УДК 517.929.7 + 517.911.7

А. Н. Ронто (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ЗАДАВАЕМЫХ $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

We obtain new sufficient conditions under which the Cauchy problem for a system of linear functional differential equations is uniquely solvable for arbitrary additive perturbations. The conditions established are unimprovable in a certain sense.

Отримано нові достатні умови, за яких задача Коші для системи лінійних функціонально-диференціальних рівнянь є однозначно розв'язною при довільних адитивних збуреннях. Знайдені умови є в певному сенсі неполіпшуваними.

1. Введение. Исследованию разрешимости различных классов краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений посвящено много работ (см., в частности, библиографию, приведенную в известной книге [1]). Тем не менее, даже теория задачи Коши для линейного функционально-дифференциального уравнения первого порядка далека от завершенности.

Ясно, что, изучая вопросы разрешимости разнообразных краевых задач (периодических, многоточечных и др.) для упомянутых уравнений, необходимо располагать как можно более полным запасом сведений о простейшей из них — задаче с начальным условием. К сожалению, в настоящее время имеется лишь небольшое количество эффективных теорем о разрешимости задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений, которые содержат в том или ином смысле точные условия, формулируемые непосредственно в терминах исходной задачи. В связи с этим отметим работу [2], результаты которой, относящиеся к линейным скалярным функционально-дифференциальным уравнениям первого порядка с изотонными операторами и установленные другими методами, по своей форме наиболее близки к излагаемым здесь.

Целью настоящей работы является получение оптимальных, в определенном смысле, достаточных условий однозначной разрешимости задачи Коши для систем произвольного числа линейных функционально-дифференциальных уравнений, задаваемых линейными операторами, удовлетворяющими определенным условиям изотонности. Найденные условия формулируются в терминах свойств решений некоторых функционально-дифференциальных неравенств, связанных с заданным уравнением. Упомянутые утверждения позволяют установить эффективные теоремы об однозначной разрешимости начальной задачи для различных систем интегро-дифференциальных уравнений, уравнений с внутренней суперпозицией и других классов функционально-дифференциальных уравнений. Получение таких теорем для конкретных уравнений мы, однако, здесь не рассматриваем.

Статья построена следующим образом. В пп. 2, 3 дана постановка задачи и введены необходимые обозначения. В п. 4 сформулированы основные теоремы 1 и 2, которые доказываются в п. 6. Далее, в п. 5 получены некоторые вспомогательные предложения, используемые в п. 6. Наконец, в п. 7 установлены усиленные версии теорем 1 и 2 (теоремы 4 и 5), которые имеют место для уравнений (1) с так называемыми сильно $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительными операторами (см. п. 7, определение 4).

2. Постановка задачи и определения. В настоящей статье описаны новые классы линейных операторов $l\colon C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L([a, b], \mathbb{R}^n)$, для которых линейная однородная задача Коши

$$u'(t) = (lu)(t), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

$$u(\tau) = 0 \tag{2}$$

имеет лишь тривиальное решение. Здесь $n \in \mathbb{N}$, $l = (l_k)_{k=1}^n : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to$ $\to L([a, b], \mathbb{R}^n)$ — ограниченный[1] линейный оператор, а τ — фиксированная точка из промежутка $[a, b]$.

Под решением задачи (1), (2), как обычно, понимаем абсолютно непрерывную функцию $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ со свойством (2), удовлетворяющую соотношению (1) при почти всех t из $[a, b]$. Компоненты векторов из $\mathbb{R}^n$ всюду обозначаются нижними индексами.

Относительно линейного оператора l в уравнении (1) предполагаем, что он является $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительным в следующем смысле.

Определение 1. *Будем говорить, что при некоторых фиксированных* $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ *и* $\tau \in [a, b]$ *линейный оператор*

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L([a, b], \mathbb{R}^n) \tag{3}$$

является $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$*-положительным, если для любой непрерывной вектор-функции* $u = (u_k)_{k=1}^n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$*, компоненты* $(u_k)_{k=1}^n$ *которой для всех* $t \in [a, b]$ *и* $k = 1, 2, \ldots, n$ *удовлетворяют условию*

$$\sigma_k u_k(t) \ge 0, \tag{4}$$

при почти всех $t \in [a, b]$ *и всех* $k = 1, 2, \ldots, n$ *справедливо соотношение*

$$\sigma_k (l_k u)(t) \operatorname{sign}(t - \tau) \ge 0.$$

***Замечание* 1.** Можно показать, что из одной только $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительности линейного оператора $l : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L([a, b], \mathbb{R}^n)$ вытекает его непрерывность, и, таким образом, требование ограниченности $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ $\ldots, \sigma_n; \tau)$-положительного оператора l в уравнении (1) является излишним.

Указанный факт вытекает из общей теоремы 2 [3] о непрерывности аддитивного оператора, преобразующего некоторый воспроизводящий конус в нормальный (см. также теорему 2.3 в [4]). Применимость теоремы из [3] обеспечивается свойством нормальности конуса вектор-функций $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с компонентами, всюду на $[a, b]$ удовлетворяющими неравенствам (4). Нормальность этого конуса легко устанавливается аналогично тому, как это делается в случае конуса непрерывных скалярных неотрицательных функций на ограниченном отрезке $[a, b]$.

3. Обозначения. В работе используются следующие обозначения.

1. $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$.

2. Если $x = (u_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, то $|x|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |x_j|$.

---

[1] См. замечание 1.

3. $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных функций $[a, b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$C([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \max_{s \in [a, b]} |u(s)|_\infty.$$

4. $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ — подмножество $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, состоящее из функций u, удовлетворяющих условию (2).

5. $B_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство ограниченных функций $u: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ со свойством (2), наделенное нормой

$$B_\tau([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \sup_{s \in [a, b]} |u(s)|_\infty.$$

Аналогично определяется банахово пространство $B([a, b], \mathbb{R}^n)$ всех ограниченных функций из $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$.

6. $L([a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство суммируемых вектор-функций $[a, b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$L([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \int_a^b |u(s)|_\infty\, ds.$$

7. $r(A)$ — спектральный радиус ограниченного линейного оператора A.

4. Однозначная разрешимость задачи (1), (2) с $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительным оператором l. Зафиксировав некоторое произвольное $y_0 \in C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$, введем в рассмотрение последовательность функций[2]

$$y_k(t) := \int_\tau^t (ly_{k-1})(s)\, ds, \qquad t \in [a, b], \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Очевидно включение

$$\{ y_k \mid k \geq 0 \} \subset C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n). \tag{6}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что линейный оператор $l = (l_k)_{k=1}^n$ в уравнении (1) является $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительным. Пусть, кроме того, найдутся такие число $\rho \in (1, +\infty)$ и функция $y_0 \in C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$, что при некотором $k \geq 0$ все компоненты $(y_{k,j})_{j=1}^n$ соответствующей вектор-функции y_k абсолютно непрерывны[3] и удовлетворяют условиям*

$$\sigma_j y_{k,j}(t) > 0, \quad t \in [a, b] \setminus \{\tau\}, \tag{7}$$

а также для любого $m \geq 0$ при всех $j = 1, 2, \ldots, n$ и почти всех t из $[a, b]$ выполнены дифференциальные неравенства

$$\sigma_j \left[y'_{k,j}(t) - \rho (l_j y_{k+m})(t) \right] \operatorname{sign}(t - \tau) \geq 0. \tag{8}$$

---

[2] См. п. 3, обозначение 4.

[3] При $k \geq 1$, в силу теоремы Лебега, абсолютная непрерывность функций $y_{k,1}, y_{k,2}, \ldots, y_{k,n}$ очевидна из (5), поскольку оператор l, по предположению, преобразует непрерывные функции в суммируемые.

Тогда начальная задача (1), (2) *имеет лишь тривиальное решение, а соответствующая неоднородная задача*

$$u'(t) = (lu)(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \tag{9}$$

$$u(\tau) = c \tag{10}$$

имеет единственное решение $u(\cdot)$ *при произвольных векторе* $c \in \mathbb{R}^n$ *и суммируемой функции* $f \in L([a, b], \mathbb{R}^n)$. *Это решение, кроме того, представимо в виде равномерно сходящегося на* $[a, b]$ *функционального ряда*

$$u(t) = q_c(t) + \int_\tau^t (lq_c)(s)ds + \int_\tau^t l\left(\int_\tau^{\cdot} (lq_c)(\sigma)d\sigma\right)(s)ds + \ldots, \quad t \in [a, b], \tag{11}$$

в котором, по определению,

$$q_c(t) := c + \int_\tau^t f(s)ds, \quad t \in [a, b]. \tag{12}$$

Если же при всех $j = 1, 2, \ldots, n$ *и* t *из* $[a, b]$ *выполняются неравенства*

$$\sigma_j\left[c_j + \int_\tau^t f_j(s)ds\right] \geq 0, \tag{13}$$

то компоненты $(u_j)_{j=1}^n$ *единственного решения* $u(\cdot)$ *неоднородной задачи* (9), (10) *удовлетворяют условиям*

$$\sigma_j u_j(t) \geq 0, \quad t \in [a, b], \quad 1 \leq j \leq n. \tag{14}$$

При $k = 0$ и $m = 0$ из теоремы 1, доказательству которой посвящен п. 6, непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть линейный оператор* l *в уравнении* (1) $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-*положителен. Допустим также, что найдутся некоторые число* $\rho \in (1, +\infty)$ *и абсолютно непрерывная функция* $z = (z_j)_{j=1}^n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, *для которых*

$$z_j(\tau) = 0, \quad \sigma_j z_j(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \setminus \{\tau\}, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{15}$$

и, кроме того, при почти всех t *из* $[a, b]$ *и каждом* $j = 1, 2, \ldots, n$ *выполнены дифференциальные неравенства*

$$\sigma_j\left[z_j'(t) - \rho(l_j z)(t)\right]\operatorname{sign}(t - \tau) \geq 0. \tag{16}$$

Тогда начальная задача (1), (2) *имеет лишь тривиальное решение, а соответствующая неоднородная задача* (9), (10) — *единственное решение* $u(\cdot)$ *при произвольных векторе* $c \in \mathbb{R}^n$ *и функции* $f \in L([a, b], \mathbb{R}^n)$. *Кроме того, это решение представимо в виде равномерно сходящегося ряда* (11).

Если же для вектора c *и функции* f *в* (9), (10) *при всех* $j = 1, 2, \ldots, n$ *и* t *из* $[a, b]$ *имеют место соотношения* (13), *то из справедливости для некоторого из решений дифференциального неравенства* (16) *условия* (15) *следует, что компоненты* $(u_j)_{j=1}^n$ *единственного решения* $u(\cdot)$ *задачи* (9), (10) *удовлетворяют неравенствам* (14).

Доказательство. Поскольку (16) является частным случаем дифференциального неравенства (8) при $k = 0$, $m = 0$ и $z = y_0$, утверждение теоремы 2 является непосредственным следствием теоремы 1.

***Замечание* 2.** Как видно из приведенного ниже примера 1, условие (16) и, следовательно, условие (8) неулучшаемы в том смысле, что их выполнения, вообще говоря, нельзя предполагать с $\rho = 1$.

***Пример* 1.** Рассмотрим скалярное функционально-дифференциальное уравнение

$$u'(t) = \frac{2\sigma(t-\tau)}{(\theta-\tau)^2}u(\theta), \quad t \in [a, b], \tag{17}$$

где $\sigma \in \{-1, 1\}$, а τ и θ — две фиксированные, различные точки из промежутка $[a, b]$. Легко видеть, что линейный оператор

$$C([a, b], \mathbb{R}) \ni u(\cdot) \mapsto lu := \frac{2\sigma}{(\theta-\tau)^2}(\cdot - \tau)u(\theta), \tag{18}$$

заданный выражением в правой части (17), является $(\sigma; \tau)$-положительным в смысле определения 1, т. е. из справедливости для функции $u \in C([a, b], \mathbb{R})$ соотношения

$$\sigma u(t) \geq 0, \quad t \in [a, b],$$

всегда следует, что

$$\sigma(lu)(t) \geq 0$$

при $t \geq \tau$ и

$$\sigma(lu)(t) \leq 0$$

при $t \leq \tau$.

Легко проверить, что функция u_λ вида

$$u_\lambda(t) = \lambda\sigma\left(\frac{t-\tau}{\theta-\tau}\right)^2, \quad t \in [a, b],$$

где λ — произвольная отличная от нуля постоянная, является нетривиальным решением однородной задачи Коши (17), (2). Отсюда, в частности, следует, что при $y = u_\lambda$ и $\rho = 1$ условие (16) выполнено в виде равенства. Ясно также, что при всех положительных λ имеет место соотношение

$$\sigma u_\lambda(t) > 0, \quad t \in [a, b] \setminus \{\tau\},$$

а это означает справедливость условия (15) при $y = u_\lambda$, $n = 1$ и $\sigma_1 = \sigma$.

Таким образом, утверждение упомянутой теоремы теряет силу, если в (16) допустить возможность равенства $\rho = 1$. Аналогичное замечание, разумеется, справедливо и для теоремы 1, поскольку последняя содержит в себе теорему 2 как частный случай.

***Замечание* 3.** Условие (13) выполнено, в частности, тогда, когда компоненты $(c_k)_{k=1}^n$ и $(f_k)_{k=1}^n$ вектора c и вектор-функции f при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ и почти всех $t \in [a, b]$ удовлетворяют неравенствам

$$\sigma_k c_k \geq 0 \tag{19}$$

и

$$\sigma_k f_k(t) \operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0. \tag{20}$$

Отсюда очевидно, что условия теорем 1 и 2 обеспечивают положительную обратимость ассоциированного с однородной задачей Коши (1), (2) линейного оператора

$$AC([a,b],\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \Lambda_{l,\tau}u := \begin{pmatrix} u' - lu \\ u(\tau) \end{pmatrix},$$

где $AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $[a,b] \to \to \mathbb{R}^n$. При этом положительность обратного оператора

$$\Lambda_{l,\tau}^{-1} : L([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to AC([a,b],\mathbb{R}^n)$$

понимается в том смысле, что для всех $c \in \mathbb{R}^n$ и $f \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ с компонентами, удовлетворяющими условиям (19) и (20), каждая из компонент $(u_k)_{k=1}^n$ единственного решения

$$u = \Lambda_{l,\tau}^{-1}\begin{pmatrix} f \\ c \end{pmatrix}$$

неоднородной задачи Коши (9), (10) удовлетворяет условию (4). Иными словами, оператор $\Lambda_{l,\tau}^{-1}$ определен и преобразует конус

$$\left\{ \begin{pmatrix} f \\ c \end{pmatrix} \in L([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \,\middle|\, (c_k)_{k=1}^n \text{ и } (f_k)_{k=1}^n \right.$$
$$\left. \text{удовлетворяют условиям (19), (20)} \right\}$$

в конус

$$\{ [u = (u_k)_{k=1}^n \in C([a,b],\mathbb{R}^n) \mid \text{для } (u_k)_{k=1}^n \text{ выполнены неравенства (4)} \}.$$

5. Вспомогательные утверждения. Доказательству теоремы 1 предпошлем некоторые вспомогательные утверждения.

***5.1. Интегральный вид задачи* (9), (10).** Очевидна следующая лемма.

Лемма 1. *Множества абсолютно непрерывных решений неоднородной задачи Коши* (9), (10) *и интегро-функционального уравнения*

$$u(t) = c + \int_{\tau}^{t} [(lu)(s) + f(s)]ds, \quad t \in [a,b], \tag{21}$$

совпадают.

Важно заметить, что при $c = 0$ уравнение (21) достаточно рассматривать в сужении на множество $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$ (см. обозначение 4 в п. 3), которое, как легко видеть, является замкнутым подпространством в $C([a,b],\mathbb{R}^n)$. Абсолютная непрерывность и свойство (10) для каждого из непрерывных решений u уравнения (21) очевидны из самого вида этого уравнения.

5.2. Метод пробных элементов. Здесь мы приведем формулировку одного утверждения, относящегося к так называемому методу пробных элементов оценки спектра линейного оператора, восходящему к М. Г. Крейну ([5]; см. также [6]).

Напомним, что элемент u некоторого конуса $K \subset X$ банахова пространства X называется квазивнутренним [7], если для любого $g \in K^* \setminus \{0\}$ выполняется строгое неравенство $g(u) > 0$. Символом K^* здесь обозначено множество всех тех функционалов g из X^*, которые принимают неотрицательные значения на элементах конуса K.

Метод пробных элементов примечателен тем, что в ряде случаев позволяет оценить спектральный радиус линейного оператора на основании сведений о значении последнего лишь на одном, подходящим образом выбранном элементе пространства. Для нужд настоящей статьи достаточна следующая теорема, являющаяся следствием теоремы 5.5 из [6].

Теорема 3. *Пусть X — банахово пространство, а A — вполне непрерывный линейный оператор на X, оставляющий инвариантным некоторый тотальный конус $K \subset X$, т. е. $A(K) \subset K$. Предположим также существование такого квазивнутреннего элемента w конуса K, что при некоторых положительном α и натуральном p справедливо соотношение*

$$\alpha w - A^p w \in K. \tag{22}$$

Тогда для спектрального радиуса $r(A)$ оператора A имеет место оценка

$$r(A) \leq \alpha^{1/p}. \tag{23}$$

Предположение тотальности конуса K в теореме 3 присутствует потому, что в противном случае K заведомо не содержит квазивнутренних элементов.

***Замечание* 4.** Для любого телесного конуса множества квазивнутренних и внутренних точек, как известно, совпадают. Необходимость рассмотрения именно квазивнутренних элементов нетелесного конуса в настоящей работе обусловлена тем, что в наделенном равномерной нормой банаховом пространстве $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ конус вектор-функций u с удовлетворяющими условиям (4) компонентами $(u_k)_{k=1}^n$ имеет пустую внутренность.

***5.3. Множество $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n_{\bar\sigma})$ и* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительные функционалы.** При фиксированных $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ положим

$$\bar\sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \tag{24}$$

и

$$\mathbb{R}^n_{\bar\sigma} := \sigma_1 \mathbb{R}_+ \times \sigma_2 \mathbb{R}_+ \times \ldots \times \sigma_n \mathbb{R}_+.$$

Определенное таким образом множество $\mathbb{R}^n_{\bar\sigma}$, очевидно, является замкнутым телесным конусом в $\mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение множество $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n_{\bar\sigma})$, по определению состоящее из всех функций u пространства $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, которые удовлетворяют условию (2) и принимают значения в конусе $\mathbb{R}^n_{\bar\sigma}$. Построенное множество $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n_{\bar\sigma})$, очевидно, является собственной частью $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Напомним следующее определение [5].

Определение 2. *Конус $K \subset X$ банахова пространства X называется миниэдральным, если определено такое однозначное отображение* $\sup : X \times X \to X$, *что из справедливости для элементов $\{x_1, x_2, z\} \subset X$ соотношений $z - x_1 \in K$ и $z - x_2 \in K$ всегда вытекает, что $z - \sup\{x_1, x_2\} \in K$.*

Иными словами, K миниэдрален, если при порождаемом им в пространстве X частичном упорядочении каждое конечное множество имеет точную верхнюю грань.

Лемма 2. *Множество* $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n_\sigma)$ *образует воспроизводящий и миниэдральный конус в банаховом пространстве* $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Из определения множества $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n_\sigma)$ очевидно, что оно образует нетривиальный замкнутый конус в пространстве $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$. Этот конус является миниэдральным, поскольку соответствующая порождаемому им в $C_\tau([a,b],\dot{\mathbb{R}}^n)$ частичному упорядочению точная верхняя грань $z = \sup\{\bar{u},\bar{\bar{u}}\}$ элементов $\{\bar{u},\bar{\bar{u}}\}\subset C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$, как легко проверить, задается формулой

$$z_k(t) = \begin{cases} \max\{\bar{u}_k(t),\bar{\bar{u}}_k(t)\}, & \text{если } \sigma_k = 1;\\ \min\{\bar{u}_k(t),\bar{\bar{u}}_k(t)\}, & \text{если } \sigma_k = -1,\end{cases}$$

где $t\in[a,b]$ и $k=1,2,\ldots,n$. Из указанного свойства также следует, что конус $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n_\sigma)$ — воспроизводящий (см. замечание 5).

Лемма 2 доказана.

Замечание 5. Миниэдральность заданного в банаховом пространстве X конуса K, как известно (см., например, [5]), дает возможность представить произвольный элемент $u\in X$ в виде разности его положительной и отрицательной частей, $u=\sup\{u,0\}-\sup\{-u,0\}$, и определить модуль $|u|$ этого элемента равенством

$$|u| := \sup\{u,0\} + \sup\{-u,0\}.$$

В случае конуса $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n_\sigma)$ в пространстве $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$ модуль $|u|$ функции u, очевидно, задается покомпонентным вычислением абсолютной величины: $|u| = (|u_k|)_{k=1}^n$.

Следующая лемма является основной при доказательстве теорем настоящей работы.

Лемма 3. *Произвольная непрерывная вектор-функция* $(z_j)_{j=1}^n : [a,b]\to\mathbb{R}^n$, *все компоненты* $(z_j)_{j=1}^n$ *которой удовлетворяют условию* (15), *является квазивнутренним элементом конуса* $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n_\sigma)$ *в пространстве* $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Доказательство этого утверждения опирается на приводимые ниже леммы. Для сокращения изложения предварительно введем определение.

Определение 3. *Будем говорить, что функционал* $g: X\to\mathbb{R}^n$, *где* X *означает одно из пространств* $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$, $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ *и* $B([a,b],\mathbb{R}^n)$, *является* $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$*-положительным, если из справедливости для всех компонент* $(u_k)_{k=1}^n$ *вектор-функции* $u\in X$ *условий* (14) *всегда следует неравенство*

$$g(u)\geq 0. \tag{25}$$

Приводимая ниже лемма 4 представляет собой естественный аналог теоремы Ф. Рисса [8] о представлении ограниченных линейных функционалов на $C([a,b],\mathbb{R})$ интегралами Римана – Стильтьеса для пространства непрерывных вектор-функций, обращающихся в нуль в заданной точке.

Лемма 4. *Любой ограниченный линейный функционал g на пространстве $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ представляется формулой вида*

$$C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u = (u_j)_{j=1}^n \mapsto g(u) := \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(t) dh_k(t), \tag{26}$$

где при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ функция $h_k: [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченное на $[a, b]$ изменение и непрерывна в точке τ.

Той же формулой (26) можно задать ограниченный функционал $\hat{g}$, являющийся естественным линейным расширением g на $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ с сохранением нормы. Если, кроме того, исходный функционал g является $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительным, то $\hat{g}$ также $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положителен.

Доказательство. Будем рассуждать по аналогии с известным доказательством теоремы Рисса [8] (см. также [9]) о структуре пространства $(C([a, b], \mathbb{R}))^*$.

Для каждого $s \in (a, b]$ положим

$$\eta_s(t) := \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [a, s] \setminus \{\tau\}; \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \tag{27}$$

Очевидно, что функции вида (27) и все возможные их конечные линейные комбинации ограничены на $[a, b]$.

Пусть G — непрерывное линейное продолжение функционала g на банахово пространство $B([a, b], \mathbb{R}^n)$ всех ограниченных функций $[a, b] \to \mathbb{R}^n$. Такое продолжение G, норма которого, кроме того, совпадает с нормой функционала g, существует в силу теоремы Хана – Банаха. Таким образом, для любой функции r из $B([a, b], \mathbb{R}^n)$ справедлива оценка

$$|G(r)| \leq \|g\| \sup_{t \in [a, b]} |r(t)|_\infty. \tag{28}$$

Здесь символом $|\cdot|_\infty$ обозначена ℓ^∞-норма в $\mathbb{R}^n$ (см. п. 3, обозначение 2). Очевидно, достаточно изучить случай, когда $\|g\| > 0$.

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $u = (u_k)_{k=1}^n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, обращающуюся в нуль в точке τ, и представим ее в виде

$$u = \overline{u} + \overline{\overline{u}}, \tag{29}$$

где

$$\overline{u}(t) := u(t)\eta_\tau(t), \qquad \overline{\overline{u}}(t) := u(t)\eta_{a+b-\tau}(a + b - t) \tag{30}$$

для любого t из $[a, b]$. Поскольку $u(\tau) = 0$, из (30) ясно, что функции $\overline{u}$ и $\overline{\overline{u}}$ непрерывны, причем $\overline{u}(\tau) = \overline{\overline{u}}(\tau) = 0$. Нетрудно видеть, что $\overline{u}\big|_{[a,\tau]} = u\big|_{[a,\tau]}$, $\overline{u}\big|_{[\tau,b]} = 0$ и, аналогично, $\overline{\overline{u}}\big|_{[a,\tau]} = 0$, $\overline{\overline{u}}\big|_{[\tau,b]} = u\big|_{[\tau,b]}$. Для доказательства последнего утверждения достаточно воспользоваться следующим легко проверяемым тождеством:

$$\eta_{a+b-\tau}(a + b - t) = 1 - \eta_\tau(t), \quad t \in [a, b]. \tag{31}$$

Зафиксируем некоторое произвольное положительное ε. Согласно теореме

Кантора функции u_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, равномерно непрерывны на $[a, b]$, и, следовательно, по заданному ε можно указать столь малое положительное δ, что при любом разбиении[4]

$$\begin{aligned} a =: \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \ldots < \bar{t}_{N-1} < \bar{t}_N := \tau =: \\ =: \bar{\bar{t}}_0 < \bar{\bar{t}}_1 < \ldots < \bar{\bar{t}}_{N-1} < \bar{\bar{t}}_N := b \end{aligned} \tag{32}$$

отрезка $[a, b]$ со свойством

$$\max_{1 \le \nu \le N-1} \max\left\{ \bar{t}_{\nu+1} - \bar{t}_\nu, \bar{\bar{t}}_{\nu+1} - \bar{\bar{t}}_\nu \right\} < \delta \tag{33}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место оценка

$$| u_k(t') - u_k(t'') | < \frac{\varepsilon}{\| g \|}, \tag{34}$$

как только t' и t'' принадлежат одному и тому же сегменту разбиения.

Рассмотрим произвольное такое разбиение и опеределим функцию $\bar{u}^{\#} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с компонентами $\left(\bar{u}_k^{\#}\right)_{k=1}^n$ вида

$$\begin{aligned} \bar{u}_k^{\#}(t) := \bar{u}_k(\bar{t}_1)\eta_{\min\{\bar{t}_1, \tau\}}(t) + \\ + \sum_{\nu=1}^{N-1} \bar{u}_k(\bar{t}_{\nu+1})\left[\eta_{\min\{\bar{t}_{\nu+1}, \tau\}}(t) - \eta_{\min\{\bar{t}_\nu, \tau\}}(t) \right], \quad t \in [a, b]. \end{aligned} \tag{35}$$

Множество значений функции (35) конечно, и, в частности, она является элементом пространства $B([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Из определения функции (27) ясно, что для произвольных $\{ t', t'' \} \subset [a, b]$, $t' < t''$,

$$\eta_{t''}(t) - \eta_{t'}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in (t', t''] \setminus \{\tau\}; \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \tag{36}$$

Кроме того, нетрудно проверить, что при произвольном $t \in [a, b]$ имеет место тождество

$$\eta_{\min\{t, \tau\}} = \eta_\tau \eta_t. \tag{37}$$

Следовательно, в силу (35) и (30) для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и $t \in (\bar{t}_\nu, \bar{t}_{\nu+1}] \setminus \{\tau\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, N-1$, справедливо равенство

$$\bar{u}_k^{\#}(t) = u_k(\bar{t}_{\nu+1}),$$

в то время как при $t \in [a, \bar{t}_1] \setminus \{\tau\}$

$$\bar{u}_k^{\#}(t) = u_k(\bar{t}_1).$$

Поскольку рассматриваемое разбиение (32) отрезка $[a, b]$ столь мелко, что выполняется неравенство (33), из приведенных выше равенств в силу (34) следует, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$\left| \bar{u}_k(t) - \bar{u}_k^{\#}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{\| g \|}. \tag{38}$$

---

[4] Достаточно рассмотреть случай, когда $a < \tau < b$. Если же τ совпадает с одним из концов отрезка $[a, b]$, рассуждения имеют незначительное отличие.

Зададим теперь функции $\overline{h}_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, при каждом $k = 1, 2, \dots, n$ пола гая $\overline{h}_k(a) := 0$ и

$$\overline{h}_k(t) := \eta_\tau(t) G\left(\eta_{\min\{t,\tau\}} e_k\right) \tag{39}$$

для $t \in (a, b]$, где e_k обозначает k-й столбец единичной матрицы. Величина в правой части (39) определена для всех $t \in (a, b]$ и $k = 1, 2, \dots, n$, поскольку значение функционала G там вычисляется на элементах пространства $B([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Аналогично изложенному в [8] (§ 50), можно показать, что функции $\overline{h}_1$, $\overline{h}_2, \dots, \overline{h}_n$ имеют ограниченное изменение на промежутке $[a, b]$.

Легко видеть, что значение линейного функционала G на вектор-функции $\overline{u}^\# : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с компонентами (35) вычисляется по формуле

$$G\left(\overline{u}^\#\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{u}_k(\overline{t}_1)\overline{h}_k(\overline{t}_1) + \sum_{\nu=1}^{N-1} \overline{u}_k(\overline{t}_\nu)\left[\overline{h}_k(\overline{t}_{\nu+1}) - \overline{h}_k(\overline{t}_\nu)\right]\right). \tag{40}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно функцию $\overline{u}^\#$ представить в виде

$$\overline{u}^\# = \eta_\tau \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{u}_k(\overline{t}_1)\eta_{\overline{t}_1} + \sum_{\nu=1}^{N-1} \overline{u}_k(\overline{t}_\nu)\left[\eta_{\overline{t}_{\nu+1}} - \eta_{\overline{t}_\nu}\right]\right) e_k, \tag{41}$$

применить к обеим частям (41) функционал G, воспользоваться свойством (37) функций (27) и учесть определение (39) функций $\overline{h}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Поскольку в разбиении (32) имеем $\overline{t}_0 = a$, и, по построению, $\overline{h}_k(a) = 0$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$, равенство (40) можно записать в виде

$$G\left(\overline{u}^\#\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{u}_k(\overline{t}_\nu)\left[\overline{h}_k(\overline{t}_{\nu+1}) - \overline{h}_k(\overline{t}_\nu)\right]. \tag{42}$$

Из неравенств (38) следует, что для равномерной нормы разности $\overline{u} - \overline{u}^\#$ имеет место оценка

$$\sup_{t \in [a,b]} \left|\overline{u}(t) - \overline{u}_k^\#(t)\right|_\infty \le \frac{\varepsilon}{\|g\|},$$

и поэтому, в силу (28),

$$\left|G\left(\overline{u} - \overline{u}^\#\right)\right| \le \varepsilon. \tag{43}$$

Поскольку $\overline{u} \in C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$, а значения функционалов g и G на элементах пространства $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ совпадают, равенство (42) дает возможность пред ставить оценку (43) в виде

$$\left| g(\overline{u}) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{u}_k(t_\nu)\left[\overline{h}_k(\overline{t}_{\nu+1}) - \overline{h}_k(\overline{t}_\nu)\right]\right| \le \varepsilon. \tag{44}$$

Построенные выше функции $\overline{h}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеют на $[a, b]$ ограничен ное изменение, и, следовательно, содержащиеся в последнем соотношении ин тегральные суммы

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{u}_k(t_\nu)\left[\overline{h}_k(\overline{t}_{\nu+1}) - \overline{h}_k(\overline{t}_\nu)\right]$$

сколь угодно близки к соответствующим интегралам Стильтьеса

$$\int\limits_a^b \overline{u}_k(t)\,d\overline{h}_k(t),$$

как только ε достаточно мало. Это свидетельствует о том, что для произвольной функции u из $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$g(\overline{u}) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\int\limits_a^b \overline{u}_k(t)\,d\overline{h}_k(t), \tag{45}$$

где $\overline{u}$ обозначает соответствующую функцию (30).

Таким образом, ввиду разложения (29) произвольной функции из $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$, для получения искомого интегрального представления ограниченного линейного функционала $g: C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ теперь остается рассмотреть значения такого функционала на непрерывных вектор-функциях, обращающихся в нуль на отрезке $[a,\tau]$.

По аналогии с формулой (35), при каждом $k=1,2,\ldots,n$ положим

$$\overline{\overline{u}}{}_k^{\#}(t) \;:=\; \left(\overline{\overline{u}}_k\big(\overline{\overline{t}}_1\big)\eta_{\overline{\overline{t}}_1}(t) + \sum_{\nu=1}^{N-1}\overline{\overline{u}}_k\big(\overline{\overline{t}}_{\nu+1}\big)\Big[\eta_{\overline{\overline{t}}_{\nu+1}}(t)-\eta_{\overline{\overline{t}}_\nu}(t)\Big]\right)\eta_{a+b-\tau}(a+b-t),$$
$$t\in[a,b]. \tag{46}$$

Формулами (46) задается кусочно-постоянная вектор-функция $\overline{\overline{u}}{}^{\#}:[a,b]\to$ $\to\mathbb{R}^n$, обращающаяся в нуль во всех точках отрезка $[a,\tau]$. Из (46) в силу тождества (31) следует, что для всех $k=1,2,\ldots,n$ и $t\in\big(\overline{\overline{t}}_\nu,\overline{\overline{t}}_{\nu+1}\big]\setminus\{\tau\}$, $\nu=1,2,\ldots,N-1$, справедливо равенство

$$\overline{\overline{u}}{}_k^{\#}(t) \;=\; u_k\big(\overline{\overline{t}}_{\nu+1}\big), \tag{47}$$

в то время как при $t\in\big[\tau,\overline{\overline{t}}_1\big]\setminus\{\tau\}$ имеем

$$\overline{\overline{u}}{}_k^{\#}(t) \;=\; u_k\big(\overline{\overline{t}}_1\big). \tag{48}$$

Зафиксируем произвольное положительное ε. Аналогично полученному выше для функции $\overline{u}$ неравенству (38), на основании (30), (47) и (48) заключаем, что при любых $t\in[a,b]$ и $k=1,2,\ldots,n$

$$\left|\overline{\overline{u}}_k(t)-\overline{\overline{u}}{}_k^{\#}(t)\right| \;<\; \frac{\varepsilon}{\|g\|},$$

как только разбиение (32) отрезка $[a,b]$ удовлетворяет условию (33) с достаточно малым числом δ. Отсюда в силу (28) следует неравенство

$$\left|G\big(\overline{\overline{u}}-\overline{\overline{u}}{}^{\#}\big)\right| \;\le\; \varepsilon, \tag{49}$$

где G обозначает упоминавшееся выше линейное распространение функционала g на пространство $B([a,b],\mathbb{R}^n)$. Поскольку функция $\overline{\overline{u}}$ принадлежит пространству $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$, а $G\big|_{C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)}=g$, подобно (44), неравенство (49) можно записать в виде

$$\left| g(\overline{\overline{u}}) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{\overline{u}}_k(\bar{\bar{t}}_\nu)\left[\overline{\overline{h}}_k(\bar{\bar{t}}_{\nu+1}) - \overline{\overline{h}}_k(\bar{\bar{t}}_\nu)\right]\right| \le \varepsilon, \tag{50}$$

где $\overline{\overline{h}}_k$ — некоторый аналог определенной выше функции $\overline{h}_k$, соответствующий случаю подпространства функций, обращающихся в нуль на $[a, \tau]$. Более точно, фигурирующая в (50) функция ограниченного изменения $\overline{\overline{h}}_k$ строится следующим образом: для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ полагаем

$$\overline{\overline{h}}_k(\tau) := 0 \tag{51}$$

и

$$\overline{\overline{h}}_k(t) := [1 - \eta_\tau(t)]\, G(\eta_t(1 - \eta_\tau)e_k), \qquad t \in [a, b]. \tag{52}$$

Тогда, аналогично (42), справедливо соотношение

$$G\left(\overline{\overline{u}}^{\#}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{N-1} \overline{\overline{u}}_k(\bar{\bar{t}}_\nu)\left[\overline{\overline{h}}_k(\bar{\bar{t}}_{\nu+1}) - \overline{\overline{h}}_k(\bar{\bar{t}}_\nu)\right],$$

ввиду которого (49) можно представить в виде (50).

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, в силу произвольности ε из (50) выводим равенство

$$g(\overline{\overline{u}}) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b \overline{\overline{u}}_k(t)\, d\overline{\overline{h}}_k(t). \tag{53}$$

Соединяя (45) и (53) и принимая во внимание представление (29) произвольной функции u из $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$, приходим к равенству

$$g(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b \overline{u}_k(t)\, d\overline{h}_k(t) + \int_a^b \overline{\overline{u}}_k(t)\, d\overline{\overline{h}}_k(t) \right). \tag{54}$$

Согласно (30) функция $\overline{u}$ обращается в нуль на $[\tau, b]$, в то время как $\overline{\overline{u}}(t) = 0$ при $a \le t \le \tau$. По построению для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$\overline{h}_k\big|_{[\tau, b]} = 0, \qquad \overline{\overline{h}}_k\big|_{[a, \tau]} = 0. \tag{55}$$

Поэтому интегралы в (54), фактически, берутся в пределах от a до τ и от τ до b соответственно:

$$g(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^\tau \overline{u}_k(t)\, d\overline{h}_k(t) + \int_\tau^b \overline{\overline{u}}_k(t)\, d\overline{\overline{h}}_k(t) \right).$$

Кроме того, вновь в силу (55), каждый из упомянутых интегралов можно вычислять по функции $\overline{h}_k + \overline{\overline{h}}_k$, поскольку добавленное в функцию Стильтьеса новое слагаемое на промежутке интегрирования обращается в нуль. Следовательно, имеем равенство

$$g(u) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b [\overline{u}_k(t) + \overline{\overline{u}}_k(t)]\, d\left(\overline{h}_k(t) + \overline{\overline{h}}_k(t)\right),$$

которое в силу (29) означает, что

$$g(u) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(t)\, d\left(\overline{h}_k(t) + \overline{\overline{h}}_k(t)\right). \tag{56}$$

Заметим теперь, что, заменив значения функций $\overline{h}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, в точках их разрыва соответствующими левосторонними пределами, можно добиться, что полученная функция будет непрерывной слева на $(a, b]$. В силу свойств интеграла Стильтьеса смысл равенств (45) и (56) при этом сохранится. По тем же причинам функции $\overline{\overline{h}}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, в (56) можно считать непрерывными справа на $[\tau, b)$. Положим, наконец,

$$h_k(t) := \begin{cases} \overline{h}_k(t) & \text{при } t \in [a, \tau]; \\ \overline{\overline{h}}_k(t) + \lim_{s \to \tau+} \overline{h}_k(s) & \text{при } t \in (\tau, b]. \end{cases} \tag{57}$$

Так же, как функции $\overline{h}_k$ и $\overline{\overline{h}}_k$, функция h_k при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет ограниченное изменение на $[a, b]$. Кроме того, в силу (51), из (57) ясно, что она непрерывна в точке τ. Остается заметить, что интеграл Стильтьеса по функции $\overline{h}_k + \overline{\overline{h}}_k$ совпадает с интегралом по функции h_k. Таким образом, требуемое интегральное представление (26) функционала $g : C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ с непрерывной в точке τ функцией Стильтьеса получено. .

Аналогично изложенному в [8] (§ 50), можно показать, что построенные функции h_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеют свойство $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}_{[a,b]} h_k = \| g \|$, откуда следует, что задаваемый выражением в правой части (26) функционал $\hat{g} : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ является линейным продолжением g на $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, для которого $\| \hat{g} \| = \| g \|$.

Остается теперь установить $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительность естественного продолжения $\hat{g}$ линейного $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительного функционала $g : C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ на пространство $C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Предположим, что функционал g является $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительным в смысле определения 3. Пусть y — произвольная вектор-функция $[a, b] \to \mathbb{R}^n$ с непрерывными компонентами $(y_k)_{k=1}^n$, для всех $t \in [a, b]$ и $k = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяющими неравенствам

$$\sigma_k y_k(t) \geq 0. \tag{58}$$

Если при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнено равенство

$$y_k(\tau) = 0, \tag{59}$$

то $y \in C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$, и, следовательно, в силу $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительности g справедливо неравенство $g(y) \geq 0$. Поэтому имеет смысл рассматривать лишь тот случай, когда при некоторых k условие (59) не выполняется.

Выберем любое малое положительное δ_0, $0 < \delta_0 < \min\{\tau - a, b - \tau\}$[5], и для $\delta \in (0, \delta_0)$ введем непрерывную функцию $y^\delta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, положив $y^\delta(t) := y(t)$ при $t \in [a, b] \setminus [\tau - \delta, \tau + \delta]$ и определив y^δ на $[\tau - \delta, \tau + \delta]$ так, чтобы

[5] Здесь предполагается, что $\tau \notin \{a, b\}$; оставшиеся два случая рассматриваются аналогично с заменой интеграла $[\tau - \delta, \tau + \delta]$ одним из интегралов $[a, a + \delta]$ или $[b - \delta, b]$.

$$y^{\delta}(\tau) = 0. \tag{60}$$

Можно, в частности, задать $y^{\delta}(t)$ для $t \in [\tau-\delta, \tau+\delta]$ так, чтобы эта функция удовлетворяла условию (60) и была линейна на каждом из отрезков $[\tau-\delta, \tau]$ и $[\tau, \tau+\delta]$. Такая функция, очевидно, непрерывна. Кроме того, в силу (58) при всех $t \in [a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\delta \in (0, \delta_0)$ справедливы оценки

$$0 \le \sigma_k y_k^{\delta_0}(t) \le \sigma_k y_k^{\delta}(t). \tag{61}$$

Как было показано выше, рассматриваемый линейный функционал $g : C_{\tau}([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ задается формулой (26). Следовательно, имеет место равенство

$$\hat{g}(y) = \sum_{k=1}^{n} \int_{a}^{b} y_k(t)\, dh_k(t),$$

откуда в силу определения функции y^{δ}

$$\hat{g}(y) = g(y^{\delta}) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} \left[y_k(t) - y_k^{\delta} \right] dh_k(t). \tag{62}$$

Поскольку функционал g является $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительным, из (61) при $\delta < \delta_0$ следуют неравенства

$$g(y^{\delta}) \ge g\left(y^{\delta_0}\right) \ge 0,$$

и поэтому из (62) при произвольных $\delta \in (0, \delta_0)$ получаем оценку

$$\hat{g}(y) \ge g\left(y^{\delta_0}\right) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} \left[y_k(t) - y_k^{\delta} \right] dh_k(t). \tag{63}$$

С другой стороны, модуль второго слагаемого в правой части неравенства (63) оценивается сверху величиной вида $C\delta$, где в качестве C можно взять, например, постоянную

$$4 \sum_{k=1}^{n} \max_{t \in [a, b]} |y_k(t)| \operatorname{Var}_{[a, b]} h_k.$$

Поэтому при достаточно малых δ_0 из (63) следует неотрицательность числа $\hat{g}(y)$. Поскольку функция $y \in C\left([a, b], \mathbb{R}^n_{\sigma}\right)$ выбиралась произвольным образом, этим доказано последнее утверждение леммы.

Лемма 5. *При любых* $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ *норму* $\|g\|$ *произвольного* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$*-положительного*[6] *линейного функционала* $g : C_{\tau}([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *можно вычислить по формуле*

$$\|g\| = \sup \{ g(u) \mid u \in C_{\tau}([a, b], \mathbb{R}^n);\ 0 \le \sigma_k u_k(t) \le 1 \text{ при всех } t \in [a, b] \text{ и } 1 \le k \le n \}. \tag{64}$$

Кроме того, справедливо равенство

[6] См. определение 3.

$$\| g \| = \hat{g}(\bar{\sigma}), \tag{65}$$

где $\bar{\sigma}$ *обозначает вектор вида* (24), *а* $\hat{g}$ *— естественное линейное расширение функционала* g *на* $C([a, b], \mathbb{R}^n)$[7].

Доказательство. Пусть линейный функционал $g : C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ является $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительным.

Согласно лемме 2 конус $C_\tau\left([a, b], \mathbb{R}^n_{\bar{\sigma}}\right)$ пространства $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ миниэдрален, и, следовательно, для произвольной функции u из $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство [9]

$$g(u) \leq g(|u|),$$

где $|u|$ — модуль u (см. замечание 5). Выполнение содержащегося в формуле (64) условия

$$0 \leq \sigma_k u_k(t) \leq 1 \quad \text{при} \quad t \in [a, b] \quad \text{и} \quad 1 \leq k \leq n, \tag{66}$$

очевидно, означает принадлежность функции u пересечению конуса $C_\tau\left([a, b], \mathbb{R}^n_{\bar{\sigma}}\right)$ с замыканием единичного шара пространства $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$. Поэтому (см. [9], § 14.4) из $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительности функционала g вытекает, что число $\| g \|$ равно точной верхней грани значений g на элементах упомянутого множества, т. е. имеет место равенство (64).

Пусть теперь $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — произвольная функция из $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ с компонентами $(u_k)_{k=1}^n$, удовлетворяющими условиям (66). Вторую часть неравенства (66), очевидно, можно записать в виде

$$\sigma_k[\sigma_k - u_k(t)] \geq 0,$$

т. е. разность $\bar{\sigma} - u$ удовлетворяет условию вида (4). Согласно лемме 4 естественное линейное расширение $\hat{g} : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ функционала g на пространство $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ является $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительным. Следовательно, справедлива оценка

$$\hat{g}(\bar{\sigma} - u) \geq 0$$

или, что то же,

$$g(u) \leq \hat{g}(\bar{\sigma}), \tag{67}$$

поскольку значения линейных функционалов $\hat{g}$ и g на элементах из $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ совпадают.

Из соотношения (67) в силу (64) вытекает оценка

$$\| g \| \leq \hat{g}(\bar{\sigma}).$$

Поскольку $\| \hat{g} \| = \| g \|$, а значения линейного функционала на замыкании единичного шара не превышают его нормы, этим установлена справедливость равенства (65).

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Предположим, что* $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ *и некоторый линейный функционал* $g : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *является* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$*-положи-*

---

[7] См. лемму 4.

тельным. Тогда произвольное его линейное ограниченное продолжение на пространство $B([a, b], \mathbb{R}^n)$ *с сохранением нормы также* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$*-положительно.*

Доказательство. Будем рассуждать аналогично изложенному в [9] (§ 14.5).

Пусть $g: C([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ — $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительный линейный функционал, а G — произвольное его линейное распространение на $B([a, b], \mathbb{R}^n)$, для которого

$$\| G \| = \| g \|. \tag{68}$$

Выберем произвольную ненулевую функцию u из $B([a, b], \mathbb{R}^n)$, компоненты $(u_k)_{k=1}^n$ которой удовлетворяют условиям (4), введем обозначение

$$\Delta_k := \sup_{s \in [a, b]} \sigma_k u_k(s)$$

и для всех $t \in [a, b]$ и $k = 1, 2, \ldots, n$ положим

$$\overline{u}_k(t) := \sigma_k - \frac{u_k(t)}{\Delta},$$

где $\Delta := \max_{1 \le k \le n} \Delta_k$. Ясно, что $\Delta \neq 0$, ибо в противном случае из условия (4) вытекает тождество $u \equiv 0$.

Легко видеть, что заданная таким образом функция $\overline{u}: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ принадлежит пространству $B([a, b], \mathbb{R}^n)$, и, кроме того, для значений ее компонент $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и $t \in [a, b]$ имеют место неравенства

$$0 \le \sigma_k \overline{u}_k(t) \le 1. \tag{69}$$

Из (69) и (68) в силу равенства (28) (см. доказательство леммы 4) следует оценка

$$G(\overline{u}) \le \| G \|.$$

С другой стороны, несложно проверить, что вектор-функции u и $\overline{u}$ связаны соотношением

$$u = \Delta(\overline{\sigma} - \overline{u}),$$

где символом $\overline{\sigma}$, как и прежде, обозначен постоянный вектор (24). Следовательно,

$$G(u) = \Delta[G(\overline{\sigma}) - G(\overline{u})] = \Delta[g(\overline{\sigma}) - G(\overline{u})]. \tag{70}$$

В силу леммы 5 из (68) вытекает равенство $\| G \| = g(\overline{\sigma})$. Тогда из (70) следует соотношение

$$G(u) = \Delta[\| G \| - G(\overline{u})] \ge 0,$$

что ввиду произвольности функции u из $B([a, b], \mathbb{R}^n)$ доказывает $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительность функционала G.

Лемма 6 доказана.

Из лемм 4 – 6 вытекает следующее утверждение.

Лемма 7. *Непрерывный линейный функционал вида* (26), *где скалярные функции* $\{h_k \mid k=1,2,\ldots,n\}$ *имеют на* $[a, b]$ *ограниченное изменение и таковы, что* $\sigma_k h_k$ *монотонно не убывает при всех* $k = 1, 2, \ldots, n$, *является* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$*-положительным.*

Обратно, любой $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$*-положительный ограниченный*[8] *линейный функционал на пространстве* $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ *можно представить в виде* (26), *где при каждом* $k = 1, 2, \ldots, n$ *функция* $\sigma_k h_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ *имеет ограниченное изменение, не убывает на отрезке* $[a, b]$ *и является непрерывной в точке* τ.

Доказательство. Предположим, что в формуле (26) каждая из функций h_k имеет ограниченное изменение, а $\sigma_k h_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, монотонно не убывают на промежутке $[a, b]$. Согласно определению интеграла Римана – Стильтьеса непрерывной функции $u_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ по функции $h_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, величина

$$\int_a^b u_k(t) dh_k(t) \tag{71}$$

представляет собой не зависящее от способа выбора промежуточных точек $\xi_\nu \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$, $\nu = 1, 2, \ldots, N-1$, предельное значение интегральных сумм

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} u(\xi_\nu)[h(t_{\nu+1}) - h(t_\nu)] \tag{72}$$

при неограниченном измельчении разбиения

$$a =: t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N := b \tag{73}$$

отрезка $[a, b]$. Поскольку $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1; 1\}$, ясно, что величину (72) можно представить в виде

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} \sigma_k u(\xi_\nu) \sigma_k [h(t_{\nu+1}) - h(t_\nu)].$$

Таким образом, если функции u_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют неравенствам (4), то из неотрицательности всех разностей $\sigma_k[h(t_{\nu+1}) - h(t_\nu)]$ следует, что интегральная сумма (72) также неотрицательна, каковы бы не были разбиение (73) и промежуточные точки $\xi_\nu \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$, $\nu = 1, 2, \ldots, N-1$. Переходя к пределу, устремляя к нулю соответствующую разбиению (73) величину $\max_{1 \le \nu \le N-1}[t_{\nu+1} - t_\nu]$, получаем неравенство (25).

Предположим теперь, что некоторый непрерывный линейный функционал g на пространстве $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ является $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительным в смысле определения 3, т. е. что из справедливости для компонент $(u_k)_{k=1}^n$ вектор-функции $u \in C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ условия (4) всегда следует неравенство (25). Согласно лемме 4, любой такой функционал задается формулой (26), в которой h_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — непрерывные в точке τ функции с ограниченным изменением, определяемые равенствами (39).

Функции $\sigma_k h_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, являются монотонно неубывающими. Действительно, рассмотрим естественное линейное расширение $\hat{g}$ функционала g

[8] Условие ограниченности заданного на пространстве $C_\tau([a, b], \mathbb{R}^n)$ $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительного линейного функционала g здесь можно опустить по тем же причинам, ввиду которых в п. 2 может быть опущено условие непрерывности $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительного оператора $l: C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L([a, b], \mathbb{R}^n)$ (см. замечание 1, п. 2).

на пространство $C([a,b],\mathbb{R}^n)$. В силу леммы 4 такое расширение определено и $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$-положительно. Далее, согласно лемме 6, произвольное непрерывное линейное расширение G функционала $\hat{g}$ на пространство $B([a,b],\mathbb{R}^n)$ всех ограниченных функций $[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющее ту же норму $\|G\|=\|\hat{g}\|$, также удовлетворяет условию $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$-положительности. Функции (27), очевидно, удовлетворяют соотношениям

$$\eta_{s'}(t) \le \eta_{s''}(t), \quad t\in[a,b], \tag{74}$$

при $s'<s''$. Наконец, поскольку значения функций h_k в точках интервала $(a,b]$ задаются равенствами (39), где $\overline{h}_k$ и $\overline{\overline{h}}_k$ определены соответственно формулами (39) и (52), в силу $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$-положительности функционала G заключаем, что каждая из h_k, $k=1,2,\ldots,n$, монотонно не убывает при $\sigma_k=1$ и монотонно не возрастает при $\sigma_k=-1$.

Действительно, для $t\in[a,\tau]$ в силу формулы (57), согласно которой при доказательстве леммы 4 строятся соответствующие функционалу g функции Стильтьеса h_k, $k=1,2,\ldots,n$, имеем

$$h_k(t) = \overline{h}_k(t), \tag{75}$$

где $\overline{h}_k$ определена равенством (39). Выберем произвольные $\{s',s''\}\subset[a,\tau]$, $s'<s''$, и рассмотрим разности

$$d_k(s',s'') := \overline{h}_k(s'') - \overline{h}_k(s'), \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Для этих величин, согласно (39), справедливы равенства

$$d_k(s',s'') = \eta_\tau(s'')G\big(\eta_{\min\{\tau,s''\}}e_k\big) - \eta_\tau(s')G\big(\eta_{\min\{\tau,s'\}}e_k\big), \quad k=1,2,\ldots,n,$$

откуда в силу свойства (37) функций (27) и линейности функционала G имеем

$$\sigma_k d_k(s',s'') = G(\sigma_k\eta_\tau[\eta_\tau(s'')\eta_{s''}-\eta_\tau(s')\eta_{s'}]e_k), \quad k=1,2,\ldots,n. \tag{76}$$

Поскольку $s''>s'$, из неотрицательности функций (27) и соотношений (74), (36) следует, что для выражения в квадратных скобках при всех t верна оценка

$$\eta_\tau(s'')\eta_{s''}(t)-\eta_\tau(s')\eta_{s'}(t) \ge \eta_\tau(s')[\eta_{s''}(t)-\eta_{s'}(t)] \ge 0.$$

Поэтому из (76), ввиду $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$-положительности функционала G, при произвольных $\{s',s''\}\subset[a,\tau]$, $s'<s''$, следует неравенство

$$\sigma_k d_k(s',s'') \ge 0,$$

что в силу (75) означает монотонность функций $\sigma_k h_k$, $k=1,2,\ldots,n$. Аналогично показывается, что упомянутые функции не убывают на отрезке $[\tau,b]$; для этого нужно воспользоваться формулами (57) и (52).

Лемма 7 доказана.

Перейдем теперь к доказательству леммы 3.

***Доказательство леммы* 3.** Пусть для компонент $(z_j)_{j=1}^n$ некоторой непрерывной вектор-функции $z=(z_j)_{j=1}^n:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ выполняются условия (15). Рассмотрим произвольный нетривиальный ограниченный линейный функционал $g: C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$, который является $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$-положительным, т. е. принимает неотрицательные значения на всех вектор-функциях u с компонентами $(u_j)_{j=1}^n$, удовлетворяющими неравенствам (4). В силу леммы 7 каждый такой функционал можно задать формулой (26), в которой непрерывные в точке τ функции h_k, $k=1,2,\ldots,n$, имеют на $[a,b]$ ограниченное изменение, а соответствующие функции $\sigma_k h_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, монотонно не убывают.

Поскольку, по предположению, $g \neq 0$, очевидно, что при некотором $k_0 \in \in \{1, 2, \ldots, n\}$ линейный функционал

$$C_\tau([a,b],\mathbb{R}) \ni y \mapsto \phi(y) := \int_a^b y(t)\,dh_{k_0}(t) \tag{77}$$

отличен от тождественно нулевого функционала. Функция h_{k_0} тогда, в частности, удовлетворяет условию

$$\sigma_{k_0}\left[h_{k_0}(b) - h_{k_0}(a)\right] > 0, \tag{78}$$

так как в случае, когда

$$h_{k_0}(b) = h_{k_0}(a),$$

выполненные при всех $\{s', s''\} \subset [a, b]$, $s' < s''$, и означающие монотонность функции $\sigma_{k_0} h_{k_0}$ неравенства

$$\sigma_{k_0}\left[h_{k_0}(s'') - h_{k_0}(s')\right] \geq 0$$

приводят к выводу, что функция h_{k_0} постоянна, и, следовательно, функционал (77) тривиален.

Зададим некоторое малое положительное число δ и рассмотрим значение функционала (77) на функции z_{k_0}. Этот функционал (σ_{k_0})-положителен в смысле определения 3, в то время как функция z_{k_0} удовлетворяет условию

$$\sigma_{k_0} z_{k_0}(t) \geq 0, \quad t \in [a, b].$$

Поэтому

$$\int_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} z_{k_0}(t)\,dh_{k_0}(t) \geq 0,$$

и, следовательно, имеем[9]

$$\phi(z_{k_0}) = \int_a^{\tau-\delta} z_{k_0}(t)\,dh_{k_0}(t) + \int_{\tau+\delta}^{b} z_{k_0}(t)\,dh_{k_0}(t) + \int_{t-\delta}^{\tau+\delta} z_{k_0}(t)\,dh_{k_0}(t) \geq$$

$$\geq \int_{[a,\tau-\delta]\cup[\tau+\delta,b]} z_{k_0}(t)\,dh_{k_0}(t). \tag{79}$$

Представим интеграл в правой части (79) пределом соответствующих интегральных сумм. Тогда из соотношения (79) вытекает неравенство

$$\phi(z_{k_0}) \geq \sum_{\nu=0}^{N-1} z_{k_0}(\bar{\xi}_\nu)\left[h_{k_0}(\bar{t}_{\nu+1}) - h_{k_0}(\bar{t}_\nu)\right] + \sum_{\nu=0}^{N-1} z_{k_0}(\bar{\bar{\xi}}_\nu)\left[h_{k_0}(\bar{\bar{t}}_{\nu+1}) - h_{k_0}(\bar{\bar{t}}_\nu)\right], \tag{80}$$

которое имеет место, как только величины $\max_{1\leq\nu\leq N-1}[\bar{t}_{\nu+1} - \bar{t}_\nu]$ и $\max_{1\leq\nu\leq N-1}[\bar{\bar{t}}_{\nu+1} - \bar{\bar{t}}_\nu]$ достаточно малы. Здесь выбраны некоторые разбиения

$$a =: \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \ldots < \bar{t}_{N-1} < \bar{t}_N := \tau - \delta$$

и

[9] Здесь считаем, что $\tau \notin \{a, b\}$. При $\tau = a$ и $\tau = b$ нужно рассматривать соответственно интервалы $[a, a+\delta]$ и $[b-\delta, b]$.

$$\tau+\delta =: \bar{\bar{t}}_0 < \bar{\bar{t}}_1 < \bar{\bar{t}}_2 < \ldots < \bar{\bar{t}}_{N-1} < \bar{\bar{t}}_N := b$$

соответственно отрезков $[a, \tau-\delta]$ и $[\tau+\delta, b]$, а в промежутках $(\bar{t}_\nu, \bar{t}_{\nu+1}]$ и $(\bar{\bar{t}}_\nu, \bar{\bar{t}}_{\nu+1}]$ заданы произвольные точки $\bar{\xi}_\nu$ и $\bar{\bar{\xi}}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, N-1$.

Из (15) вытекает, что при положительных δ число

$$m_\delta := \min_{s\in[a,b]\setminus(\tau-\delta,\,\tau+\delta)} \sigma_{k_0} z_{k_0}(s)$$

положительно. С учетом справедливых при всех $\nu = 0, 1, \ldots, N-1$ соотношений

$$\sigma_{k_0} z_{k_0}(\bar{\xi}_\nu) > 0, \qquad \sigma_{k_0} z_{k_0}(\bar{\bar{\xi}}_\nu) > 0$$

и

$$\sigma_{k_0}\left[h_{k_0}(\bar{t}_{\nu+1}) - h_{k_0}(\bar{t}_\nu)\right] \geq 0, \qquad \sigma_{k_0}\left[h_{k_0}(\bar{\bar{t}}_{\nu+1}) - h_{k_0}(\bar{\bar{t}}_\nu)\right] \geq 0$$

из (80) легко получить оценку

$$\phi(z_{k_0}) \geq m_\delta \sigma_{k_0} \sum_{\nu=0}^{N-1}\left[h_{k_0}(\bar{t}_{\nu+1}) - h_{k_0}(\bar{t}_\nu)\right] + m_\delta \sigma_{k_0} \sum_{\nu=0}^{N-1}\left[h_{k_0}(\bar{\bar{t}}_{\nu+1}) - h_{k_0}(\bar{\bar{t}}_\nu)\right],$$

т. е.

$$\phi(z_{k_0}) \geq \sigma_{k_0}\left[h_{k_0}(\tau-\delta) - h_{k_0}(a) + h_{k_0}(b) - h_{k_0}(\tau+\delta)\right] m_\delta. \tag{81}$$

Лемма 7 утверждает, что функцию Стильтьеса h_{k_0} можно взять непрерывной в точке τ. Поэтому при таком выборе h_{k_0} из неравенства (78) следует

$$\sigma_{k_0}\left[h_{k_0}(b) - h_{k_0}(a) + h_{k_0}(\tau-\delta) - h_{k_0}(\tau+\delta)\right] > 0, \tag{82}$$

как только δ достаточно мало. В силу положительности величины m_δ, из соотношений (81) и (82) при достаточно малых положительных δ следует положительность числа $\phi(z_{k_0})$. Поскольку рассматриваемый линейный функционал g задается формулой (26), отсюда с учетом (77) следует неравенство

$$g(z) > 0. \tag{83}$$

Таким образом, мы установили, что, при выполнении для компонент функции z условий (15), для произвольного нетривиального $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-положительного функционала $g: C_\tau([a,b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ имеет место неравенство (83). Этим показано, что z является квазивнутренним элементом конуса $C_\tau([a,b], \mathbb{R}^n_\sigma)$.

Лемма 3 доказана.

6. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим отображение $I_{\tau,l}$, определенное формулой

$$C_\tau([a,b], \mathbb{R}^n) \ni u \mapsto I_{\tau,l} u := \int_\tau^{\cdot} (lu)(s)\,ds. \tag{84}$$

Легко видеть, что $I_{\tau,l}$ является линейным оператором, преобразующим пространство $C_\tau([a,b], \mathbb{R}^n)$ вновь в $C_\tau([a,b], \mathbb{R}^n)$. Этот оператор вполне непрерывен [10].

Покажем, что в принятых предположениях спектр оператора $I_{\tau,l}$ содержится в ρ^{-m-1}-окрестности нуля.

Действительно, свойство $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительности оператора l (см. определение 1) гарантирует, что соответствующий оператор $I_{\tau,l}$ оставляет инвариантным множество $C_\tau\big([a,b], \mathbb{R}^n_\sigma\big)$, которое в силу леммы 2 является конусом в банаховом пространстве $C_\tau\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$. Согласно лемме 3 функция y_k, о которой идет речь в доказываемой теореме, является квазивнутренним элементом конуса $C_\tau\big([a,b], \mathbb{R}^n_\sigma\big)$. Для нее и для функции y_{m+k}, согласно условию (8), справедливы соотношения

$$\sigma_j\left[y'_{k,j}(s) - \rho(l_j y_{m+k})(s)\right]\operatorname{sign}(s-\tau) \geq 0, \quad s \in [a,b], \quad 1 \leq j \leq n. \tag{85}$$

Интегрируя обе части соотношений (85) в пределах от τ до произвольно заданного $t \in [a,b]$ и принимая во внимание (6), получаем неравенства

$$\sigma_j\left[y_{k,j}(t) - \rho\int_\tau^t (l_j y_{m+k})(s)\,ds\right] \geq 0, \quad t \in [a,b].$$

На основании определения (5) последовательности $\{y_k \mid k \geq 0\}$ и определения (84) оператора $I_{\tau,l}$ заключаем, что последняя система неравенств означает включение

$$\rho^{-1}y_k - I_{\tau,l}^{m+1}y_k \in C_\tau\big([a,b], \mathbb{R}^n_\sigma\big), \quad t \in [a,b]. \tag{86}$$

Таким образом, к оператору $I_{\tau,l}$ можно применить теорему 3 с $X = C_\tau\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$, $K = C_\tau\big([a,b], \mathbb{R}^n_\sigma\big)$ и $p = m+1$, поскольку в силу (86) условия этой теоремы выполнены на элементе $w = y_k$ с константой $\alpha = \rho^{-1}$. Упомянутая теорема позволяет утверждать, что спектральный радиус $r(I_{\tau,l})$ оператора $I_{\tau,l}$ в пространстве $C_\tau\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$ удовлетворяет неравенству

$$r(I_{\tau,l}) \leq \frac{1}{\rho^{m+1}}$$

и, значит, является числом, строго меньшим единицы (напомним, что в условии теоремы $\rho > 1$). Это, как известно, обеспечивает равномерную на $[a, b]$ сходимость ряда

$$u_0 = q_0 + I_{\tau,l}q_0 + I_{\tau,l}^2 q_0 + \ldots \tag{87}$$

к единственному решению u_0 уравнения

$$u_0(t) = \int_\tau^t [(lu_0)(s) + f(s)]\,ds, \quad t \in [a,b], \tag{88}$$

или, что равносильно (см. лемму 1), к единственному решению „полуоднородной" задачи Коши

$$u_0'(t) = (lu_0)(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{89}$$

$$u_0(\tau) = 0. \tag{90}$$

Здесь, как и в формулировке теоремы, функция q_0 задается формулой (12), т. е.

$$q_0(t) = \int_\tau^t f(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Заметим, что сформулированное утверждение о задаче (89), (90) имеет место при произвольных f из $L([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим теперь неоднородную задачу Коши (9), (10). Если u — решение задачи (9), (10), то функция

$$u_0(t) := u(t) - c, \quad t \in [a,b],$$

очевидно, является решением уравнения

$$u_0(t) = \int_\tau^t (lu_0)(s)ds + \int_\tau^t [f(s) + (lc)(s)]ds, \quad t \in [a,b]. \tag{91}$$

Поскольку равенство (91) примет вид (88), если в его правой части f заменить функцией $f - lc$ (это соответствует аналогичной замене в исходном функционально-дифференциальном уравнении (9)), из изложенного выше следует, что сумма ряда (11) представляет собой решение задачи (9), (10).

Таким образом, мы показали, что для единственного решения неоднородной задачи (9), (10) справедливо представление (11). Последнее же из утверждений теоремы вытекает из определения оператора (84), представления решения задачи (9), (10) в виде ряда (11) и того факта, что, в силу $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительности оператора l, соответствующий оператор $I_{\tau,l}$ оставляет инвариантным множество функций u, удовлетворяющих условию (4). Неравенство (13) равносильно справедливости для определенной формулой (12) функции q_c упомянутого условия (4).

Теорема доказана.

7. Задача Коши (9), (10) для уравнения с сильно $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительным оператором. В п. 4 отмечалось, что условия (8) и (16) неулучшаемы для $\rho \in (1, \infty)$. Устанавливаемые ниже теоремы 4 и 5, однако, показывают, что для достаточно обширного класса операторов $l: C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L([a,b],\mathbb{R}^n)$, являющихся, по сравнению с определением 1, $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительными в некотором более узком смысле, выполнение упомянутых условий можно предполагать и при $\rho = 1$; утверждающая часть теорем 1 и 2 при этом сохраняется без изменений.

Итак, будем рассматривать задачу (9), (10) в предположении, что оператор l из уравнения (9) сильно $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положителен в смысле следующего определения.

Определение 4. *Линейный оператор $l: C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L([a,b],\mathbb{R}^n)$ будем называть сильно $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительным, если из справедливости при всех $t \in [a,b]$ и $k = 1, 2, \ldots, n$ для компонент $(u_k)_{k=1}^n$ не равной тождественно нулю вектор-функции $u: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ неравенств (4) следует, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место соотношение*

$$\sigma_k (l_k u)(t) \operatorname{sign}(t - \tau) > 0. \tag{92}$$

***Пример* 2.** Несложно проверить, что одним из представителей описываемого определением 4 класса сильно $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительных операторов является отображение $l: C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L([a,b],\mathbb{R}^n)$, действие которого задано формулой

$$(lu)(t) = \sum_{\nu=1}^{m} B_\nu(t)\int_a^b Q_\nu(s)u(\gamma_\nu(s))ds, \qquad t \in [a,b], \tag{93}$$

где $B_\nu: [a,b] \to GL_n(\mathbb{R})$ и $Q_\nu: [a,b] \to GL_n(\mathbb{R})$ — матричнозначные функции с компонентами $(b_{\nu kj})_{k,j=1}^n$ и $(q_{\nu kj})_{k,j=1}^n$, для всех $\{k,j\} \subset \{1,2,\ldots,n\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$ и почти всех $t \in [a,b]$ удовлетворяющие условиям

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_r q_{\nu jr}(t) > 0 \tag{94}$$

и

$$\sigma_k b_{\nu kj}(t)\operatorname{sign}(t-\tau) > 0, \tag{95}$$

а $\gamma_\nu: [a,b] \to [a,b]$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, — некоторые измеримые преобразования отрезка $[a,b]$ в себя. Действительно, если для каждой из компонент $(u_k)_{k=1}^n$ вектор-функции u выполнены неравенства (4), то при всех $r = 1, 2, \ldots, n$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$ и $s \in [a,b]$

$$\sigma_r u_r(\gamma_\nu(s)) \geq 0. \tag{96}$$

Согласно (93) имеем равенство

$$\sigma_k(l_k u)(t)\operatorname{sign}(t-\tau) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_k b_{\nu kj}(t)\operatorname{sign}(t-\tau)\int_a^b \sum_{r=1}^{n} \sigma_r q_{\nu jr}(s)\sigma_r u_r(\gamma_\nu(s))ds,$$

откуда в силу (96), (94) и (95) следует справедливость для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и почти всех $t \in [a,b]$ неравенства (92).

7.1. Формулировка теоремы 5. В случае, когда линейное отображение l в (1), (9) принадлежит классу, описываемому определением 4, теорема 1 справедлива в усиленной форме.

Теорема 4. *Предположим, что линейный оператор* l *в уравнении* (1) *сильно* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$*-положителен. Пусть, кроме того, существует такая функция* $y_0 \in C_\tau([a,b], \mathbb{R}^n)$, *что при некотором* $k \geq 0$ *построенная по формуле* (5) *функция* y_k *абсолютно непрерывна*[10] *и удовлетворяет условию* (7), *а также для любого* $m \geq 0$ *при почти всех* t *из* $[a,b]$ *и каждом* $j = 1, 2, \ldots, n$ *выполнены дифференциальные неравенства*

$$\sigma_j\left[y'_{k,j}(t) - (l_j y_{k+m})(t)\right]\operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0. \tag{97}$$

Тогда начальная задача (1), (2) *имеет лишь тривиальное решение, а соответствующая неоднородная задача* (9), (10) *— единственное решение* $u(\cdot)$ *при произвольных векторе* $c \in \mathbb{R}^n$ *и функции* $f \in L([a,b], \mathbb{R}^n)$. *Это решение, кроме того, представимо в виде равномерно сходящегося ряда* (11), *в котором* q_c *означает функцию* (12).

Если же вектор c *и функция* f *в уравнении* (9) *удовлетворяют условию* (13), *то упомянутое решение* $u(\cdot)$ *имеет свойство* (14).

Это утверждение доказывается ниже, в п. 7.3. Здесь мы отметим только, что из теоремы 4 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Предположим, что* l *в уравнении* (1) *является сильно* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$*-положительным линейным оператором. Пусть, кроме того,*

[10] Как и в теореме 1, отметим, что при $k \geq 1$ абсолютная непрерывность функции y_k очевидна из формулы (5).

для некоторой функции $z \in C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющей условию* (15), *при почти всех* t *из* $[a, b]$ *и всех* $j = 1, 2, \ldots, n$ *выполнены дифференциальные неравенства*

$$\sigma_j\left[z_j'(t)-(l_j z)(t)\right] \geq 0.$$

Тогда однородная начальная задача (1), (2) *имеет лишь тривиальное решение, а соответствующая неоднородная задача* (9), (10) — *единственное решение* $u(\cdot)$ *при произвольных векторе* $c \in \mathbb{R}^n$ *и функции* $f \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$, *причем это решение представимо в виде равномерно сходящегося ряда* (11).

Если же вектор c *и функция* $f(\cdot)$ *в уравнении* (9) *удовлетворяют условию* (13), *то единственное решение* $u(\cdot)$ *задачи Коши* (9), (10) *имеет свойство* (14).

***Замечание* 6.** Как видно из примера 1 в п. 4, условие сильной $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n;\tau)$-положительности оператора l в теоремах 4 и 5 является существенным, и его нельзя заменить условием $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n;\tau)$-положительности оператора l, понимаемым в смысле определения 1.

Отметим, что рассмотренный в примере 1 оператор (18),

$$(lu)(t) := \frac{2\sigma(t-\tau)}{(\sigma-\tau)^2}u(\theta), \quad t\in[a, b],$$

будучи $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n;\tau)$-положительным, не является сильно $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительным, поскольку в этом случае

$$(lu)(t) = 0, \quad t\in[a,b],$$

всегда, когда $u(\theta)=0$.

7.2. Неразложимые операторы. Напомним определение одного важного понятия теории операторов на частично упорядоченных нормированных пространствах (см., например, [6]). В приводимой ниже общей форме это понятие, по-видимому, ввел В. Я. Стеценко [7].

Определение 5 [7]. *Оставляющий инвариантным конус* K *банахова пространства* X *линейный оператор* $A: X \to X$ *называется неразложимым, если из соотношения*

$$x-\alpha Ax\in K, \tag{98}$$

где $\alpha \in (0, +\infty)$, *а* $x \in K\setminus\{0\}$, *следует, что* x *является квазивнутренним*[11] *элементом конуса* K.

Известно (см., например, [6]), что наложение дополнительного условия неразложимости оператора A в теореме 3 позволяет заменить нестрогую оценку (23) строгим неравенством

$$r(A) < \alpha^{\frac{1}{p}}. \tag{99}$$

А именно, имеет место следующее утверждение ([6], теорема 5.6).

Теорема 6. *Пусть* X — *банахово пространство, а* A — *вполне непрерывный линейный оператор на* X, *оставляющий инвариантным некоторый тотальный конус* $K\subset X$, *т. е.* $A(K)\subset K$. *Пусть* w — *такая квазивнутренняя точка конуса* K, *что при некоторых* $\alpha\in(0,+\infty)$ *и* $p\in\mathbb{N}$ *разность*

$$\alpha w - A^p w$$

является квазивнутренним элементом конуса K.

[11] См. п. 5.2.

Тогда для спектрального радиуса $r(A)$ *оператора* A *имеет место оценка* (99).

Оказывается, что в условиях теорем 4 и 5 свойством, описываемым определением 4, обладает линейный оператор $I_{\tau,l}$, введенный в п. 6 формулой (84).

Лемма 8. *Для произвольного сильно* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$*-положительного линейного оператора* $l\colon C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L([a,b],\mathbb{R}^n)$ *соответствующий ему линейный оператор* (84), *действующий в пространстве* $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n)$, *является неразложимым*[12].

Доказательство. Согласно определению 5 и лемме 3 достаточно показать, что из справедливости для функции $u \in C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n_\sigma)$ соотношений

$$\sigma_k\left[u_k(t) - \alpha\int_\tau^t (l_k u)(s)\,ds\right] \geq 0, \qquad t \in [a,b], \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{100}$$

где число $\alpha \in (0, +\infty)$ не зависит от u, всегда следует, что u на самом деле удовлетворяет более сильному, чем (4), условию

$$\sigma_k u_k(t) > 0, \qquad t \in [a,b] \setminus \{\tau\}, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{101}$$

Действительно, допустим, что $u \in C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n_\sigma)$, т. е. для $(u_k)_{k=1}^n$ при всех t из $[a,b]$ выполнены условия (4), и, кроме того, $u(\tau) = 0$. В силу определения 4 сильной $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительности оператора для почти всех $t \in [a,b]$ справедливо соотношение (92). Следовательно, найдется некоторая суммируемая функция $\mu\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию

$$\mu(\tau) = 0; \quad \sigma_k\mu_k(t) > 0 \text{ для п. в. } t \in [a,b] \text{ и всех } k = 1,2,\ldots,n \tag{102}$$

и такая, что для п. в. $s \in [a,b]$ и всех $k = 1,2,\ldots,n$ выполнены неравенства

$$\sigma_k[(l_k u)(s)\operatorname{sign}(s-\tau) - \mu_k(s)] \geq 0. \tag{103}$$

Интегрируя обе части (103) в пределах от τ до произвольным образом заданного $t \geq \tau$, получаем

$$\sigma_k\left[\int_\tau^t (l_k u)(s)\,ds - \int_\tau^t \mu_k(s)\,ds\right] \geq 0, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Аналогично, при $t \leq \tau$ имеем

$$\sigma_k\left[\int_\tau^t (l_k u)(s)\,ds + \int_\tau^t \mu_k(s)\,ds\right] \geq 0, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

т. е. в обоих случаях

$$\sigma_k\left[\int_\tau^t (l_k u)(s)\,ds - \operatorname{sign}(t-\tau)\int_\tau^t \mu_k(s)\,ds\right] \geq 0, \qquad t \in [a,b], \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{104}$$

Таким образом, если компоненты $(u_k)_{k=1}^n$ функции u удовлетворяют условию (100), то на основании (104) можно утверждать, что имеет место оценка

[12] Относительно конуса $C_\tau([a,b],\mathbb{R}^n_\sigma)$.

$$\sigma_k\left[u_k(t)-\alpha\operatorname{sign}(t-\tau)\int_\tau^t \mu_k(s)\,ds\right] > 0, \quad t\in[a,b], \tag{105}$$

откуда в силу (102) вытекает требуемое свойство (101).

Лемма доказана.

7.3. Доказательство теорем 4 и 5. Рассуждениями, аналогичными приведенным в п. 6, можно показать, что в условиях теоремы 4 имеет место включение (86) с $\rho = 1$, и, более того,

$$y_k - I_{\tau,l}^{m+1} y_k \text{ является квазивнутренним элементом конуса } C_\tau\big([a,b],\mathbb{R}^n_\sigma\big). \tag{106}$$

Затем применим теорему 6 с $X = C_\tau\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$, $K = C_\tau\big([a,b],\mathbb{R}^n_\sigma\big)$, $A = I_{\tau,l}$ и $p = m+1$, условия которой в силу (106) выполнены на элементе $w = y_k$ с константой $\alpha = 1$. Упомянутая теорема позволяет утверждать, что для спектрального радиуса $r(I_{\tau,l})$ оператора $I_{\tau,l}$ в пространстве $C_\tau\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$ справедлива оценка

$$r(I_{\tau,l}) < 1,$$

откуда следует равномерная на $[a,b]$ сходимость ряда (87) и т. д. Для завершения доказательства теоремы 4 остается повторить рассуждения, содержащиеся во второй части доказательства теоремы 1.

Теорема 5 очевидным образом вытекает из теоремы 4.

Замечание 7. Полученные в настоящей статье утверждения дополняют результаты работы [2], где исследуются скалярные функционально-дифференциальные уравнения (9) с условием Коши (10) при $\tau = a$ и $\tau = b$.

Отметим, что и в скалярном случае установленные здесь достаточные условия однозначной разрешимости многомерной задачи Коши (9), (10) существенным образом отличаются от полученных в [2]. В частности, при $\tau = a$, $n = 1$ и $\sigma_1 = 1$ в теореме 2 допускается, что при некотором $\rho \in (1, +\infty)$ какое-либо из решений y дифференциального неравенства

$$y'(t) \ge \rho(ly)(t), \quad t\in[a,b], \tag{107}$$

удовлетворяет условиям

$$y(t) > 0, \quad t\in(a,b],$$

и

$$y(a) = 0,$$

в то время как в [2] предполагается строгая положительность на всем промежутке $[a,b]$ некоторого решения γ неравенства

$$\gamma'(t) \ge (l\gamma)(t), \quad t\in[a,b].$$

Как видно из примера 1, условие принадлежности константы ρ полуинтервалу $(1,+\infty)$ в неравенстве (107) существенно.

Для $\tau = a$ дифференциальные неравенства теоремы 5 и теоремы 1.1 из [2] в упомянутом выше скалярном случае совпадают (однако в указанных теоремах, по-прежнему, берутся различные классы решений дифференциальных неравенств). При этом возможность замены дифференциального неравенства (107) с $\rho > 1$ неравенством

$$y'(t) \geq (ly)(t), \quad t \in [a, b],$$

объясняется предположением сильной a-положительности линейного оператора l в функционально-дифференциальном уравнении (9), без которого, как показано выше, теорема 5 теряет силу.

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. *Hakl R., Lomtatidze A., Půža B.* On nonnegative solutions of first order scalar functional differential equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. – 2001. – **23**. – P. 51 – 84.
3. *Бахтин И. А., Красносельский М. А., Стеценко В. Я.* О непрерывности линейных положительных операторов // Сиб. мат. журн. – 1962. – **3**, № 1. – С. 156 – 160.
4. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
5. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, № 1 (23). – С. 3 – 95.
6. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
7. *Стеценко В. Я.* Критерии неразложимости линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1966. – **21**, № 5. – С. 265 – 266.
8. *Riesz F., Sz.-Nagy B.* Leçons d'analyse fonctionelle. – Budapest: Akad. Kiadó, 1955. – 488 p.
9. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Физматгиз, 1961. – 407 с.
10. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы (общая теория). – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.

Получено 31.10.2002