np}\left(\overset{(n)}{\psi}_1,0,0,\ldots;\ldots;\overset{(n)}{\psi}_{p+2},0,0,\ldots\right)\right\},$$

$$\varphi_p(\psi_1,\ldots,\psi_{p+2})=\varphi(\psi_1,\ldots,\psi_{p+2},0,0,\ldots),$$

$$\overset{(n)}{A}_i=\left[a_{jk}^{(i)}\right]_{j,k=1}^{n},\qquad i=\overline{0,p},$$

та $\overset{(n)}{C}=\left[c_{jk}\right]_{j,k=1}^{n}$ — матриці розмірності $n\times n$, що одержуються внаслідок укорочення матриць $A_i=\left[a_{jk}^{(i)}\right]_{j,k=1}^{\infty}$ та $C=\left[c_{jk}\right]_{j,k=1}^{n}$ відповідно.

Розглянемо рівняння

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt}=\overset{(n)}{f}\left(t,\overset{(n)}{x}\right)\tag{2.1}$$

і крайову умову

$$\overset{(n)}{A}_0\overset{(n)}{x}(0)+\sum_{i=1}^{p}\overset{(n)}{A}_i\overset{(n)}{x}(t_i)+\overset{(n)}{C}\overset{(n)}{x}(T)=$$

$$=\overset{(n)}{\varphi}_p\left(\overset{(n)}{x}\left(0,\overset{(n)}{x}_0\right);\overset{(n)}{x}\left(T,\overset{(n)}{x}_0\right);\overset{(n)}{x}\left(t_1,\overset{(n)}{x}_0\right),\ldots,\overset{(n)}{x}\left(t_p,\overset{(n)}{x}_0\right)\right).\tag{2.2}$$

Встановимо умови, що дозволяють редукувати задачу (1.1), (1.7) до крайової задачі (2.1), (2.2).

Вважатимемо, що функції $f(t, x)$ та $\varphi_p(\psi)$ задовольняють умови (1.4) та (1.8) відповідно. Будемо також вважати, що $y \in R^n$ належить множині $\tilde{D}^{(n)}$, якщо $(y, 0, 0, 0, \dots) \in D$. Зрозуміло, що для будь-яких $\left\{\overset{(n)}{x}, \overset{(n)}{x'}\right\} \subset \tilde{D}^{(n)}$ та $t \in [0, T]$ справджуються нерівності

$$\left\|\overset{(n)}{f}\left(t, \overset{(n)}{x}\right)\right\| \leq M, \quad \left\|\overset{(n)}{f}\left(t, \overset{(n)}{x}\right) - \overset{(n)}{f}\left(t, \overset{(n)}{x'}\right)\right\| \leq K\left\|\overset{(n)}{x} - \overset{(n)}{x'}\right\|. \tag{2.3}$$

Нехай $y_i \in \tilde{D}^{(n)}$, $i = \overline{1, p+2}$, тоді $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{p+2}) \in \tilde{D}^{(n)^{p+2}}$. Легко бачити, що для будь-яких $\{Y_1, Y_2\} \subset \tilde{D}^{(n)^{p+2}}$ справджуються нерівності

$$\left\|\overset{(n)}{\varphi}_p(Y_1)\right\| \leq M_{\varphi_p}, \quad \left\|\overset{(n)}{\varphi}_p(Y_1) - \overset{(n)}{\varphi}_p(Y_2)\right\| \leq K_{\varphi_p}\|Y_1 - Y_2\|. \tag{2.4}$$

На задачу (2.1), (2.2) накладемо наступні умови:

а$_3$) існує матриця $\overset{(n)}{H}_p$, обернена до матриці

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{t_i}{T}\overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C};$$

б$_3$) множина $\tilde{D}^{(n)}_{\overset{(n)}{\beta}_{\varphi_p}}$ точок $\overset{(n)}{x_0} = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in R^n$ таких, що відповідні елементи $(x_{01}, \dots, x_{0n}, 0, 0, \dots)$ належать області D разом зі своїм $\overset{(n)}{\beta}_{\varphi_p}$-околом, де

$$\overset{(n)}{\beta}_{\varphi_p}(x_0) = \frac{T}{2}M + \overset{(n)}{\beta}_{1\varphi_p}(x_0),$$

$$\overset{(n)}{\beta}_{1\varphi_p}(x_0) = \left\|\overset{(n)}{H}_p\right\|\left\|\overset{(n)}{d} - \left(\sum_{i=0}^{p}\overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C}\right)\overset{(n)}{x_0}\right\| + \sum_{i=1}^{p}\left\|\overset{(n)}{H}_p\overset{(n)}{A}_i\right\|\alpha_1(t_i)M,$$

а елемент $\overset{(n)}{d} \in R^n$ підібрано таким чином, що

$$|d_i| = M_{i\varphi_p}, \quad \operatorname{sign} d_i = -\operatorname{sign} d_i^0,$$

$$d^0 = \operatorname{colon}\left\{d_1^0, d_2^0, \dots, d_n^0\right\} = \left(\sum_{i=0}^{p}\overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C}\right)\overset{(n)}{x_0},$$

не є порожньою;

в$_3$) $$\overset{(n)}{Q}_{\varphi_p} = \frac{KT}{2}\left[1 + \left\|\overset{(n)}{H}_p\right\|\sum_{i=1}^{p}\left\|\overset{(n)}{A}_i\right\|\right] + K_{\varphi_p}\left\|\overset{(n)}{H}_p\right\| < 1.$$

З умов (1.4), (1.8) та а$_3$) – в$_3$) випливає, що послідовність, задана співвідношенням

$$\overset{(n)}{x}_{p_m}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) = \overset{(n)}{x_0} + \int_0^t\left[\overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}\left(\tau, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) - \frac{1}{T}\int_0^T\overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}\left(s, \overset{(n)}{x_0}\right)\right)ds\right]d\tau +$$

$$+ \frac{t}{T} \overset{(n)}{H}_p \left\{ \overset{(n)}{\varphi}_p \left(\overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}\left(0, \overset{(n)}{x_0}\right), \overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}\left(T, \overset{(n)}{x_0}\right); \overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}\left(t_1, \overset{(n)}{x_0}\right), \ldots, \overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}\left(t_p, \overset{(n)}{x_0}\right) \right) - \right.$$

$$- \left(\sum_{i=0}^{p} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right) \overset{(n)}{x_0} -$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{p} \overset{(n)}{A}_i \int_0^{t_i} \left[\overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}\left(\tau, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}_{p_{m-1}}\left(s, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) ds \right] d\tau \right\},$$

$$m = 1, 2, \ldots, \qquad \overset{(n)}{x}_{p_0}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) \equiv \overset{(n)}{x_0},$$

рівномірно відносно $\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) \in [0, T] \times \tilde{D}^{(n)}_{\overset{(n)}{\beta}_{\varphi_p}}$ збігається до функції $\overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right)$.

Ця функція задовольняє рівність

$$\overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) = \overset{(n)}{x_0} + \int_0^t \left[\overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_p\left(\tau, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}_p\left(s, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{t}{T} \overset{(n)}{H}_p \left\{ \overset{(n)}{\varphi}_p \left(\overset{(n)}{x}_p\left(0, \overset{(n)}{x_0}\right), \overset{(n)}{x}_p\left(T, \overset{(n)}{x_0}\right); \overset{(n)}{x}_p\left(t_1, \overset{(n)}{x_0}\right), \ldots, \overset{(n)}{x}_p\left(t_p, \overset{(n)}{x_0}\right) \right) - \right.$$

$$- \left(\sum_{i=0}^{p} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right) \overset{(n)}{x_0} -$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{p} \overset{(n)}{A}_i \int_0^{t_i} \left[\overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_p\left(\tau, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}_p\left(s, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) ds \right] d\tau \right\} \tag{2.5}$$

і є розв'язком збуреного рівняння

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{f}\left(t, \overset{(n)}{x}\right) + \overset{(n)}{\mu}_p \tag{2.6}$$

з крайовою умовою (2.2), де

$$\overset{(n)}{\mu}_p = \overset{(n)}{\Delta}_{\varphi_p}\left(\overset{(n)}{x_0}\right) = \frac{1}{T} \overset{(n)}{H}_p \left\{ \overset{(n)}{\varphi}_p \left(\overset{(n)}{x}_p\left(0, \overset{(n)}{x_0}\right), \overset{(n)}{x}_p\left(T, \overset{(n)}{x_0}\right); \overset{(n)}{x}_p\left(t_1, \overset{(n)}{x_0}\right), \ldots, \overset{(n)}{x}_p\left(t_p, \overset{(n)}{x_0}\right) \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=0}^{p} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right) \overset{(n)}{x_0} - \sum_{i=1}^{p} \overset{(n)}{A}_i \int_0^{t_i} \left[\overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_p\left(\tau, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}_p\left(s, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) ds \right] d\tau \right\} -$$

$$- \frac{1}{T} \int_0^T \overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_p\left(\tau, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) d\tau.$$

Якщо $\overset{(n)}{\Delta}_{\varphi_p}\left(\overset{(n)}{x_0}\right) = 0$, то функція $\overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right)$ є розв'язком крайової задачі (2.1), (2.2).

Означення 2.1. *Будемо говорити, що функція $f(t, x)$ належить $\hat{C}_{\mathrm{Lip}}(x)$, якщо вона в області D_0 неперервна, обмежена сталою M і задовольняє підсилену умову Коші – Ліпшиця відносно x, тобто нерівність $\|f(t, x') - f(t, x'')\| \le \alpha(t)\varepsilon(m)\|x' - x''\|$ справджується для довільних точок x', x'' з облас-*

ті D, перші m координат яких збігаються, $\alpha(t) \geq 0$ — неперервна на $[0, T]$ функція, $\varepsilon(m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Покладемо $K = \max_{t \in [0,T]} \alpha(t)\varepsilon(0)$ і введемо позначення:

$$\beta^*_{\varphi_p}(x, n_0) = \frac{2/(KT) - 1}{\sum_{i=1}^p \left\| \overset{(n_0)}{A}_i \right\| + 2K_\varphi/(KT)} \left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^p \|A_i\| + \|C\| \right) \|x\| \right) + \frac{M}{K},$$

$$n_0 \in N;$$

$D^*_{\beta_{\varphi_p}}$ — множина, кожна точка якої належить множині D разом зі своїм $\beta^*_{\varphi_p}(x)$-околом;

$$\{\psi_i, \tilde{\psi}_i\} \subset D \quad \forall\, i \in N, \qquad \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots) \in D^\infty,$$

$$\tilde{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \tilde{\psi}_{n+1}, \tilde{\psi}_{n+2}, \ldots) \in D^\infty,$$

$$\psi_i^g = (\psi_{1i}, \ldots, \psi_{gi}, \overline{\psi}_{g+1i}, \overline{\psi}_{g+2i}, \ldots) \subset D, \quad i \in N, \qquad \psi^g = \{\psi_1^g, \psi_2^g, \ldots\} \subset D^\infty.$$

Означення 2.2. *Будемо говорити, що $\varphi(\psi)$ належить $\hat{C}_{\mathrm{Lip}}(\psi)$, якщо функція $\varphi(\psi)$ обмежена на D^∞ сталою M_φ і для всіх $\{\psi, \tilde{\psi}, \psi^g\} \subset D^\infty$ справджуються нерівності*

$$\|\varphi(\psi) - \varphi(\tilde{\psi})\| \leq \delta_0(n)\|\psi - \tilde{\psi}\|, \tag{2.7}$$

$$\left\|\varphi(\psi) - \varphi(\psi^g)\right\| \leq \delta(g)\left\|\psi - \psi^g\right\|, \tag{2.8}$$

причому $\delta_0(n) \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta(g) \to 0$ при $g \to \infty$.

Наведемо приклад функції з множини $\hat{C}_{\mathrm{Lip}}(\psi)$. Покладемо $\varphi(\psi) = \{\varphi_1(\psi), \varphi_2(\psi), \varphi_3(\psi), \ldots\}$, $D \in [0, 1]^\infty$, і через $\operatorname{trig}\psi_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, позначимо $\sin\psi_{ij}$ або $\cos\psi_{ij}$.

Нехай

$$\varphi_i(\psi) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{2^l} \operatorname{trig}\psi_{lk}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots .$$

Неважко переконатись, що

$$|\varphi_i(\psi)| \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2,$$

отже, і $\|\varphi(\psi)\| \leq 2$. Оцінимо тепер модулі різниць $\varphi_i(\psi) - \varphi_i(\tilde{\psi})$ та $\varphi_i(\psi) - \varphi_i(\psi^g)$. Із нерівностей

$$|\varphi_i(\psi) - \varphi_i(\tilde{\psi})| \leq \frac{1}{2^n}\|\psi_{n+1} - \tilde{\psi}_{n+1}\| +$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1}}\|\psi_{n+2} - \tilde{\psi}_{n+2}\| + \ldots \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|\psi - \tilde{\psi}\|,$$

$$|\varphi_i(\psi) - \varphi_i(\psi^g)| \leq \frac{1}{2^g}\left\|\psi_1 - \psi_1^g\right\| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^g}\left\|\psi_2 - \psi_2^g\right\| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^g}\left\|\psi_3 - \psi_3^g\right\| + \ldots \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^g}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right)\left\|\psi - \psi^g\right\| = \frac{1}{2^{g-1}}\left\|\psi - \psi^g\right\|$$

внаслідок довільності вибору $i \in N$ і співвідношень

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{g\to\infty} \frac{1}{2^{g-1}} = 0$$

випливає належність побудованої функції множині $\hat{C}_{\text{Lip}}(\psi)$.

Покладемо далі $\delta(0) = \delta_0(0) = K_\varphi$.

Коли мова йтиме про поелементну збіжність послідовності матриць $\left\{ \overset{(n)}{A} = \left[a_{ij}^{(n)} \right]_{i,j=1}^{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ або про покоординатну збіжність послідовності векторів $\left\{ \overset{(n)}{x} = \left(\overset{(n)}{x_1}, \ldots, \overset{(n)}{x_n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$, домовимось у подальшому, не змінюючи їх позначень, під $\overset{(n)}{A}$ розуміти матрицю $\left[a_{ij} \right]_{i,j=1}^{\infty}$, елементи якої

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^{(n)} & \text{при } i \le n \text{ та } j \le n, \\ 0 & \text{при } i > n \text{ або } j > n, \end{cases}$$

а під $\overset{(n)}{x}$ — вектор $\left(x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}, 0, 0, 0, \ldots \right)$.

Лема 2.1. *Нехай* $f(t,x) \in \hat{C}_{\text{Lip}}(x)$, $D^*_{\beta_\varphi} \ne \varnothing$ *і справджуються умови* а$_2$), в$_2^0$), (1.3) *та* (2.8). *Якщо для будь-якого* $n \ge n_0$ *виконуються умови* а$_3$), в$_3$), *то*

$$\lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{x_p}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) = x_p(t, x_0), \quad \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{\mu_p} = \mu_p \quad \forall\, x_0 \in D^*_{\beta_{\varphi_p}} \tag{2.9}$$

у розумінні покоординатної збіжності.

Доведення. Очевидно, що з умови (1.3) випливає умова (1.8), оскільки при довільному натуральному p можна вважати, що сталі M_{φ_p} та K_{φ_p} дорівнюють сталим M_φ та K_φ відповідно. Із включення $f(t,x) \in \hat{C}_{\text{Lip}}(x)$ на D_0 випливають нерівності (1.4) та нерівності (2.3) при всіх $n \in N$. Із (1.8) випливають нерівності (2.4) при $n \in N$. При цьому сталі M, K, M_{φ_p} та K_{φ_p} не залежать від n.

Якщо $x_0 \in D^*_{\beta_{\varphi_p}}$, то $x_0 \in D_{\beta_{\varphi_p}}$ і $\forall\, n \ge n_0$ $\overset{(n)}{x_0} \in \tilde{D}^{(n)}_{\overset{(n)}{\beta}_{\varphi_p}}$. Дійсно, неважко переконатись, що достатніми умовами двох останніх включень є відповідно нерівності $\beta_{\varphi_p} < \beta^*_{\varphi_p}$, $\overset{(n)}{\beta}_{\varphi_p} < \beta^*_{\varphi_p}$, $n \ge n_0$.

Доведемо першу з них (друга доводиться аналогічно). З умови в$_2$) випливають нерівності

$$\frac{KT}{2}\left[1 + \| H_p \| \sum_{i=1}^{p} \| A_i \| \right] < 1,$$

$$\| H_p \| < \frac{2/(KT) - 1}{\sum_{i=1}^{p} \| A_i \| + 2K_\varphi/(KT)} \le \frac{2/(KT) - 1}{\sum_{i=1}^{p} \left\| \overset{(n_0)}{A_i} \right\| + 2K_\varphi/(KT)}.$$

Враховуючи умову б$_2$), одержуємо

$$\beta_{\varphi_p}(x) \le \frac{T}{2}M + \|H_p\|\left(\|d\| + \left(\sum_{i=0}^{p}\|A_i\| + \|C\|\right)\|x\|\right) + \sum_{i=1}^{p}\|H_p A_i\|\frac{T}{2}M \le$$

$$\le \frac{T}{2}M\left(1 + \sum_{i=1}^{p}\|H_p A_i\|\right) +$$

$$+ \frac{2/(KT)-1}{\sum_{i=1}^{p}\left\|\overset{(n_0)}{A}_i\right\| + 2K_\varphi/(KT)}\left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^{p}\|A_i\| + \|C\|\right)\|x\|\right) < \beta^*_{\varphi_p}(x, n_0).$$

Отже, при довільному натуральному $n \ge n_0$ існує керуючий параметр $\overset{(n)}{\mu}_p = \overset{(n)}{\Delta}_{\varphi_p}\left(\overset{(n)}{x_0}\right)$. Враховуючи умову в$_3$), приходимо до нерівностей

$$\left\|\overset{(n)}{\Delta}_{\varphi_p}\left(\overset{(n)}{x_0}\right)\right\| \le \frac{1}{T}\left(\left\|\overset{(n)}{H}_p\right\|M_\varphi + \left\|\overset{(n)}{H}_p\left(\sum_{i=0}^{p}\overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C}\right)\overset{(n)}{x_0}\right\|\right) + M\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\left\|\overset{(n)}{H}_p\overset{(n)}{A}_i\right\| + 1\right) \le$$

$$\le \frac{1}{T}\left\|\overset{(n)}{H}_p\right\|M_\varphi + \frac{1}{T}\left\|\overset{(n)}{H}_p\right\|\left(\sum_{i=0}^{p}\|A_i\| + \|C\|\right)\|x_0\| + \frac{M}{2}\left\|\overset{(n)}{H}_p\right\|\sum_{i=1}^{p}\|A_i\| + M \le$$

$$\le \frac{2/(KT)-1}{T\sum_{i=1}^{p}\left\|\overset{(n_0)}{A}_i\right\| + 2K_\varphi/K}\left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^{p}\|A_i\| + \|C\|\right)\|x_0\| + \frac{MT}{2}\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\right) +$$

$$+ M \le M' = \text{const} < \infty,$$

де $n \ge n_0$, $x_0 \in D^*_{\beta_{\varphi_p}}$. Таким чином, послідовність $\left\{\overset{(n)}{\mu}_p\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ рівномірно обмежена за нормою простору $\mathfrak{M}$ згідно з вказаною вище домовленістю. За допомогою відомого методу діагоналізації з неї можна виділити покоординатно збіжну при $i \to \infty$ підпослідовність $\left\{\overset{(s_i)}{\mu}_p\right\}_{i=1}^{\infty}$.

Запишемо послідовність рівнянь вигляду (2.6), замінивши індекс n індексами s_i:

$$\frac{d\overset{(s_i)}{x}}{dt} = \overset{(s_i)}{f}\left(t, \overset{(s_i)}{x}\right) + \overset{(s_i)}{\mu}_p, \qquad i \in N, \tag{2.10}$$

кожному з яких відповідає крайова умова (2.2), у якій виконано ту саму заміну індексу n. Розв'язок $\overset{(s_i)}{x}_p\left(t, \overset{(s_i)}{x_0}\right)$ відповідної крайової задачі задовольняє рівність (2.5), в якій замість n покладено s_i. Оскільки

$$\forall\, i \in N \quad \left\|\overset{(s_i)}{x}_p\left(t, \overset{(s_i)}{x_0}\right)\right\| \le M_0, \qquad t \in [0, T],$$

то послідовність $\left\{\overset{(s_i)}{x}_p\left(t, \overset{(s_i)}{x_0}\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ рівномірно обмежена на цьому відрізку. Покажемо, що вона на ньому рівностепенево неперервна.

Нехай $t^{(1)} < t^{(2)}$ — довільні точки цього відрізка. Тоді, позначивши для зручності s_i через k, врахувавши (2.5) і співвідношення

$$\left\| \int\limits_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \left[\overset{(k)}{f}\left(\tau, \overset{(k)}{x}_p\left(\tau, \overset{(k)}{x}_0\right)\right) - \frac{1}{T} \int\limits_0^T \overset{(k)}{f}\left(s, \overset{(k)}{x}_p\left(s, \overset{(k)}{x}_0\right)\right) ds \right] d\tau \right\| \leq 2M(t^{(2)} - t^{(1)}),$$

отримаємо оцінку

$$\left\| \overset{(k)}{x}_p\left(t^{(2)}, \overset{(k)}{x}_0\right) - \overset{(k)}{x}_p\left(t^{(1)}, \overset{(k)}{x}_0\right) \right\| \leq (t^{(2)} - t^{(1)}) \times$$

$$\times \left(2M + \frac{2/(KT) - 1}{T \sum_{i=1}^p \left\| \overset{(n_0)}{A_i} \right\| + 2K_\varphi / K} \left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^\infty \| A_i \| + \| C \| \right) \| x_0 \| \right) + \frac{MT}{2} \sum_{i=1}^\infty \| A_i \| \right) \leq$$

$$\leq (t^{(2)} - t^{(1)}) M'', \quad M'' = \text{const} < \infty,$$

яка гарантує рівностепеневу неперервність послідовності $\left\{ \overset{(s_i)}{x}_p\left(t, \overset{(s_i)}{x}_0\right) \right\}_{i=1}^\infty$ на сегменті $[0, T]$, оскільки стала M'' не залежить від s_i.

Використавши теорему Арцела і ще раз метод діагоналізації, виберемо з цієї послідовності рівномірно відносно $t \in [0, T]$ збіжну в покоординатному сенсі підпослідовність $\left\{ \overset{(k_i)}{x}_p\left(t, \overset{(k_i)}{x}_0\right) \right\}_{i=1}^\infty$.

Із послідовності рівнянь (2.10) виділимо підпослідовність

$$\frac{d \overset{(k_i)}{x}}{dt} = \overset{(k_i)}{f}\left(t, \overset{(k_i)}{x}\right) + \overset{(k_i)}{\mu}_p, \quad i \in N,$$

кожному рівнянню якої відповідає крайова умова, одержана з (2.2) заміною індексу n на k_i.

Позначимо

$$\overline{\mu}_p = \lim_{i \to \infty} \overset{(s_i)}{\mu}_p = \lim_{i \to \infty} \overset{(k_i)}{\mu}_p, \quad \overline{x}_p(t, x_0) = \lim_{i \to \infty} \overset{(k_i)}{x}_p\left(t, \overset{(k_i)}{x}_0\right),$$

де границі розуміються в покоординатному сенсі, і покажемо, що

$$\overline{x}_p(t, x_0) = x_p(t, x_0), \quad \overline{\mu}_p = \mu_p. \tag{2.11}$$

Позначивши $\overset{(k_i)}{x}_p\left(t, \overset{(k_i)}{x}_0\right)$ через $\overset{(k_i)}{x}_p = \left(\overset{(k_i)}{x}_{1p}, \ldots, \overset{(k_i)}{x}_{k_i p}\right)$, а $\overset{(k_i)}{f}\left(t, \overset{(k_i)}{x}_p\right)$ через $\overset{(k_i)}{f} = \left(\overset{(k_i)}{f}_1, \overset{(k_i)}{f}_2, \ldots, \overset{(k_i)}{f}_{k_i}\right)$, $i \in N$, розглянемо послідовність $\left\{ \overset{(k_i)}{f}_l \right\}_{i=1}^\infty$, де l — фіксоване натуральне число. Неважко переконатись, що при $k_m < l \leq k_{m+1}$ вона має вигляд

$$\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{m}, \; f_l\left(t, \overset{(k_{m+1})}{x}_{1p}, \overset{(k_{m+1})}{x}_{2p}, \ldots, \overset{(k_{m+1})}{x}_{k_{m+1}p}, 0, 0, \ldots\right),$$

$$f_l\left(t, \overset{(k_{m+2})}{x}_{1p}, \overset{(k_{m+2})}{x}_{2p}, \ldots, \overset{(k_{m+2})}{x}_{k_{m+2}p}, 0, 0, \ldots\right), \ldots .$$

Провівши міркування, аналогічні до викладених у [2, с. 274], переконуємось, що в покоординатному сенсі послідовність $\left\{ \overset{(k_i)}{f}_l\left(t, \overset{(k_i)}{x}_p\right) \right\}_{i=1}^\infty$ прямує до $f\left(t, \overline{x}_p\right)$ при $i \to \infty$ рівномірно відносно $t \in [0, T]$. Але

$$\frac{d\overset{(k_i)}{x}_p\Big(t,\overset{(k_i)}{x}_0\Big)}{dt} = \overset{(k_i)}{f}\Big(t,\overset{(k_i)}{x}_p\Big(t,\overset{(k_i)}{x}_0\Big)\Big)+\overset{(k_i)}{\mu}_p,\qquad \overset{(k_i)}{x}_p\Big(0,\overset{(k_i)}{x}_0\Big)=\overset{(k_i)}{x}_0\qquad \forall\, i\in N.$$

Переходячи в останній рівності покоординатно до границі при $i\to\infty$ і враховуючи теорему про існування похідної від границі послідовності скалярних диференційовних функцій, одержуємо

$$\frac{d\bar{x}_p(t,x_0)}{dt} = f(t,\bar{x}_p(t,x_0)) + \mu_p,\qquad \bar{x}_p(0,x_0) = x_0. \tag{2.12}$$

Крім того, для будь-якого $i\in N$ справджується рівність

$$\overset{(k_i)}{A}_0\overset{(k_i)}{x}_p\Big(0,\overset{(k_i)}{x}_0\Big) + \sum_{j=1}^{p}\overset{(k_i)}{A}_j\overset{(k_i)}{x}_p\Big(t_j,\overset{(k_i)}{x}_0\Big) + \overset{(k_i)}{C}\overset{(k_i)}{x}_p\Big(T,\overset{(k_i)}{x}_0\Big) =$$

$$= \overset{(k_i)}{\varphi}_p\Big(\overset{(k_i)}{x}_p\Big(0,\overset{(k_i)}{x}_0\Big),\overset{(k_i)}{x}_p\Big(T,\overset{(k_i)}{x}_0\Big);\overset{(k_i)}{x}_p\Big(t_1,\overset{(k_i)}{x}_0\Big),\ldots,\overset{(k_i)}{x}_p\Big(t_p,\overset{(k_i)}{x}_0\Big)\Big). \tag{2.13}$$

Перейдемо в ній покоординатно до границі при $i\to\infty$. Для простоти оберемо першу координату. Оскільки ліва частина цієї рівності містить скінченну суму, то обмежимось переходом до границі в першій координаті добутку $\overset{(k_i)}{A}_0\overset{(k_i)}{x}_p\Big(0,\overset{(k_i)}{x}_0\Big)$. Маємо

$$L_1 = \lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{k_i} a_{1j}^{(0)}\overset{(k_i)}{x}_{jp}\Big(0,\overset{(k_i)}{x}_0\Big) = \lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}^{(0)}\overset{(k_i)}{x}_{jp}\Big(0,\overset{(k_i)}{x}_0\Big),$$

де при $j>k_i$ покладено $\overset{(k_i)}{x}_{jp}\Big(0,\overset{(k_i)}{x}_0\Big)=0$. З обмеженості матриці A_0 за нормою випливає, що останній ряд збігається рівномірно відносно i, оскільки $\Big|\overset{(k_i)}{x}_{jp}\Big(0,\overset{(k_i)}{x}_0\Big)\Big|\le M_0\ \ \forall\,\{i,j\}\subset N$. Тоді

$$L_1 = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}^{(0)}\lim_{i\to\infty}\overset{(k_i)}{x}_{jp}\Big(0,\overset{(k_i)}{x}_0\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}^{(0)}\,\bar{x}_{jp}(0,x_0).$$

Оцінимо тепер модуль різниці

$$G_1^{(k_i)} =$$

$$= \Big|\overset{(k_i)}{\varphi}_{1p}\Big(\overset{(k_i)}{x}_p(0),\overset{(k_i)}{x}_p(T);\overset{(k_i)}{x}_p(t_1),\ldots,\overset{(k_i)}{x}_p(t_p)\Big) - \varphi_{1p}\big(\bar{x}_p(0),\bar{x}_p(T);\bar{x}_p(t_1),\ldots,\bar{x}_p(t_p)\big)\Big|.$$

Позначимо $\Big(\overset{(k_i)}{x}_p(t),0,0,\ldots\Big)$ через $\overset{(k_i)}{x}_\infty(t) = \Big(\overset{(k_i)}{x}_p(t),\overset{(k_i)}{x}_{k_i+1}(t),\overset{(k_i)}{x}_{k_i+2}(t),\ldots\Big)$, де, звичайно, $\overset{(k_i)}{x}_r(t)$ при $r>k_i$ є тотожними нулями. Маємо

$$G_1^{(k_i)} =$$

$$= \Big|\varphi_1\Big(\overset{(k_i)}{x}_\infty(0),\overset{(k_i)}{x}_\infty(T);\overset{(k_i)}{x}_\infty(t_1),\ldots,\overset{(k_i)}{x}_\infty(t_p),0,0,0,\ldots\Big) -$$

$$- \varphi_1\big(\bar{x}_p(0),\bar{x}_p(T);\bar{x}_p(t_1),\ldots,\bar{x}_p(t_p),0,0,0,\ldots\big)\Big| \le$$

$$\leq \left|\varphi_1\left(\overset{(k_i)}{x_\infty}(0), \overset{(k_i)}{x_\infty}(T); \overset{(k_i)}{x_\infty}(t_1), \ldots, \overset{(k_i)}{x_\infty}(t_p), 0, 0, 0, \ldots\right) -\right.$$

$$- \varphi_1\left[\left(\overline{x}_{1p}(0), \ldots, \overline{x}_{gp}(0), \overset{(k_i)}{x}_{g+1p}(0), \overset{(k_i)}{x}_{g+2p}(0), \ldots\right),\right.$$

$$\left(\overline{x}_{1p}(T), \ldots, \overline{x}_{gp}(T), \overset{(k_i)}{x}_{g+1p}(T), \overset{(k_i)}{x}_{g+2p}(T), \ldots\right),$$

$$\left(\overline{x}_{1p}(t_1), \ldots, \overline{x}_{gp}(t_1), \overset{(k_i)}{x}_{g+1p}(t_1), \overset{(k_i)}{x}_{g+2p}(t_1), \ldots\right), \ldots$$

$$\left.\left.\ldots, \left(\overline{x}_{1p}(t_p), \ldots, \overline{x}_{gp}(t_p), \overset{(k_i)}{x}_{g+1p}(t_p), \overset{(k_i)}{x}_{g+2p}(t_p), \ldots\right), 0, 0, 0, \ldots\right]\right| +$$

$$+ \left|\varphi_1[*] - \varphi_1\left(\overline{x}_p(0), \overline{x}_p(T); \overline{x}_p(t_1), \ldots, \overline{x}_p(t_p), 0, 0, 0, \ldots\right)\right|,$$

де $\varphi_1[*]$ дорівнює від'ємнику, що стоїть під знаком модуля першої різниці у правій частині останньої нерівності, звідки

$$G_1^{(k_i)} \leq \delta(g)2M_0 + \delta(0)W(i).$$

Нехай ν — як завгодно мале додатне число. Оскільки $\delta(g) \to 0$ при $g \to \to \infty$, то можна обрати $g = g^0$ так, що $\delta(g^0)2M_0 < \nu$. Із рівномірної відносно $t \in [0, T]$ покоординатної збіжності $\overset{(k_i)}{x_p}(t)$ до $\overline{x}_p(t)$ при $i \to \infty$ випливає існування такого $i_0 \in N$, що

$$\left|\overset{(k_i)}{x}_{rp}(t) - \overline{x}_{rp}(t)\right| \leq \frac{\nu}{\delta(0)} \qquad \forall\, i \geq i_0, \qquad t \in [0, T],$$

де $r \in \{1, 2, \ldots, g^0\}$. Тоді для будь-якого $i \geq i_0$ $G_1^{(k_i)} \leq \nu + \nu = 2\nu$. Це означає, що

$$\lim_{i \to \infty} \overset{(k_i)}{\varphi}_{1p}\left(\overset{(k_i)}{x_p}(0), \overset{(k_i)}{x_p}(T); \overset{(k_i)}{x_p}(t_1), \ldots, \overset{(k_i)}{x_p}(t_p)\right) = \varphi_{1p}\left(\overline{x}_p(0), \overline{x}_p(T); \overline{x}_p(t_1), \ldots, \overline{x}_p(t_p)\right).$$

Для інших координат вектора $\overset{(k_i)}{\varphi_p}$ з (2.13) можна навести аналогічні міркування.

Таким чином, функція $\overline{x}_p(t, x_0)$ є розв'язком крайової задачі (1.1), (1.8), оскільки виконуються рівності (2.12). З єдиності керування μ_p для фіксованого x_0 випливають рівності (2.11).

Розглянемо довільну підпослідовність

$$\frac{d\overset{(r)}{x}}{dt} = \overset{(r)}{f}\left(t, \overset{(r)}{x}\right)$$

послідовності рівнянь (2.1) із крайовою умовою (2.2), в якій індекс n замінено індексом r. Для неї існує підпослідовність $\left\{\overset{(l)}{x_p}\left(t, \overset{(l)}{x_0}\right)\right\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{\overset{(r)}{x_p}\left(t, \overset{(r)}{x_0}\right)\right\}_{r=1}^{\infty}$, яка покоординатно збігається до функції $x_p(t, x_0)$, причому $\overset{(l)}{\mu_p} \to \mu_p$ при $l \to \infty$ у покоординатному сенсі. У монографії [2, с. 276] доведено, що в цьому випадку послідовності $\left\{ \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ та $\left\{ \overset{(n)}{\mu}_p \right\}_{n=1}^{\infty}$ покоординатно збігаються до $x_p(t, x_0)$ та μ_p відповідно при $n \to \infty$, що завершує доведення леми.

Нехай

$$\beta_\varphi^*(x, n_0, p_0) = \frac{2/(KT)-1}{\sum_{i=1}^{p_0} \left\| \overset{(n_0)}{A}_i \right\| + 2K_\varphi/(KT)} \left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \| A_i \| + \| C \| \right) \| x \| \right) + \frac{M}{K},$$

де $\{n_0, p_0\} \subset N$, а $D^*_{\beta_\varphi}$ — множина, кожна точка якої належить множині D разом зі своїм $\beta_\varphi^*(x)$-околом.

Теорема 2.1. *Нехай* $f(t, x) \in \hat{C}_{\text{Lip}}(x)$, $\varphi(\psi) \in \hat{C}_{\text{Lip}}(\psi)$, $D^*_{\beta_\varphi} \neq \varnothing$ *та для будь-яких* $n \geq n_0$, $p \geq p_0$ *виконуються умови* а$_i$), $i = 1, 2, 3$, в$_2^0$) *і* в$_3$), *в яких покладено* $K_{\varphi_p} = K_\varphi$. *Тоді*

$$x^*(t, x_0) = \lim_{p \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) \right) \quad \forall\, x_0 \in D^*_{\beta_\varphi}, \tag{2.14}$$

$$\mu = \lim_{p \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} \overset{(n)}{\mu}_p \right), \tag{2.15}$$

де збіжність відносно n *покоординатна, відносно* p *за нормою простору* $\mathfrak{M}$, $x^*(t, x_0)$ *та* μ *визначено в теоремі* 1.1. *Якщо умову* в$_2^0$) *замінити умовою* в$_2^*$), *то не існує іншого значення* $\mu \in \mathfrak{M}$ *такого, при якому розв'язок рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \mu$$

з початковою умовою $x(0) = x_0$ *задовольняв би крайову умову* (1.2).

Доведення. Відмітимо спочатку, що з включення $x_0 \in D^*_{\beta_\varphi}$ випливають включення $x_0 \in D_{\beta_\varphi}$, $x_0 \in D_{\beta_{\varphi_p}}$ і $\overset{(n)}{x}_0 \in \tilde{D}^{(n)}_{\overset{(n)}{\beta}_{\varphi_p}}$ $\forall\, n \geq n_0$, $p \geq p_0$. У цьому неважко переконатися, провівши міркування, аналогічні використаним при доведенні леми 2.1.

Враховуючи, що матриці

$$H^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} A_i + C$$

та

$$H_p^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{t_i}{T} A_i + C,$$

де $p \geq p_0$, задовольняють співвідношення

$$\lim_{p \to \infty} H_p^{-1} = H^{-1}$$

в сенсі матричної норми, а також рівномірну відносно $p \geq p_0$ обмеженість матриці H_p за нормою сталою

$$\frac{2/(KT)-1}{\sum_{i=1}^{p_0}\left\|\overset{(n_0)}{A_i}\right\|+2K_\varphi/(KT)},$$

з нерівності $\|H-H_p\|\le\|H\|\|H^{-1}-H_p^{-1}\|\|H_p\|$ одержуємо

$$\|H-H_p\|\le\nu(p),\quad p\ge p_0, \tag{2.16}$$

де $\nu(p)\to 0$ при $p\to\infty$. Зрозуміло, що виконується умова в$_1$).

Оскільки функція $x_p(t,x_0)$ задовольняє рівність

$$x_p(t,x_0) = x_0 + \int_0^t\left[f\big(\tau,x_p(\tau,x_0)\big)-\frac{1}{T}\int_0^T f\big(s,x_p(s,x_0)\big)ds\right]d\tau +$$

$$+\frac{t}{T}H_p\left\{\varphi_p\big(x_p(0),x_p(T);x_p(t_1),\ldots,x_p(t_p)\big)-\left(\sum_{i=0}^{p}A_i+C\right)x_0-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=0}^{p}A_i\int_0^{t_i}\left[f\big(\tau,x_p(\tau,x_0)\big)-\frac{1}{T}\int_0^T f\big(s,x_p(s,x_0)\big)ds\right]d\tau\right\},\quad p\ge p_0,$$

то справджується нерівність $\|x_p(t,x_0)-x^*(t,x_0)\|\le\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$. Враховуючи умову (2.7), для доданків, що містяться в її правій частині, одержуємо співвідношення

$$\Gamma_1 =$$

$$=\left\|\int_0^t\left[f\big(\tau,x^*(\tau,x_0)\big)-f\big(\tau,x_p(\tau,x_0)\big)-\frac{1}{T}\int_0^T\Big(f\big(s,x^*(s,x_0)\big)-f\big(s,x_p(s,x_0)\big)\Big)ds\right]d\tau\right\|\le$$

$$\le K\alpha_1(t)\sup_{t\in[0,T]}\left\|x^*(t,x_0)-x_p(t,x_0)\right\|,$$

$$\Gamma_2 = \left\|H\left\{\varphi\big(x^*(0),x^*(T);x^*(t_1),x^*(t_2),\ldots\big)-\left(\sum_{i=0}^{\infty}A_i+C\right)x_0\right\}-\right.$$

$$\left.-H_p\left\{\varphi_p\big(x_p(0),x_p(T);x_p(t_1),\ldots,x_p(t_p)\big)-\left(\sum_{i=0}^{p}A_i+C\right)x_0\right\}\right\|\le$$

$$\le\left\|H\varphi\big(x^*(0),x^*(T);x^*(t_1),\ldots\big)-H_p\varphi_p\big(x_p(0),x_p(T);x_p(t_1),\ldots,x_p(t_p)\big)\right\|+$$

$$+\left\|H\left(\sum_{i=0}^{\infty}A_i+C\right)x_0-H_p\left(\sum_{i=0}^{p}A_i+C\right)x_0\right\|\le$$

$$\le\|H\|\left\|\varphi\big(x^*(0),x^*(T);x^*(t_1),\ldots\big)-\varphi_p\big(x_p(0),x_p(T);\ldots,x_p(t_p)\big)\right\|+$$

$$+\|H-H_p\|\left\|\varphi_p\big(x_p(0),x_p(T);\ldots,x_p(t_p)\big)\right\|+M_0\|H\|\sum_{i=p+1}^{\infty}\|A_i\|+$$

$$+M_0\|H-H_p\|\left(\|C\|+\sum_{i=0}^{p}\|A_i\|\right)\le$$

$$\le\|H-H_p\|\left\{M_\varphi+M_0\left(\|C\|+\sum_{i=0}^{\infty}\|A_i\|\right)\right\}+M_0\|H\|\sum_{i=p+1}^{\infty}\|A_i\|+$$

$$+ \|H\| \left\| \varphi\left(x^*(0), x^*(T); x^*(t_1), \ldots\right) - \varphi\left(x_p(0), x_p(T); x_p(t_1), \ldots\right) \right\| +$$

$$+ \|H\| \left\| \varphi\left(x_p(0), x_p(T); x_p(t_1), \ldots, x_p(t_p), 0, 0, 0, \ldots\right) - \right.$$

$$\left. - \varphi\left(x_p(0), x_p(T); \ldots, x_p(t_p), x_p(t_{p+1}), \ldots\right) \right\| \le K^{(1)} \left\| H - H_p \right\| +$$

$$+ \|H\| K_\varphi \sup_{t \in [0, T]} \left\| x^*(t, x_0) - x_p(t, x_0) \right\| + \|H\| M_0 \left\{ \sum_{i=p+1}^{\infty} \|A_i\| + \delta_0(p+2) \right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\| H \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int_0^{t_i} \left[f\left(\tau, x^*(\tau, x_0)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(s, x^*(s, x_0)\right) ds \right] d\tau - \right.$$

$$\left. - H_p \sum_{i=1}^{p} A_i \int_0^{t_i} \left[f\left(\tau, x_p(\tau, x_0)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(s, x_p(s, x_0)\right) ds \right] d\tau \right\| \le$$

$$\le \|H\| \frac{TK}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| \sup_{t \in [0, T]} \left\| x^*(t, x_0) - x_p(t, x_0) \right\| +$$

$$+ \|H\| \frac{TM}{2} \sum_{i=p+1}^{\infty} \|A_i\| + \left\| H - H_p \right\| \frac{TM}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\|.$$

Покладаючи

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| x^*(t, x_0) - x_p(t, x_0) \right\| = \xi,$$

отримуємо оцінку

$$\xi \le \frac{KT}{2} \xi + K^{(1)} \left\| H - H_p \right\| + \|H\| K_\varphi \xi + \|H\| M_0 \left\{ \sum_{i=p+1}^{\infty} \|A_i\| + \delta_0(p+2) \right\} +$$

$$+ \frac{K\|H\|T}{2} \xi \sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| + \|H\| \frac{TM}{2} \sum_{i=p+1}^{\infty} \|A_i\| + \left\| H - H_p \right\| \frac{TM}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\|.$$

Враховуючи, що стала $K^{(1)}$ не залежить від p, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\|$ збігається, $\delta_0(p) \to 0$ при $p \to \infty$, а також умову в$_1$) та співвідношення (2.16), з останньої оцінки одержуємо нерівність $\xi \le \eta(p) / (1 - Q_\varphi)$, де $\eta(p) \to 0$ при $p \to \infty$, тобто послідовність $\left\{ x_p(t, x_0) \right\}_{p=p_0}^{\infty}$ збігається за нормою простору $\mathfrak{M}$ при $p \to \infty$ до $x^*(t, x_0)$ для будь-якого $x_0 \in D^*_{\beta_\varphi}$. Використовуючи співвідношення (2.9), одержуємо (2.14), що завершує доведення теореми, оскільки тепер доведення рівності (2.15) є очевидним, і з умови в$_2^*$) випливає умова в$_1^0$), тобто справджується зауваження 1.1.

***Наслідок* 2.1.** *В умовах теореми* 2.1 *справджується оцінка*

$$\left\| x^*(t, x_0) - \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) \right\| \le L_1(p) + L_2(n), \quad n \ge n_0, \quad p \ge p_0, \qquad (2.17)$$

де сума $L_1(p) + L_2(n)$ *рівномірно відносно* $n \ge n_0$, $p \ge p_0$ *обмежена, причому* $L_1(p) \to 0$ *при* $p \to \infty$.

Доведення. Оцінимо за нормою різницю $x^*(t, x_0) - \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right)$, доповнюючи вектор $\overset{(n)}{x}_p$ нулями, як було відмічено раніше. Одержимо нерівність

$$\left\| x^*(t, x_0) - \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) \right\| \le \left\| x^*(t, x_0) - x_p(t, x_0) \right\| + \left\| x_p(t, x_0) - \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) \right\| \le$$

$$\le \frac{\eta(p)}{1 - Q_\varphi} + \left\| x_p(t, x_0) - \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) \right\| \quad \forall\, t \in [0, T], \quad x_0 \in D^*_{\beta_\varphi}.$$

Тепер запишемо оцінку

$$\left\| x_p(t, x_0) - \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) \right\| \le \Gamma_1^0 + \Gamma_2^0 + \Gamma_3^0,$$

де

$$\Gamma_1^0 = \left\| \int_0^t \left[f\left(\tau, x_p(\tau, x_0)\right) - \overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_p\left(\tau, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{T} \int_0^T \left(f\left(s, x_p(s, x_0)\right) - \overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}_p\left(s, \overset{(n)}{x}_0\right)\right)\right) ds \right] d\tau \right\| \le$$

$$\le \alpha_1(t) \sup_{t \in [0, T]} \left\| f\left(t, x_p(t, x_0)\right) - \overset{(n)}{f}\left(t, \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) \right\|,$$

$$\Gamma_2^0 = \left\| H_p \left\{ \varphi_p\left(x_p(0), x_p(T); x_p(t_1), \ldots, x_p(t_p)\right) - \left(\sum_{i=0}^p A_i + C \right) x_0 \right\} - \right.$$

$$\left. - \overset{(n)}{H}_p \left\{ \overset{(n)}{\varphi}_p\left(\overset{(n)}{x}_p(0), \overset{(n)}{x}_p(T); \overset{(n)}{x}_p(t_1), \ldots, \overset{(n)}{x}_p(t_p)\right) - \left(\sum_{i=0}^p \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right) \overset{(n)}{x}_0 \right\} \right\|,$$

$$\Gamma_3^0 = \left\| H_p \sum_{i=1}^p A_i \int_0^{t_i} \left[f\left(\tau, x_p(\tau, x_0)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(s, x_p(s, x_0)\right) ds \right] d\tau - \right.$$

$$\left. - \overset{(n)}{H}_p \sum_{i=1}^p \overset{(n)}{A}_i \int_0^{t_i} \left[\overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_p\left(\tau, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}_p\left(s, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) ds \right] d\tau \right\|,$$

$$n \ge n_0, \quad p \ge p_0.$$

Справджуються наступні нерівності:

$$\left\| f\left(t, x_p(t, x_0)\right) - \overset{(n)}{f}\left(t, \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) \right\| \le \left\| f\left(t, x_p(t, x_0)\right) - f\left(t, \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) \right\| +$$

$$+ \left\| f\left(t, \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) - \overset{(n)}{f}\left(t, \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) \right\| \le K \left\| x_p(t, x_0) - \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) \right\| +$$

$$+ \sup\left\{ \left| f_{n+1}\left(t, \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) \right|, \left| f_{n+2}\left(t, \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) \right|, \ldots \right\},$$

$$\Gamma_2^0 \le \left\| H_p \varphi_p\left(x_p(0), x_p(T); x_p(t_1), \ldots, x_p(t_p)\right) - \right.$$

$$\left. - \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{\varphi}_p\left(\overset{(n)}{x}_p(0), \overset{(n)}{x}_p(T); \overset{(n)}{x}_p(t_1), \ldots, \overset{(n)}{x}_p(t_p)\right) \right\| +$$

$$+ \left\| H_p \left(\sum_{i=0}^p A_i + C \right) x_0 - \overset{(n)}{H}_p \left(\sum_{i=0}^p \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right) \overset{(n)}{x}_0 \right\| \le$$

$$\leq \left\| H_p \right\| K_{\varphi_p} \sup_{t \in [0,T]} \left\| x_p(t, x_0) - \overset{(n)}{x}_p\!\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) \right\| +$$

$$+ \left\| H_p \right\| \sup_{\psi_i \in D} \Big\{ \left| \varphi_{n+1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{p+2}, 0, 0, \ldots) \right|,$$

$$\left| \varphi_{n+2}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{p+2}, 0, 0, \ldots) \right|, \ldots \Big\} + \left\| G_p \right\| \left\| x_0 - \overset{(n)}{x}_0 \right\| + M_0 \left\| G_p - \overset{(n)}{G}_p \right\|,$$

де

$$G_p = H_p\left(\sum_{i=0}^{p} A_i + C \right), \qquad \overset{(n)}{G}_p = \overset{(n)}{H}_p\left(\sum_{i=0}^{p} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right),$$

$$\Gamma_3^0 \leq \left\| H_p \right\| \sum_{i=1}^{p} \left\{ \left\| A_i \right\| \left\| \int_0^{t_i} \left[f\big(\tau, x_p(\tau, x_0)\big) - \overset{(n)}{f}\!\left(\tau, \overset{(n)}{x}_p\!\left(\tau, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T \left(f\big(s, x_p(s, x_0)\big) - \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \overset{(n)}{f}\!\left(s, \overset{(n)}{x}_p\!\left(s, \overset{(n)}{x}_0\right)\right)\right) ds \right] d\tau \right\| +$$

$$\left. + \left\| A_i - \overset{(n)}{A}_i \right\| \left\| \int_0^{t_i} \left[\overset{(n)}{f}\!\left(\tau, \overset{(n)}{x}_p\!\left(\tau, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{(n)}{f}\!\left(s, \overset{(n)}{x}_p\!\left(s, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) ds \right] d\tau \right\| \right\} +$$

$$+ \left\| H_p - \overset{(n)}{H}_p \right\| \sum_{i=1}^{p} \left\| \overset{(n)}{A}_i \right\| \left\| \int_0^{t_i} \left[\overset{(n)}{f}\!\left(\tau, \overset{(n)}{x}_p\!\left(\tau, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{(n)}{f}\!\left(s, \overset{(n)}{x}_p\!\left(s, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) ds \right] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \left\| H_p \right\| \sum_{i=1}^{p} \left\{ \left\| A_i \right\| \frac{T}{2} \sup_{t \in [0,T]} \left\| f\big(t, x_p(t, x_0)\big) - \overset{(n)}{f}\!\left(s, \overset{(n)}{x}_p\!\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) \right\| + \frac{TM}{2} \left\| A_i - \overset{(n)}{A}_i \right\| \right\} +$$

$$+ \left\| H_p - \overset{(n)}{H}_p \right\| \sum_{i=1}^{p} \left\| \overset{(n)}{A}_i \right\| \frac{TM}{2},$$

$$\left\| G_p - \overset{(n)}{G}_p \right\| \leq \left\| H_p \right\| \left(\sum_{i=0}^{p} \left\| A_i - \overset{(n)}{A}_i \right\| + \left\| C - \overset{(n)}{C} \right\| \right) +$$

$$+ \left\| H_p - \overset{(n)}{H}_p \right\| \left(\sum_{i=0}^{p} \left\| \overset{(n)}{A}_i \right\| + \left\| \overset{(n)}{C} \right\| \right).$$

Введемо позначення:

$$\sup_{\psi_i \in D} \Big\{ \left| \varphi_{n+1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{p+2}, 0, 0, \ldots) \right|, \left| \varphi_{n+2}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{p+2}, 0, 0, \ldots) \right|, \ldots \Big\} =$$

$$= \xi_*(p, n),$$

$$\sup_{t \in [0,T]} \left\| x_p(t, x_0) - \overset{(n)}{x}_p\!\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) \right\| = \xi^0(p, n), \qquad \left\| x_0 - \overset{(n)}{x}_0 \right\| = \eta^0(n),$$

$$\left\| \left\{ \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, f_{n+1}(t, x), f_{n+2}(t, x), \ldots \right\} \right\| = \mu(n, t, x), \qquad \sup_{(t,x) \in D_0} \mu(n, t, x) = \mu^0(n),$$

$$\left\| A_i - \overset{(n)}{A}_i \right\| = \overline{A}_i^n, \qquad \left\| H_p - \overset{(n)}{H}_p \right\| = \overline{H}_p^n, \qquad \left\| C - \overset{(n)}{C} \right\| = \overline{C}^n.$$

Тепер, врахувавши попередні оцінки, можна записати нерівність

$$\xi^0(p,n) \le \frac{T}{2}\left(K\xi^0(p,n)+\mu^0(n)\right) + \left\|H_p\right\|K_{\varphi_p}\xi^0(p,n) + \left\|G_p\right\|\eta^0(n) +$$

$$+ \left\|H_p\right\|\xi_*(p,n) + M_0\left\|H_p\right\|\left(\sum_{i=0}^{p}\overline{A}_i^n + \overline{C}^n\right) + M_0\,\overline{H}_p^n\left(\sum_{i=0}^{p}\left\|\overset{(n)}{A_i}\right\| + \left\|\overset{(n)}{C}\right\|\right) +$$

$$+ \left\|H_p\right\|\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|\frac{T}{2}\left(K\xi^0(p,n)+\mu^0(n)\right) + \left\|H_p\right\|\frac{TM}{2}\overline{A}_i^n + \overline{H}_p^n\frac{TM}{2}\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|,$$

або

$$\left(1-Q_{\varphi_p}\right)\xi^0(p,n) \le \frac{T\mu^0(n)}{2} + \left\|G_p\right\|\eta^0(n) +$$

$$+ M_0\left\|H_p\right\|\left(\sum_{i=0}^{p}\overline{A}_i^n + \overline{C}^n + \xi_*(p,n)\right) +$$

$$+ M_0\,\overline{H}_p^n\left(\sum_{i=0}^{p}\left\|\overset{(n)}{A_i}\right\| + \left\|\overset{(n)}{C}\right\|\right) + \frac{\left\|H_p\right\|T\mu^0(n)}{2}\sum_{i=1}^{p}\|A_i\| +$$

$$+ \left\|H_p\right\|\frac{TM}{2}\overline{A}_i^n + \overline{H}_p^n\frac{TM}{2}\sum_{i=1}^{p}\|A_i\|.$$

Праву частину останньої нерівності позначимо через $\Phi(p,n)$ і одержимо оцінку

$$\left\|x_p(t,x_0) - \overset{(n)}{x_p}\left(t,\overset{(n)}{x_0}\right)\right\| \le \frac{\Phi(p,n)}{1-Q_{\varphi_p}}. \qquad (2.18)$$

Підсилимо останню нерівність, замінивши у виразі для $\Phi(p,n)$ знаки сум $\sum_{i=0}^{p}$, $\sum_{i=1}^{p}$ знаками $\sum_{i=0}^{\infty}$, $\sum_{i=1}^{\infty}$ відповідно, $\left\|H_p\right\|$ замінимо сталою

$$\frac{2/(KT)-1}{\sum_{i=0}^{p_0}\left\|\overset{(n_0)}{A_i}\right\| + 2K_\varphi/(KT)},$$

що фігурує в теоремі 2.1, сталі K_{φ_p} — сталою K_φ, Q_{φ_p} — сталою q і, нарешті, $\xi_*(p,n)$ — виразом

$$\xi_*^0(n) = \sup_{\psi_i\in D}\left\{\left|\varphi_{n+1}(\psi_1,\psi_2,\ldots)\right|, \left|\varphi_{n+2}(\psi_1,\psi_2,\ldots)\right|, \ldots\right\}.$$

В результаті цього одержуємо нерівність більш „грубу”, ніж (2.18):

$$\left\|x_p(t,x_0) - \overset{(n)}{x_p}\left(t,\overset{(n)}{x_0}\right)\right\| \le \frac{\Phi^*(n)}{1-q},$$

тобто для будь-яких $t\in[0,T]$, $n\ge n_0$, $p\ge p_0$

$$\left\|x^*(t,x_0) - \overset{(n)}{x_p}\left(t,\overset{(n)}{x_0}\right)\right\| \le \frac{\eta(p)}{1-Q_\varphi} + \frac{\Phi^*(n)}{1-q},$$

що доводить нерівність (2.17), а разом з тим і сформульований наслідок.

Зауважимо, що з умов наслідку 2.1 не випливає, що $L_2(n)\to 0$ при $n\to\infty$.

3. Інший спосіб редукції. Ілюстративний приклад. Розглянемо крайову задачу (2.1) з крайовою умовою

$$\overset{(n)}{A}_0 \overset{(n)}{x}(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \overset{(n)}{A}_i \overset{(n)}{x}(t_i) + \overset{(n)}{C} \overset{(n)}{x}(t) =$$

$$= \overset{(n)}{\varphi}\left(\overset{(n)}{x}\left(0, \overset{(n)}{x}_0\right), \overset{(n)}{x}\left(T, \overset{(n)}{x}_0\right); \overset{(n)}{x}\left(t_1, \overset{(n)}{x}_0\right), \overset{(n)}{x}\left(t_2, \overset{(n)}{x}_0\right), \ldots \right). \tag{3.1}$$

Будемо вважати, що виконуються умови (1.3) та (1.4), а також наступні обмеження:

а$_4$) матриця

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_i}{T} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C}$$

оборотна, і обернена до неї матриця $\overset{(n)}{H}$ обмежена за нормою;

б$_4$) множина $\tilde{D}_{\overset{(n)}{\beta}_\varphi}^{(n)}$ точок $\overset{(n)}{x}_0 \in R^n$, для яких $(x_{01}, \ldots, x_{0n}, 0, 0, \ldots)$ входять до множини D разом зі своїм $\overset{(n)}{\beta}_n$-околом, де

$$\overset{(n)}{\beta}_\varphi\left(\overset{(n)}{x}_0\right) = \frac{T}{2} M + \overset{(n)}{\beta}_{1\varphi}\left(\overset{(n)}{x}_0\right), \qquad \overset{(n)}{\beta}_{1\varphi}\left(\overset{(n)}{x}_0\right) = \left\|\overset{(n)}{H}\right\| \left\| \left[\overset{(n)}{d}{}^* - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right) \overset{(n)}{x}_0 \right] \right\| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \left\| \overset{(n)}{H}_p \overset{(n)}{A}_i \right\| \alpha_1(t_i) M,$$

а $\overset{(n)}{d}{}^* \in R^n$ підібрано таким чином, що $\left|\overset{(n)}{d}{}_i^*\right| = M_\varphi$, $\operatorname{sign} \overset{(n)}{d}{}_i^* = -\operatorname{sign} \overset{(n)}{d}{}_i^0$, причому

$$\overset{(n)}{d}{}_i^0 = \operatorname{colon}\left(\overset{(n)}{d}{}_1^0, \overset{(n)}{d}{}_2^0, \ldots \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right) \overset{(n)}{x}_0, \qquad i \in N,$$

не є порожньою;

в$_4$) $\overset{(n)}{Q}_\varphi = \dfrac{KT}{2} \left[1 + \left\|\overset{(n)}{H}\right\| \sum_{i=1}^{\infty} \left\|\overset{(n)}{A}_i\right\| \right] + K_\varphi \left\|\overset{(n)}{H}\right\| < 1.$

Повторюючи міркування, використані при доведенні теореми 1.1, приходимо до висновку, що послідовність

$$\overset{(n)}{x}_m\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) = \overset{(n)}{x}_0 + \int_0^t \left[\overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_{m-1}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}_{m-1}\left(s, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{t}{T} \overset{(n)}{H} \left\{ \overset{(n)}{\varphi}\left(\overset{(n)}{x}_{m-1}\left(0, \overset{(n)}{x}_0\right), \overset{(n)}{x}_{m-1}\left(T, \overset{(n)}{x}_0\right); \overset{(n)}{x}_{m-1}\left(t_1, \overset{(n)}{x}_0\right), \overset{(n)}{x}_{m-1}\left(t_2, \overset{(n)}{x}_0\right), \ldots \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \overset{(n)}{A}_i + \overset{(n)}{C} \right) \overset{(n)}{x}_0 - \sum_{i=1}^{\infty} \overset{(n)}{A}_i \int_0^{t_i} \left[\overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_{m-1}\left(\tau, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}_{m-1}\left(s, \overset{(n)}{x}_0\right)\right) ds \right] d\tau \right\},$$

$$m = 1, 2, \ldots, \quad \overset{(n)}{x}_0\left(t, \overset{(n)}{x}_0\right) \equiv \overset{(n)}{x}_0 \in D_{\overset{(n)}{\beta}_\varphi},$$

рівномірно відносно $\overset{(n)}{x_0} \in D_{\underset{\beta_\varphi}{(n)}}$, $t \in [0, T]$ збігається до функції $\overset{(n)}{x}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right)$, що задовольняє рівність

$$\overset{(n)}{x}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) = \overset{(n)}{x_0} + \int\limits_0^t \left[\overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}\left(\tau, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T \overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}\left(s, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{t}{T}\overset{(n)}{H}\left\{ \overset{(n)}{\varphi}\left(\overset{(n)}{x}\left(0, \overset{(n)}{x_0}\right), \overset{(n)}{x}\left(T, \overset{(n)}{x_0}\right); \overset{(n)}{x}\left(t_1, \overset{(n)}{x_0}\right), \overset{(n)}{x}\left(t_2, \overset{(n)}{x_0}\right), \ldots \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \overset{(n)}{A_i} + \overset{(n)}{C} \right)\overset{(n)}{x_0} - \sum_{i=1}^{\infty} \overset{(n)}{A_i} \int\limits_0^{t_i} \left[\overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}\left(\tau, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T \overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}\left(s, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) ds \right] d\tau \right\},$$

і для будь-якого натурального m

$$\left\| \overset{(n)}{x_m}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) - \overset{(n)}{x}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) \right\| \le \frac{\left(\overset{(n)}{Q_\varphi}\right)^m}{1 - \overset{(n)}{Q_\varphi}} \overset{(n)}{\beta_\varphi}\left(\overset{(n)}{x_0}\right).$$

При цьому $\overset{(n)}{x}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \overset{(n)}{f}\left(t, \overset{(n)}{x}\right) + \overset{(n)}{\mu}, \tag{3.2}$$

де

$$\overset{(n)}{\mu} = \overset{(n)}{\Delta_\varphi}\left(\overset{(n)}{x_0}\right) = \frac{1}{T}\overset{(n)}{H}\left\{ \overset{(n)}{\varphi}\left(\overset{(n)}{x}\left(0, \overset{(n)}{x_0}\right), \overset{(n)}{x}\left(T, \overset{(n)}{x_0}\right); \overset{(n)}{x}\left(t_1, \overset{(n)}{x_0}\right), \overset{(n)}{x}\left(t_2, \overset{(n)}{x_0}\right), \ldots \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \overset{(n)}{A_i} + \overset{(n)}{C} \right)\overset{(n)}{x_0} - \sum_{i=1}^{\infty} \overset{(n)}{A_i} \int\limits_0^{t_i} \left[\overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}\left(\tau, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T \overset{(n)}{f}\left(s, \overset{(n)}{x}\left(s, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) ds \right] d\tau \right\} -$$

$$- \frac{1}{T}\int\limits_0^T \overset{(n)}{f}\left(\tau, \overset{(n)}{x}\left(\tau, \overset{(n)}{x_0}\right)\right) d\tau,$$

задовольняє крайові умови (3.1) і, якщо $\overset{(n)}{\Delta_\varphi}\left(\overset{(n)}{x_0}\right) = 0$, є розв'язком крайової задачі (2.1), (3.1).

Підсилимо нерівність в$_3$), замінивши її умовою

в$_3^0$). $\dfrac{KT}{2}\left[1 + \left\| \overset{(n)}{H_p} \right\| \sum_{i=1}^{p} \left\| \overset{(n)}{A_i} \right\| \right] + K_{\varphi_p} \left\| \overset{(n)}{H_p} \right\| \le q_0 < 1.$

Лема 3.1. *Припустимо, що виконуються умови* (1.3), (1.4), (2.7) *і множина* $D^*_{\beta_\varphi} \ne \varnothing$. *Нехай, крім того, для будь-яких* $n \ge n_0$, $p \ge p_0$ *справджуються умови* а$_3$) *та* в$_3^0$). *Тоді виконуються умови* а$_4$), б$_4$), в$_4$) *та для будь-яких* $n \ge n_0$, $x \in D^*_{\beta_\varphi}$

$$\lim_{p \to \infty} \overset{(n)}{x_p}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) = \overset{(n)}{x}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right), \qquad \lim_{p \to \infty} \overset{(n)}{\mu_p} = \overset{(n)}{\mu}$$

в сенсі норми.

Доведення. Легко перевірити, що з включення $x_0 \in D^*_{\beta_\varphi}$ випливає включення $\overset{(n)}{x_0} \in \tilde{D}^{(n)}_{\overset{(n)}{\beta_\varphi}}$ $\forall\, n \geq n_0$. Крім того, нерівності

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{T} \overset{(n)}{A_i} + \overset{(n)}{C} - \overset{(n)}{H_p^{-1}} \right\| \leq \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{t_i}{T} \left\| \overset{(n)}{A_i} \right\| \leq \sum_{i=p+1}^{\infty} \| A_i \|$$

та оцінка

$$\left\| \overset{(n)}{H_p} \right\| \leq \frac{2/(KT)-1}{\sum_{i=1}^{p_0} \left\| \overset{(n_0)}{A_i} \right\| + 2K_\varphi/(KT)}, \quad n \geq n_0, \quad p \geq p_0,$$

гарантують існування матриці $\overset{(n)}{H}$, $n \geq n_0$, і обмеженість її норми тією самою сталою. Отже, $\left\| \overset{(n)}{H} - \overset{(n)}{H_p} \right\| \leq \sigma(p) \to 0$ при $p \to \infty$, $p \geq p_0$, і виконується умова $а_4$). Умова $в_3^0$) гарантує виконання умови $в_4$).

Позначивши $\sup_{t \in [0,T]} \left\| \overset{(n)}{x}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) - \overset{(n)}{x_p}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) \right\|$ через $\xi^*(p,n)$ і провівши міркування, аналогічні використаним при доведенні теореми 2.1, одержимо оцінки

$$\xi^*(p,n) \leq \Gamma_1^* + \Gamma_2^* + \Gamma_3^*,$$

$$\Gamma_1^* \leq \frac{KT}{2} \xi^*(p,n),$$

$$\Gamma_2^* \leq K_1 \left\| \overset{(n)}{H} - \overset{(n)}{H_p} \right\| + \left\| \overset{(n)}{H} \right\| K_\varphi \xi^*(p,n) + M_0 \left\| \overset{(n)}{H} \right\| \left\{ \sum_{i=p+1}^{\infty} \| A_i \| + \delta_0(p+2) \right\},$$

$$\Gamma_3^* \leq \left\| \overset{(n)}{H} \right\| \frac{KT}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \| A_i \| \xi^*(p,n) +$$

$$+ \left\| \overset{(n)}{H} \right\| \frac{TM}{2} \sum_{i=p+1}^{\infty} \| A_i \| + \left\| \overset{(n)}{H} - \overset{(n)}{H_p} \right\| \frac{TM}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \| A_i \|,$$

звідки

$$\xi^*(p,n)\left(1 - \overset{(n)}{Q_\varphi}\right) \leq K_1 \left\| \overset{(n)}{H} - \overset{(n)}{H_p} \right\| + M_0 \left\| \overset{(n)}{H} \right\| \left\{ \sum_{i=p+1}^{\infty} \| A_i \| + \delta_0(p+2) \right\} +$$

$$+ \left\| \overset{(n)}{H} \right\| \frac{TM}{2} \sum_{i=p+1}^{\infty} \| A_i \| + \left\| \overset{(n)}{H} - \overset{(n)}{H_p} \right\| \frac{TM}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \| A_i \|,$$

або

$$\xi^*(p,n) \leq \frac{\eta^*(p,n)}{1 - \overset{(n)}{Q_\varphi}}, \quad \eta^*(p,n) \to 0 \text{ при } p \to \infty.$$

Отже, для будь-якого $n \geq n_0$ послідовність $\left\{ \overset{(n)}{x_p}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) \right\}_{p=p_0}^{\infty}$ збігається до функції $\overset{(n)}{x}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right)$ при $p \to \infty$.

Співвідношення

$$\left\| \overset{(n)}{\mu} - \overset{(n)}{\mu}_p \right\| \leq K\xi^*(p,n) + \Gamma_2^* + \Gamma_3^* \to 0 \quad \text{при} \quad p \to \infty$$

завершує доведення леми.

Теорема 3.1. *Нехай* $f(t,x) \in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(x)$, $\varphi(\psi) \in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(\psi)$, $D^*_{\beta_\varphi} \neq \varnothing$ *та для будь-яких* $n \geq n_0$, $p \geq p_0$ *виконуються умови* а$_1$), а$_3$), в$_1^0$) *і* в$_3^0$), *в якій покладено* $K_{\varphi_p} = K_\varphi$. *Тоді для будь-якого* $x_0 \in D^*_{\beta_\varphi}$

$$x^*(t, x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{p\to\infty} \overset{(n)}{x}_p\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right)\right), \qquad \mu = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{p\to\infty} \overset{(n)}{\mu}_p\right),$$

де збіжність відносно n *покоординатна, відносно* p *за нормою простору* $\mathfrak{M}$. *При цьому не існує іншого значення* $\mu \in \mathfrak{M}$ *такого, при якому розв'язок рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \mu$$

з початковою умовою $x(0) = x_0$ *задовольняв би крайову умову* (1.2).

Доведення. Оцінимо керуючий параметр $\overset{(n)}{\mu}$ у рівнянні (3.2) при $n \geq n_0$:

$$\overset{(n)}{\mu} \leq \frac{\left\|\overset{(n)}{H}\right\|}{T}\left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left\|\overset{(n)}{A_i}\right\| + \left\|\overset{(n)}{C}\right\|\right)\left\|\overset{(n)}{x_0}\right\| + \frac{MT}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\overset{(n)}{A_i}\right\|\right) + M \leq$$

$$\leq \frac{2/(KT) - 1}{\sum_{i=1}^{p_0}\left\|\overset{(n_0)}{A_i}\right\| + 2K_\varphi/(KT)}\left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^{\infty}\|A_i\| + \|C\|\right)\|x_0\| + \frac{MT}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\|\right) +$$

$$+ M = \mathrm{const} < \infty,$$

де $x_0 \in D^*_{\beta_\varphi}$. Отже, послідовність $\left\{\overset{(n)}{\mu}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ рівномірно обмежена за нормою простору $\mathfrak{M}$. Послідовність $\left\{\overset{(n)}{x}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right)\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ рівномірно обмежена сталою M_0 і рівностепенево неперервна на відрізку $[0, T]$, що випливає з нерівності

$$\left\|\overset{(n)}{x}\left(t^{(2)}, \overset{(n)}{x_0}\right) - \overset{(n)}{x}\left(t^{(1)}, \overset{(n)}{x_0}\right)\right\| \leq (t^{(2)} - t^{(1)})M_0'',$$

де $\left\{t^{(1)}, t^{(2)}\right\} \subset [0, T]$, $t^{(2)} > t^{(1)}$, а

$$M_0'' = 2M +$$

$$+ \frac{2/(KT) - 1}{T\sum_{i=1}^{p_0}\left\|\overset{(n_0)}{A_i}\right\| + 2K_\varphi/K}\left(M_\varphi + \left(\sum_{i=0}^{\infty}\|A_i\| + \|C\|\right)\|x_0\| + \frac{MT}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\|\right).$$

Це дає можливість провести міркування, аналогічні використаним при доведенні леми 2.1, і обґрунтувати правильність співвідношень

$$\lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{x}\left(t, \overset{(n)}{x_0}\right) = x^*(t, x_0), \qquad \lim_{n\to\infty} \overset{(n)}{\mu} = \mu,$$

де граничні переходи розуміються в покоординатному сенсі. Враховуючи лему 3.1, завершуємо доведення теореми.

***Наслідок* 3.1 (з теорем 2.1 та 3.1).** *Нехай* $f(t,x)\in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(x)$, $\varphi(\psi)\in\hat{C}_{\mathrm{Lip}}(\psi)$, $D^*_{\beta_\varphi}\neq\varnothing$ *та для будь-яких* $n\ge n_0$, $p\ge p_0$ *виконуються умови* а$_1$), а$_2$), а$_3$) *і* в$_2^*$), в$_3^0$), *в яких покладено* $K_{\varphi_p}=K_\varphi$. *Тоді справджуються теореми* 2.1, 3.1 *і граничні переходи* (2.14) *та* (2.15) *є комутативними відносно* n *та* p.

Доведення останнього твердження не становить труднощів.

***Наслідок* 3.2.** *Нехай* $f(t,x)\in \hat{C}_{\mathrm{Lip}}(x)$, $\varphi(\psi)\in\hat{C}_{\mathrm{Lip}}(\psi)$, $D^*_{\beta_\varphi}\neq\varnothing$ *і для будь-якого* $p\ge p_0$ *справджується нерівність*

$$\left\|\sum_{i=1}^{p}\frac{t_i}{T}A_i+C-E\right\|\le q^*=\text{const}<1,\tag{3.3}$$

де E — *нескінченна одинична матриця. Якщо при цьому*

$$KT\left(1+\frac{1}{1-q^*}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|A_i\|+\|C\|\right)\right)+\frac{K_\varphi}{1-q^*}\le q_*=\text{const}<1,\tag{3.4}$$

то виконуються всі умови теорем 2.1 *та* 3.1 *і граничні переходи* (2.14) *та* (2.15) *є комутативними відносно* n *та* p.

Доведення. Оцінка (3.3) приводить до нерівностей

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t_i}{T}A_i+C-E\right\|\le q^*$$

та

$$\left\|\sum_{i=1}^{p}\frac{t_i}{T}\overset{(n)}{A_i}+\overset{(n)}{C}-\overset{(n)}{E}\right\|\le q^*,$$

звідки випливає, що для будь-яких $n\in N$ і $p\ge p_0$ існують матриці

$$H=\sum_{k=0}^{\infty}\left(E-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t_i}{T}A_i-C\right)^k,\quad H_p=\sum_{k=0}^{\infty}\left(E-\sum_{i=1}^{p}\frac{t_i}{T}A_i-C\right)^k,$$

$$\overset{(n)}{H_p}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\overset{(n)}{E}-\sum_{i=1}^{p}\frac{t_i}{T}\overset{(n)}{A_i}-\overset{(n)}{C}\right)^k,$$

причому їх норми не перевищують $\dfrac{1}{1-q^*}$. Тоді з нерівності (3.4) випливають умови в$_2^*$) та в$_3^0$), в яких покладено $K_{\varphi_p}=K_\varphi$, що завершує доведення.

Для прикладу розглянемо систему рівнянь

$$\frac{dx_n}{dt}=\frac{1-2t}{2^{n+2}}x_{n+1}^2,\qquad n=1,2,\ldots,\tag{3.5}$$

і крайову умову

$$A_0x(0)+\sum_{i=1}^{\infty}A_ix(t_i)+Cx(T)=d,\tag{3.6}$$

де $T=1$, $D_0=[0,1]\times D=[0,1]\times\{x\in\mathfrak{M}\,|\,\|x\|\le 2\}$, $d=\{d_1,d_2,d_3,\ldots\}\in\mathfrak{M}$ — сталий вектор, $A_0=-E$, $C=E$, E — нескінченна одинична матриця,

$$d_i = \frac{1}{2\cdot 4^{i+1}} e^{1/(2\cdot 4^{i+1})}, \quad t_i = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{i+1}}}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

елементи матриць $A_i = \left[a_{jk}^{(i)} \right]_{j,k=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \dots$, визначено співвідношенням

$$a_{jk}^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\cdot 4^{i+1}}, & \text{якщо } j = k = i, \\ 0, & \text{якщо } (j-i)^2 + (k-i)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Неважко перевірити, що:

1) виконуються нерівності (1.3), в яких покладено $M_\varphi = \| d \| = \dfrac{e^{1/32}}{32}$, $K_\varphi = 0$;

2) на множині D_0 виконуються нерівності (1.4), в яких покладено $K = 1/2$, $M = 1/2$;

3) $\| C \| = 1$, $\| A_i \| \leq \dfrac{1}{32}$, $i = 1, 2, \dots$;

4) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| A_i \|$ збігається до числа $\dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^{i+1}} = \dfrac{1}{24}$;

5) матриця $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{t_i}{T} A_i + C$ є оборотною, і елементи оберненої до неї матриці $H = \left[h_{jk} \right]_{j,k=1}^{\infty}$ мають вигляд

$$h_{jk} = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{2\cdot 4^{j+1}} \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2^{j+1}}} \right) \right)^{-1} & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k, \end{cases}$$

причому $\| H \| \leq 1$;

6) $Q_\varphi = \dfrac{KT}{2} \left[1 + \| H \| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \| A_i \| \right] = \dfrac{1}{4} \left[1 + \dfrac{1}{24} \right] = \dfrac{25}{96} < 1.$

Покажемо тепер, що множина D_{β_φ} не є порожньою. Для цього досить, щоб існувала хоча б одна точка $x_0 \in D$, для якої $\| x_0 \| + \beta_\varphi(x_0) \leq 2$. Із нерівності

$$\| x_0 \| + \beta_\varphi(x_0) \leq$$

$$\leq \| x_0 \| + \frac{T}{2} M + \| H \| \left(\| d \| + \left\| \sum_{i=0}^{\infty} A_i + C \right\| \| x_0 \| \right) + \| H \| \sum_{i=1}^{\infty} \| A_i \| \alpha_1(t_i) M \leq$$

$$\leq \| x_0 \| + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{32} e^{1/32} + \frac{1}{32} \| x_0 \| \right) + 1 \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{33}{32} \| x_0 \| + \frac{25}{96} + \frac{1}{32} e^{1/32} \leq 2$$

випливає, що довільна точка $x_0 \in D$ така, що $\dfrac{33}{32} \| x_0 \| + \dfrac{25}{96} + \dfrac{1}{32} e^{1/32} \leq 2$, належить до множини D разом зі своїм β_φ-околом. Прості розрахунки показують, що таку властивість має кожна точка множини $D_\gamma = \{ x_0 \in D \mid \| x_0 \| \leq 1{,}6556 \}$.

Таким чином, на декартовому добутку $[0, 1] \times D_\gamma$ виконуються всі умови теореми 1.1.

Підстановкою в рівняння (3.5) легко переконатись, що функція $x^*(t) = \left\{ x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots \right\}$, де

$$x_n^*(t) = \exp\left(\frac{t - t^2}{2^{n+2}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.7}$$

є його розв'язком, визначеним на всій числовій прямій, який при $t = 0$ набуває значення $x_0 = \{ 1, 1, 1, \ldots \} \in D_\gamma$. При цьому вказаний розв'язок задовольняє крайову умову (3.6), тобто є розв'язком крайової задачі (3.5), (3.6).

Однак умова в$_1^0$) не виконується. Тому не можна стверджувати, що знайдений розв'язок збігається з функцією $x^*(t, x_0)$, одержаною як границя послідовних наближень, існування якої гарантується теоремою 1.1, а система рівнянь (3.5) не набере збурення, відмінного від нуля.

Неважко переконатися, що функція (3.7) є визначеним на всій числовій прямій розв'язком системи рівнянь

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{1-2t}{2^{n+2}} x_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.8}$$

тобто розв'язком крайової задачі (3.8), (3.6). Розглянемо цю задачу докладніше, поклавши $D_1 = \{ x \in \mathfrak{M} \mid \| x \| \le 4 \}$, $D_0^1 = [0, 1] \times D_1$. У цьому випадку виконуються умови $1 - 5$, в яких покладено $K = 1/4$, $M = 1/2$, нерівність $Q_\varphi < 1$, і кожна точка з множини $D_\gamma^* = \{ x_0 \in D_1 \mid \| x_0 \| \le 3{,}5949 \}$ належить до множини D_1 разом зі своїм β_φ-околом. Таким чином, на декартовому добутку $[0, 1] \times D_\gamma^*$ виконуються всі умови теореми 1.1, причому точка $x_0 = \{ 1, 1, 1, \ldots \} \in D_\gamma^*$. На відміну від попередньої задачі, в цьому випадку умова в$_1^0$) виконується:

$$KT\left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \| H \| \| A_i \| + \| H \| \| C \| \right\} = \frac{1}{4}\left\{ 1 + \frac{1}{24} + 1 \right\} = \frac{49}{96} < 1.$$

Отже, можна стверджувати, що функція (3.7) на проміжку $[0, 1]$ збігається з функцією $x^*(t, x_0)$, $x_0 = \{ 1, 1, 1, \ldots \}$, яка одержується як границя послідовних наближень, побудованих у теоремі 1.1, для крайової задачі (3.8), (3.6).

Перевіримо, чи справджуються в цьому випадку граничні переходи (2.14) та (2.15). Для цього простіш за все перевірити, чи виконуються умови наслідку 3.2. Функція $f(t, x)$, що стоїть у правій частині рівності (3.8), належить простору $\hat{C}_{\text{Lip}}(x)$ на D_0^1, оскільки для довільних $\{ x, \bar{x} \} \subset D_1$, перші m координат яких збігаються, і для будь-якого $t \in [0, 1]$ справджуються нерівності

$$\| f(t, x) - f(t, \bar{x}) \| \le \sup_{i \ge m+1} \left\{ \frac{|1 - 2t|}{2^{i+2}} | x_i - \bar{x}_i | \right\} \le |1 - 2t| \frac{1}{2^{m+3}} \| x - \bar{x} \|,$$

де

$$\varepsilon(m) = \frac{1}{2^{m+3}} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Для всіх натуральних p справджується нерівність (3.3):

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} \frac{t_i}{T} A_i + C - E \right\| \le \sum_{i=1}^{p} \left\| \frac{t_i}{T} A_i \right\| < \sum_{i=1}^{\infty} \| A_i \| = \frac{1}{24} = q^* < 1.$$

Нерівність (3.4), в якій покладено $K_\varphi = 0$, теж виконується:

$$KT\left(1 + \frac{1}{1-q^*}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| + \|C\|\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{24}{23}\left(\frac{1}{24}+1\right)\right) = \frac{12}{23} = q_* < 1.$$

Але, як показують прості підрахунки, множина $D^*_{\beta_\varphi}$ для розглядуваної задачі є порожньою. Отже, про можливість подання функції (3.7) у вигляді (2.14) нічого сказати не можна — питання потребує додаткового дослідження.

І, нарешті, розглянемо систему рівнянь (3.8) із крайовою умовою (3.6), в якій покладено $d = 0 \in \mathfrak{M}$. Для останньої крайової задачі множина $D^*_{\beta_\varphi}$ не є порожньою, і легко переконатися, що кожна точка з множини $D^1_\gamma = \{ x \in D_1 \,|\, \|x\| \le 0,00436 \}$ міститься в множині D_1 разом зі своїм $\beta^*_\varphi(x, 1, 1)$-околом. Неважко також переконатися, що для будь-яких $\{n, p\} \subset N$ існують матриці

$$\overset{(n)}{H}_p = \left[\overset{(n)}{h}_{p_{jk}}\right]_{j,k=1}^{n} = \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{t_i}{T}\overset{(n)}{A_i} + \overset{(n)}{C}\right)^{-1}.$$

Усі ці матриці обмежені за нормою одиницею. Таким чином, виконуються всі умови наслідку 3.2, а отже, і всі умови теорем 2.1 та 3.1.

1. *Персидский К. П.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 247 с.
2. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
3. *Мартинюк О. М.* Дослідження розв'язків крайових задач для злічениих систем нелінійних диференціальних рівнянь: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1993. – 16 с.
4. *Теплинский Ю. В., Недокис В. А.* Предельные теоремы в теории многоточечных краевых задач // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 519–531.
5. *Теплінський Ю. В., Недокіс В. А.* Про зліченноточкові крайові задачі для злічених систем звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 1999. – № 2. – С. 252–266.
6. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.

Одержано 19.03.2004