УДК 517.518.8

Е. И. Радзиевская (Нац. ун-т пищ. технологий Украины, Киев),
Г. В. Радзиевский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКА K-ФУНКЦИОНАЛА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ЧЕРЕЗ K-ФУНКЦИОНАЛ МЕНЬШЕГО ПОРЯДКА*

Let $\{U_j\}$ be a finite system of functionals of the form $U_j(g) := \int_0^1 g^{(k_j)}(\tau)\,d\sigma_j(\tau) + \sum_{l<k_j} c_{j,l}\,g^{(l)}(0)$ and let $W^r_{p,U}$ be a subspace of the Sobolev space $W^r_p[0;1]$, $1 \le p \le +\infty$, which consists of only functions g such that $U_j(g) = 0$ for $k_j < r$. We assume that there exists at least one jump τ_j for every function σ_j and if $\tau_j = \tau_s$ for $j \ne s$, then $k_j \ne k_s$. For the K-functional

$$K(\delta, f;\, L_p, W^r_{p,U}) := \inf_{g\in W^r_{p,U}} \left\{ \|f-g\|_p + \delta\left(\|g\|_p + \|g^{(r)}\|_p\right)\right\}$$

we establish the inequality $K(\delta^n, f;\, L_p, W^n_{p,U}) \le cK(\delta^r, f;\, L_p, W^r_{p,U})$, where a constant $c > 0$ does not depend on $\delta \in (0;1]$, functions f belong to L_p, and $r = 1, \ldots, n$. On the basis of this inequality, we also obtain estimates of K-functional in terms of module of smoothness of the function f.

Нехай $\{U_j\}$ — скінченна система функціоналів вигляду $U_j(g) := \int_0^1 g^{(k_j)}(\tau)\,d\sigma_j(\tau) + \sum_{l<k_j} c_{j,l}\,g^{(l)}(0)$, а $W^r_{p,U}$ — підпростір простору Соболева $W^r_p[0;1]$, $1 \le p \le +\infty$, що складається лише з тих функцій g, для яких $U_j(g) = 0$ при $k_j < r$. Припускається, що для кожної функції σ_j існує хоча б один стрибок τ_j, і якщо $\tau_j = \tau_s$ при $j \ne s$, то $k_j \ne k_s$. Для K-функціонала вигляду

$$K(\delta, f;\, L_p, W^r_{p,U}) := \inf_{g\in W^r_{p,U}} \left\{ \|f-g\|_p + \delta\left(\|g\|_p + \|g^{(r)}\|_p\right)\right\}$$

встановлено нерівність $K(\delta^n, f;\, L_p, W^n_{p,U}) \le cK(\delta^r, f;\, L_p, W^r_{p,U})$, де стала $c > 0$ не залежить від $\delta \in (0;1]$, функції $f \in L_p$ і $r = 1, \ldots, n$. З цієї нерівності одержано також оцінки K-функціонала через модуль гладкості функції f.

1. Формулировка основного результата. Как обычно, $\mathbb{N}$ — множество положительных целых (натуральных) чисел. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\omega^{[n]}(\delta, f)$ — модуль гладкости функции f, вычисленный по норме пространства Лебега или по норме пространства непрерывных функций (соответствующие определения даны в п. 2; см. также [1] (гл. II, § 7)). В теории функций хорошо известна оценка $\omega^{[n]}(\delta, f) \le 2^{n-r}\omega^{[r]}(\delta, f)$, $r = 1, \ldots, n$, являющаяся следствием простого равенства, связывающего разность $\Delta^n_h f$ функции f с разностью $\Delta^r_h f$. Перенос этой оценки на K-функционалы оказался нетривиальным. Трудности, возникающие при этом, связаны с невозможностью, в общем случае, поставить каждому K-функционалу какой-либо модуль гладкости (т. е. характеристику функции, выражающуюся через ее разности), чтобы K-функционал допускал двусторонние оценки через этот модуль (как это верно для формул Лионса, см. далее предложение 4 и пояснения, приведенные после его формулировки).

* Частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект Ф7/329-2001).

В данной работе для специального вида K-функционалов доказан аналог оценки $\omega^{[n]}(\delta, f) \leq 2^{n-r}\omega^{[r]}(\delta, f)$. Изученные здесь K-функционалы с ограничениями непосредственно возникают при исследовании наименьших уклонений и скорости сходимости разложений по корневым векторам спектральных задач для функционально-дифференциальных операторов, заданных при нелокальных краевых условиях (см. [2, 3]).

Все используемые далее функциональные пространства состоят из комплекснозначных функций, заданных на конечном отрезке $[a; b]$ вещественной оси. Через $AC[a; b]$, $C[a; b]$ и $L_p[a; b]$ (везде предполагается, что $1 \leq p \leq \leq +\infty$) обозначаются соответственно множества абсолютно непрерывных, непрерывных и пространства Лебега измеримых на $[a; b]$ функций, причем

$$\|f\|_{L_p[a;b]} := \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p} < +\infty, \quad f \in L_p[a; b], \quad 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty[a;b]} := \operatorname*{ess\,sup}_{a \leq t \leq b} |f(t)| < +\infty, \quad f \in L_\infty[a; b],$$

и $\|f\|_{C[a;b]} := \|f\|_{L_\infty[a;b]}$ для $f \in C[a; b]$. Считаем также $BV[a; b]$ множеством функций ограниченной вариации на $[a; b]$.

Пусть $X[a; b]$ — одно из пространств $L_p[a; b]$ или $C[a; b]$. Тогда для $r \in \mathbb{N}$ пространство Соболева $W^r(X[a; b])$ состоит из $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $f \in X[a; b]$, для которых $f^{(r-1)} \in AC[a; b]$ и $f^{(r)} \in X[a; b]$, с нормой

$$\|f\|_{W^r(X[a;b])} := \|f\|_{X[a;b]} + \|f^{(r)}\|_{X[a;b]}. \tag{1}$$

В частности, $W_p^r[a; b] := W^r(X[a; b])$, если $X = L_p[a; b]$, и $C^r[a; b] := := W^r(X[a; b])$, если $X = C[a; b]$. Очевидно, что $C^r[a; b]$ совпадает с пространством r раз непрерывно дифференцируемых на $[a; b]$ функций.

Все содержащиеся в основных утверждениях работы функциональные пространства состоят из функций, заданных на отрезке $[0; 1]$, поэтому, для краткости, $BV := BV[0; 1]$, $C^r := C^r[0; 1]$, $L_p := L_p[0; 1]$, $W_p^r := W_p^r[0; 1]$ и $\|\cdot\|_p := := \|\cdot\|_{L_p}$.

Далее будем рассматривать конечную систему функционалов $\{U_j\}$, состоящую из функционалов вида

$$U_j(g) := \int_0^1 g^{(k_j)}(t)\, d\sigma_j(\tau) + \sum_{l=0}^{k_j-1} c_{j,l}\, g^{(l)}(0), \tag{2}$$

где $\sigma_j \in BV$, причем здесь и в дальнейшем суммы с верхним пределом суммирования, меньшим нижнего, считаем равными нулю. Отметим, что (2) задает общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве C^{k_j} (см., например, [4] (гл. IV, § 13, упражнение 36)); число k_j называется порядком функционала U_j, а его норма и порядок обозначаются через $\|U_j\|_{(C^{k_j})^*}$ и $\operatorname{ord} U_j$ соответственно.

Пусть X — одно из пространств L_p или C. Для $r \in \mathbb{N}$ по системе функционалов $\{U_j\}$ вида (2) введем подпространства

$$W_U^r(X) := \{g \in W^r(X) : U_j(g) = 0, \quad \operatorname{ord} U_j \le r-1\} \tag{3}$$

и

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_U^r(L_p) &:= W_U^r(L_p), \\ \widetilde{W}_U^r(C) &:= \{g \in W^r(C) : U_j(g) = 0, \quad \operatorname{ord} U_j \le r\} \end{aligned} \tag{4}$$

пространства $W^r(X)$. В силу вложения W_p^r в C^{r-1} подпространства $W_U^r(X)$ и $\widetilde{W}_U^r(X)$ определены корректно, причем $\widetilde{W}_U^r(X) \subseteq W_U^r(X)$ и $\widetilde{W}_U^r(X)$ не совпадает с $W_U^r(X)$ лишь в случае $X = C$ и наличия у системы $\{U_j\}$ функционалов, имеющих порядки r.

И наконец, для $\delta > 0$ и $f \in X$ зададим два K-функционала

$$K(\delta, f;\, X, W_U^r(X)) := \inf_{g \in W_U^r(X)} \left(\|f-g\|_X + \delta \|g\|_{W^r(X)}\right), \tag{5}$$

$$K(\delta, f;\, X, \widetilde{W}_U^r(X)) := \inf_{g \in \widetilde{W}_U^r(X)} \left(\|f-g\|_X + \delta \|g\|_{W^r(X)}\right). \tag{6}$$

Поскольку $\widetilde{W}_U^r(X) \subseteq W_U^r(X)$, то

$$K(\delta, f;\, X, W_U^r(X)) \le K(\delta, f;\, X, \widetilde{W}_U^r(X)), \qquad \delta > 0, \quad f \in X. \tag{7}$$

В введенных обозначениях и предположениях справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\{U_j\}$ — пустая или конечная система функционалов вида* (2). *Если система $\{U_j\}$ не пуста, то считаем, что функции σ_j из* (2) *удовлетворяют условию: каждая σ_j имеет хотя бы одну точку скачка, причем всем функционалам U_j, у которых порядки совпадают, можно сопоставить разные точки скачка функций σ_j. Тогда для каждого $r \in \mathbb{N}$ найдется положительная постоянная $c(n, U)$, не зависящая от $X = L_p$ или $X = C$, для которой при $0 < \delta \le 1$, $f \in X$ и $r = 1, \ldots, n$ верна оценка*

$$K(\delta^n, f;\, X, \widetilde{W}_U^n(X)) \le c(n, U)\, K(\delta^r, f;\, X, W_U^r(X)). \tag{8}$$

Согласно определениям K-функционалов (5) и (6), введенных с помощью подпространств $W_U^r(X)$ и $\widetilde{W}_U^r(X)$ (см. формулы (3) и (4)), оценка (8) при $X = L_p$ и $n = r$ превращается в равенство с постоянной $c(n, U) = 1$. Но в случае $X = C$ и $n = r$ эта же оценка оказывается содержательной и, ввиду неравенства (7), свидетельствует об эквивалентности K-функционалов (5) и (6) при $0 < \delta \le 1$ и $f \in X$.

Неравенство (8) играет существенную роль в оценках K-функционалов с ограничениями (5) и (6) через различные модули гладкости функции. Некоторые из таких оценок даны в п. 4, где приведен ряд следствий из теоремы. Доказательству теоремы посвящен п. 3, а в п. 2 сформулированы необходимые для этого доказательства вспомогательные утверждения.

2. Вспомогательные утверждения. При доказательстве теоремы используются теорема Х. Уитни [5] и другие известные утверждения в несколько ином виде, нежели они сформулированы в первоисточниках. Чтобы привести используемые далее формулировки, введем необходимые определения.

Для $r \in \mathbb{N}$ и комплекснозначной функции f, заданной на конечном отрезке $[a; b]$ вещественной оси, определим r-ю разность с шагом h, $0 \le h < (b-a)/r$,

$$(\Delta_h^r f)(t) := \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \binom{r}{l} f(t-hl), \quad a + hr \le t \le b.$$

Если $f \in L_p[a;b]$, то, очевидно, что функция $\Delta_h^r f \in L_p[a+hr;b]$, и поэтому для f определен r-й модуль гладкости, задаваемый соотношениями

$$\omega^{[r]}(\delta, f)_{L_p[a;b]} := \sup_{0 \le h < \delta} \left\| \Delta_h^r f \right\|_{L_p[a+hr;b]}, \quad 0 < \delta \le (b-a)/r,$$
$$\omega^{[r]}(\delta, f)_{L_p[a;b]} := \omega^{[r]}((b-a)/r, f)_{L_p[a;b]}, \quad \delta > (b-a)/r. \tag{9}$$

В случае $f \in C[a;b]$ полагаем $\omega^{[r]}(\delta, f)_{C[a;b]} := \omega^{[r]}(\delta, f)_{L_\infty[a;b]}$, а в случае $r = 1$ приняты обозначения $\omega(\delta, f)_C := \omega^{[1]}(\delta, f)_C$ и $\omega(\delta, f)_1 := \omega^{[1]}(\delta, f)_{L_1}$. Если же $r = 0$, то $\omega^{[0]}(\delta, f)_{L_p[a;b]} := \|f\|_{L_p[a;b]}$ и $\omega^{[0]}(\delta, f)_{C[a;b]} := \|f\|_{C[a;b]}$.

Пусть $X[a;b] = L_p[a;b]$ или $X[a;b] = C[a;b]$. Введенный соотношениями (9) модуль гладкости $\omega^{[r]}(\delta, f)_{X[a;b]}$ имеет такие хорошо известные свойства (см., например, [1] (гл. II, § 7)):

$$\omega^{[n]}(\delta, f)_{X[a;b]} \le 2^{n-r} \omega^{[r]}(\delta, f)_{X[a;b]}, \quad \delta > 0, \quad f \in X[a;b], \tag{10}$$

для $r = 0, \ldots, n$,

$$\omega^{[r]}(\lambda\delta, f)_{X[a;b]} \le (1 + [\lambda])^r \omega^{[r]}(\delta, f)_{X[a;b]}, \quad \delta > 0, \quad f \in X[a;b], \tag{11}$$

где $[\lambda]$ — целая часть числа $\lambda > 0$, и

$$\omega^{[r]}(\delta, f)_{X[a;b]} \le \delta^r \left\| f^{(r)} \right\|_{X[a;b]}, \quad \delta > 0, \quad f \in W^r(X[a;b]). \tag{12}$$

Сформулируем теперь теорему Х. Уитни [5] в том виде, в котором она используется в дальнейшем. Отметим лишь, что все встречающиеся далее в различных утверждениях положительные постоянные, как правило, различны.

Предложение 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, *а* $X[-n;1] := L_p[-n;1]$ *при* $X = L_p$ *и* $X[-n;1] := C[-n;1]$ *при* $X = C$. *Тогда существует линейный и ограниченный оператор* R_n *(оператор ретракции* [6] *(п.1.2.4)), отображающий* X *и* $W^n(X)$ *соответственно на* $X[-n;1]$ *и на* $W^n(X[-n;1])$ *и имеющий следующие свойства*:

1) *оператор* R_n *задает продолжение функции* g, *определенной на отрезке* $[0;1]$, *на отрезок* $[-n;1]$, *т. е.* $(R_n g)(t) = g(t)$ *при* $0 \le t \le 1$;

2) *существует не зависящая от* $X = L_p$ *или* $X = C$ *постоянная* $c_1(n) \ge 1$, *для которой*

$$\omega^{[k]}(\delta, R_n g)_{X[-n;1]} \le c_1(n) \omega^{[k]}(\delta, g)_X, \quad \delta > 0, \quad k = 0, \ldots, n, \quad g \in X. \tag{13}$$

Краткое доказательство предложения 1 имеется в [1] (гл. VI, теорема 4.1). Отметим, что в [1] оценка (13) приведена лишь для $k = n$, однако, как следует из имеющегося в [1] доказательства, она справедлива для всех $k = 0, \ldots, n$.

Приведем теперь утверждение, на котором базируется доказательство теоремы.

Предложение 2. *Пусть* $\{U_j\}_{j=1}^m$ — *непустая система функционалов вида* (2), *удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда найдутся такие положитель-*

ные постоянные $\delta_0 := \delta_0(n, U) \le 1$ *и* $c_0(n, U)$, *не зависящие от* $X = L_p$ *или* $X = C$, *что для* K*-функционала* (6) *справедливо равенство*

$$K(\delta^n, f; X, \widetilde{W}_U^n(X)) =$$

$$= \inf_{g \in W^n(X)} \left(\|f - g\|_X + \delta^n \|g\|_{W^n(X)} + c_0(n, U) \sum_{j=1}^{m} \delta^{k_j + 1/p} \left| U_j(g) \right| \right),$$

$$0 < \delta \le \delta_0, \quad f \in X,$$

в котором p *взято из условия* $X = L_p$ *и* $p := +\infty$ *при* $X = C$.

Данная формулировка предложения 2 отличается от утверждения леммы 2 из [7] лишь случаем $X = C$, который в [7] не рассматривался. Однако, как видно из доказательства леммы 2 из [7], предложение 2 справедливо и при $X = C$.

И наконец, сформулируем в виде предложения две оценки, используемые далее.

Предложение 3. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$ *и* $n \ge 2$, *а* $r < n$. *Тогда существует положительная постоянная* $c(n)$, *не зависящая от* $\delta \in (0; 1]$ *и* $p \in [1; +\infty]$, *для которой*

$$\delta^{k+1/p} \|g\|_{C^k} \le c(n) \left(\|g\|_p + \delta^r \left\| g^{(r)} \right\|_p \right), \quad k = 0, \ldots, r-1, \quad g \in W_p^r, \tag{14}$$

$$\delta^{k+1/p} \|g\|_{C^k} \le c(n) \left(\delta^r \|g\|_p + \delta^n \left\| g^{(n)} \right\|_p \right), \quad k = r, \ldots, n-1, \quad g \in W_p^n. \tag{15}$$

Доказательство. Известны два неравенства

$$\delta^{1/p} \|g\|_C \le \|g\|_p + \delta \|g'\|_p, \quad 0 < \delta \le 1, \quad g \in W_p^1 \tag{16}$$

(см., например, [8] (формула (11))), и

$$\delta^k \left\| g^{(k)} \right\|_p \le c_0(r) \left(\|g\|_p + \delta^r \left\| g^{(r)} \right\|_p \right), \tag{17}$$

$$0 < \delta \le 1, \quad k = 0, \ldots, r, \quad g \in W_p^r,$$

где положительная постоянная $c_0(r)$ не зависит от $p \in [1; +\infty]$ (см., например, [1] (гл. II, теорема 5.6)).

При $k = 0$ и $r = 1$ оценка (14) совпадает с (16), поэтому установим (14) при $r \ge 2$. Используя последовательно определение нормы в пространстве C^k, неравенство (16), а затем предположения $0 < \delta \le 1$, $k \le r - 1$ и оценку (17), имеем

$$\delta^{k+1/p} \|g\|_{C^k} \le \delta^k \left(\|g\|_p + \delta \|g'\|_p + \left\| g^{(k)} \right\|_p + \delta \left\| g^{(k+1)} \right\|_p \right) \le$$

$$\le \|g\|_p + 3c_0(r) \left(\|g\|_p + \delta^r \left\| g^{(r)} \right\|_p \right),$$

откуда и следует (14).

Выведем теперь (15). Для этого в неравенстве (17) заменим вначале r на $n - r$, а затем положим функцию g равной $g^{(r)}$ и, наконец, домножим обе части в так полученной оценке на δ^r с последующей заменой в ней $k + r$ на k. В результате придем к соотношению

$$\delta^k \left\| g^{(k)} \right\|_p \le c_0(n - r) \left(\delta^r \left\| g^{(r)} \right\|_p + \delta^n \left\| g^{(n)} \right\|_p \right),$$

справедливому для $0 < \delta \le 1$, $k = r, \ldots, n-1$, $g \in W_p^n$. Далее, используя это соотношение и оценку (16), как и при выводе (14), получаем (15).

3. Доказательство теоремы. Пусть g — произвольная функция из $W_U^r(X)$, а R_n — оператор продолжения из предложения 1. По функции $R_n g$ построим функцию $g_{\delta,n}$ по правилу

$$g_{\delta,n}(t) := \int\limits_{[0;1]^n} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+1} \binom{n}{l} (R_n g)\left(t - \frac{\delta l}{n}(\tau_1 + \ldots + \tau_n)\right) d\tau_1 \ldots d\tau_n, \tag{18}$$

где $0 < \delta \le 1$, $0 \le t \le 1$, а через $\int_{[0;1]^n}$ обозначен n-кратный интеграл по n-мерному кубу со стороной $[0; 1]$.

Оказывается, что $g_{\delta,n} \in W^n(X)$ и выполняются неравенства

$$\left\| g - g_{\delta,n} \right\|_X \le c_2(n) \delta^r \left\| g^{(r)} \right\|_X, \quad 0 < \delta \le 1, \quad r = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

$$\left\| g_{\delta,n}^{(k)} \right\|_X \le c_2(n) \delta^{r-k} \left\| g^{(r)} \right\|_X, \quad k = r, \ldots, n, \quad 0 < \delta \le 1, \tag{20}$$

$$\left\| g_{\delta,n} \right\|_X \le c_2(n) \| g \|_X, \quad 0 < \delta \le 1, \tag{21}$$

с не зависящей от g и X постоянной $c_2(n) \ge 1$.

Действительно, учитывая определения (9) и (18) модуля гладкости $\omega^{[r]}(\delta, f)_X$ и функции $g_{\delta,n}$, обобщенное неравенство Минковского и оценку (13), имеем

$$\left\| g - g_{\delta,n} \right\|_X \le \int\limits_{[0;1]^n} \left\| \Delta^n_{\frac{\delta}{n}(\tau_1 + \ldots + \tau_n)} R_n g \right\|_X d\tau_1 \ldots d\tau_n \le$$

$$\le \omega^{[n]}(\delta, R_n g)_{X[-n;1]} \le c_1(n) \omega^{[n]}(\delta, g)_X. \tag{22}$$

Но поскольку $g \in W^r(X)$, то из соотношений (10), (12) и (22) получаем (19).

Для установления включения $g_{\delta,n} \in W^n(X)$ и оценки (20) потребуется известная формула дифференцирования функции $g_{\delta,n}$, заданной правилом (18) (доказательство которой см., например, в [7] (равенство (26))):

$$g_{\delta,n}^{(k)}(t) = \left(\frac{n}{\delta}\right)^k \int\limits_{[0;1]^{n-k}} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+1} \binom{n}{l} \frac{1}{l^k} \times$$

$$\times \left(\Delta^k_{\frac{\delta l}{n}} R_n g\right)\left(t - \frac{\delta l}{n}(\tau_{k+1} + \ldots + \tau_n)\right) d\tau_{k+1} \ldots d\tau_n, \quad k = r, \ldots, n-1,$$

$$g_{\delta,n}^{(n)}(t) = \left(\frac{n}{\delta}\right)^n \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+1} \binom{n}{l} \frac{1}{l^n} \left(\Delta^n_{\frac{\delta l}{n}} R_n g\right)(t).$$

Отсюда, используя те же соображения, что и при доказательстве оценки (19), выводим

$$\left\|g_{\delta,n}^{(k)}\right\|_X \le \left(\frac{n}{\delta}\right)^k \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} \frac{1}{l^k} \sup_{0\le\xi\le\frac{\delta l(n-k)}{n}} \left\|\left(\Delta^k_{\frac{\delta l}{n}} R_n g\right)(\cdot-\xi)\right\|_X \le$$

$$\le \left(\frac{n}{\delta}\right)^k \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} \frac{1}{l^k} \omega^{[k]}\left(\frac{\delta l}{n}, R_n g\right)_{X[-n;1]} \le 2^n \left(\frac{n}{\delta}\right)^k \omega^{[k]}(\delta, R_n g)_{X[-n;1]} \le$$

$$\le 2^n \left(\frac{n}{\delta}\right)^k c_1(n)\omega^{[k]}(\delta, g)_X \le 2^n n^k c_1(n)\delta^{r-k}\left\|g^{(r)}\right\|_X,$$

что и показывает справедливость оценки (20).

Оценка (21) является непосредственным следствием определения (18) функции $g_{\delta,n}$ и неравенства (13) при $k=0$, поскольку $\omega^{[0]}(\delta, g)_X := \|g\|_X$.

Далее предполагаем, что система функционалов $\{U_j\}$ не пустая (иначе доказательство теоремы лишь упрощается) и $\{U_j\}$ состоит из m функционалов. Ввиду предложения 2

$$K(\delta^n, f;\, X, \widetilde{W}^n_U(X)) \le \left\|f - g_{\delta,n}\right\|_X + \delta^n\left\|g_{\delta,n}\right\|_{W^n(X)} + c_0(n, U)\sum_{j=1}^{m} \delta^{k_j+1/p}\left|U_j(g_{\delta,n})\right|, \tag{23}$$

где $0 < \delta \le \delta_0$, а p то же, что и в условии $X = L_p$. При $X = C$, как и ранее, полагаем $p := +\infty$.

Но порядки k_j функционалов U_j могут быть равны n лишь в том случае, когда пространство $X = C$, и тогда для слагаемых $\delta^{k_j+1/p}\left|U_j(g_{\delta,n})\right|$ с $\operatorname{ord} U_j = n$ имеем

$$\delta^{k_j+1/p}\left|U_j(g_{\delta,n})\right| \le \delta^n\left\|U_j\right\|_{(C^n)^*}\left\|g_{\delta,n}\right\|_{C^n} = \delta^n\left\|U_j\right\|_{(C^n)^*}\left\|g_{\delta,n}\right\|_{W^n(X)}.$$

Отсюда и из (23) получаем неравенство

$$K(\delta^n, f;\, X, \widetilde{W}^n_U(X)) \le$$

$$\le c_1(n, U)\left(\left\|f - g_{\delta,n}\right\|_X + \delta^n\left\|g_{\delta,n}\right\|_{W^n(X)} + \sum_{j:k_j\le n-1} \delta^{k_j+1/p}\left|U_j(g_{\delta,n})\right|\right) \tag{24}$$

с положительной постоянной $c_1(n, U)$, не зависящей от $\delta \in (0; \delta_0]$, $f \in X$ и $g \in$ $\in W^r_U(X)$.

Оценим теперь слагаемые в правой части (24).

Поскольку $\left\|f - g_{\delta,n}\right\|_X \le \|f - g\|_X + \left\|g - g_{\delta,n}\right\|_X$, согласно неравенству (19) имеем

$$\left\|f - g_{\delta,n}\right\|_X \le \|f - g\|_X + c_2(n)\delta^r\left\|g^{(r)}\right\|_X, \tag{25}$$

$$0 < \delta \le 1, \quad r = 1, \ldots, n, \quad g \in W^r_U(X).$$

Используя определение (1) нормы в пространстве $W^r(X)$, предположения $0 < \delta \le 1$ и $r \le n$, имеем $\delta^n\left\|g_{\delta,n}\right\|_{W^n(X)} \le \delta^r\left\|g_{\delta,n}\right\|_X + \delta^n\left\|g^{(n)}_{\delta,n}\right\|_X$, откуда с учетом неравенств (20) при $k=n$ и (21) получаем

$$\delta^n \|g_{\delta,n}\|_{W^n(X)} \le c_2(n)\delta^r \|g\|_{W^r(X)}, \quad 0 < \delta \le 1, \quad r = 1, \dots, n, \quad g \in W_U^r(X). \tag{26}$$

Далее понадобятся две оценки

$$\delta^{k+1/p} \|g - g_{\delta,n}\|_{C^k} \le c(n)\left(\|g - g_{\delta,n}\|_X + \delta^r \|g^{(r)} - g_{\delta,n}^{(r)}\|_X\right), \tag{27}$$

$$0 < \delta \le 1, \quad k = 1, \dots, r-1, \quad g \in W_U^r(X),$$

и

$$\delta^{k+1/p} \|g_{\delta,n}\|_{C^k} \le c(n)\left(\delta^r \|g_{\delta,n}\|_X + \delta^n \|g_{\delta,n}^{(n)}\|_X\right), \tag{28}$$

$$0 < \delta \le 1, \quad k = r, \dots, n-1, \quad g \in W_U^r(X),$$

совпадающие соответственно с неравенствами (14) и (15), записанными для функции g, равной $g - g_{\delta,n}$ и $g_{\delta,n}$. При этом учтено, что $g_{\delta,n} \in W^n(X)$.

Чтобы оценить слагаемые $\delta^{k_j+1/p}\left|U_j(g_{\delta,n})\right|$ в (24), рассмотрим два случая: $k_j \le r-1$, а если $r \le n-1$, то и $r \le k_j \le n-1$.

Пусть $k_j \le r-1$. Используя линейность и ограниченность функционалов U_j на пространстве C^{k_j}, предположение о $g \in W_U^r(X)$ (т. е. $U_j(g) = 0$ при $k_j \le$ $\le r-1$) и оценку (27), получаем

$$\delta^{k_j+1/p}\left|U_j(g_{\delta,n})\right| \le \delta^{k_j+1/p}\left|U_j(g)\right| + \delta^{k_j+1/p}\|U_j\|_{(C^{k_j})^*}\|g - g_{\delta,n}\|_{C^{k_j}} \le$$

$$\le c(n)\|U_j\|_{(C^{k_j})^*}\left(\|g - g_{\delta,n}\|_X + \delta^r\|g^{(r)}\|_X + \delta^r\|g_{\delta,n}^{(r)}\|_X\right).$$

Оценивая, согласно неравенствам (19) и (20) при $k = r$, в последнем выражении слагаемые $\|g - g_{\delta,n}\|_X$ и $\delta^r\|g_{\delta,n}^{(r)}\|_X$, находим

$$\delta^{k_j+1/p}\left|U_j(g_{\delta,n})\right| \le 3c(n)c_2(n)\|U_j\|_{(C^{k_j})^*}\delta^r\|g^{(r)}\|_X,$$

$$k_j \le r-1, \quad 0 < \delta \le 1, \quad g \in W_U^r(X). \tag{29}$$

Пусть теперь $r \le n-1$ и $r \le k_j \le n-1$. Из (28), (21) и (20) при $k = n$ имеем

$$\delta^{k_j+1/p}\left|U_j(g_{\delta,n})\right| \le c(n)c_2(n)\|U_j\|_{(C^{k_j})^*}\delta^r\|g\|_{W^r(X)}, \tag{30}$$

$$r \le k_j \le n-1, \quad 0 < \delta \le 1, \quad g \in W_U^r(X).$$

Подставляя оценки (25), (26), (29) и (30) в правую часть неравенства (24), заключаем, что найдется положительная постоянная $c_2(n, U)$, для которой

$$K(\delta^n, f; X, \widetilde{W}_U^n(X)) \le c_2(n, U)\left(\|f - g\|_X + \delta^r\|g\|_{W^r(X)}\right), \tag{31}$$

$$0 < \delta \le \delta_0, \quad f \in X, \quad g \in W_U^r(X).$$

Поскольку левая часть этого неравенства не зависит от g, а в правой g — произвольная функция из $W_U^r(X)$, переходя в (31) к нижней грани по $g \in$ $\in W_U^r(X)$, получаем утверждение (8) теоремы для $0 < \delta \le \delta_0$ (≤ 1). Чтобы отсюда вывести оценку (8) для всех $\delta \in (0; 1]$, нужно воспользоваться неравенством $K(\mu\delta, f; X, \widetilde{W}_U^n(X)) \le \mu K(\delta, f; X, \widetilde{W}_U^n(X))$ при $\mu \ge 1$ и неубываемостью по δ K-функционала. И тогда для $\delta_0 \le \delta \le 1$ выводим

$$K(\delta, f; X, \widetilde{W}_U^n(X)) \le \frac{\delta}{\delta_0} K(\delta_0, f; X, \widetilde{W}_U^n(X)) \le$$

$$\le \frac{c_2(n, U)}{\delta_0} K(\delta_0, f; X, W_U^r(X)) \le \frac{c_2(n, u)}{\delta_0} K(\delta, f; X, W_U^r(X)), \tag{32}$$

т. е. показана справедливость оценки (8) с $c(n, u) := \delta_0^{-1} c_2(n, U)$ при всех $\delta \in (0; 1]$, $f \in X$ и $r = 1, \dots, n$.

4. Оценки K-функционала через модуль гладкости. Установим ряд следствий из теоремы, относящихся к оценкам K-функционала (6) через модуль гладкости функции. Но вначале приведем одно общее свойство K-функционала (6).

Из теоремы вытекает такое утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть система функционалов $\{U_j\}$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ найдется положительная постоянная $c(n, U)$, не зависящая от $X = L_p$ или $X = C$ и от $r = 1, \dots, n$, для которой выполнена оценка*

$$K(\delta^n, f; X, \widetilde{W}_U^n(X)) \le c(n, U)\delta^r \|f\|_{W^r(X)}, \quad 0 < \delta \le 1, \quad f \in W_U^r(X).$$

Доказательство. Поскольку $f \in W_U^r(X)$, то полагая в правой части определения (5) функцию g равной f, получаем $K(\delta^r, f; X, W_U^r(X)) \le \le \delta^r \|f\|_{W^r(X)}$, $\delta > 0$, откуда в силу теоремы следует требуемая оценка.

Далее удобно рассмотреть еще один K-функционал

$$K_0(\delta, f; X, W_U^r(X)) := \inf_{g \in W_U^r(X)} \left(\|f - g\|_X + \delta \|g^{(r)}\|_X \right), \quad \delta > 0, \quad f \in X, \tag{33}$$

отличающийся от K-функционалов (5) и (6) тем, что в его определении норма $\|g\|_{W^r(X)}$ заменена полунормой $\|g^{(r)}\|_X$. Дело в том, что в ряде случаев именно для этого K-функционала известны двусторонние оценки через различные модули гладкости функции. Чтобы сформулировать одну из таких оценок, заметим, что в случае, если система $\{U_j\}$ не имеет функционалов с порядками, меньшими r, $W_U^r(X) = W^r(X)$, и тогда K-функционал (33) обозначается через $K_0(\delta, f; X, W^r(X))$.

Предложение 4. *Для каждого $r \in \mathbb{N}$ существует такая положительная постоянная $c(r)$, не зависящая от $X = L_p$ или $X = C$, что*

$$2^{-r}\omega^{[r]}(\delta, f)_X \le K_0(\delta^r, f; X, W^r(X)) \le c(r)\omega^{[r]}(\delta, f)_X, \quad \delta > 0, \quad f \in X. \tag{34}$$

Различные доказательства этого утверждения имеются в [1] (гл. VI, теорема 2.4) и в [9] (предложение 6.1). В обзоре [10] (§ 6, п. 4) соотношения (34) названы формулами Лионса и приведена историческая справка об их появлении. Другие, аналогичные формулам Лионса, утверждения о двусторонних оценках K-функционалов через иные, чем $\omega^{[r]}(\delta, f)_X$, модули гладкости имеются в [2] (леммы 1 и 2), [3] (лемма 2), [7] (утверждение 2), [11] (леммы 2.2 и 2.4).

Поскольку $K(\delta, f; X, W_U^r(X)) \le \|f\|_X$ для $\delta > 0$ и $f \in X$, то K-функционал (5) допускает такие оценки через K-функционал (33):

$$K_0(\delta, f;\, X, W_U^r(X)) \le K(\delta, f;\, X, W_U^r(X)) \le$$

$$\le 2K_0(\delta, f;\, X, W_U^r(X)) + \min\{\delta; 1\}\|f\|_X, \quad \delta > 0, \quad f \in X. \tag{35}$$

Непосредственным следствием теоремы, предложения 4 и второго неравенства в (35) является такое утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$ и $r \le n$. Предположим, что система функционалов $\{U_j\}$ удовлетворяет условиям теоремы и не содержит функционалов, порядки которых меньше r. Тогда найдется положительная постоянная $c(n, U)$, не зависящая от $X = L_p$ или $X = C$, для которой*

$$K(\delta^n, f;\, X, \widetilde{W}_U^n(X)) \le c(n, U)(\omega^{[r]}(\delta, f)_X + \delta^r\|f\|_X), \quad 0 < \delta \le 1, \quad f \in X.$$

Если в следствии 2 требование: система $\{U_j\}$ не содержит функционалов, порядки которых меньше r, заменить предположением, что все функционалы с порядками, меньшими r, имеют специальный вид, как это было в [2] (леммы 1 и 2), [3] (лемма 2), [7] (утверждение 2 и следствие 1) или [11] (лемма 2.2), а затем воспользоваться упомянутыми результатами этих работ, то получим утверждение следствия 2 с заменой в нем модуля гладкости $\omega^{[r]}(\delta, f)_X$ на соответствующий модуль гладкости из [2, 3, 7, 11].

***Следствие* 3.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, а система функционалов $\{U_j\}$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда найдется положительная постоянная $c(n, U)$, не зависящая от $\delta \in (0; 1]$ и $f \in C_U := \{g \in C : U_j(g) = 0,\ \operatorname{ord} U_j = 0\}$, для которой*

$$K(\delta^n, f;\, X, \widetilde{W}_U^n(X)) \le c(n, U)(\omega(\delta, f)_C + \delta\|f\|_C). \tag{36}$$

Доказательство. Применяя последовательно теорему и предложение 2, а затем учитывая условие $f \in C_U$, получаем соотношения

$$K(\delta^n, f;\, C, \widetilde{W}_U^n(C)) \le c(n, U)\, K(\delta, f;\, C, W_U^1(C)) =$$

$$= c(n, U) \inf_{g \in C^1}\left(\|f - g\|_C + \delta\|g\|_{C^1} + c_0(n, U)\sum_{j:\operatorname{ord} U_j = 0}\left|U_j(g)\right|\right) \le$$

$$\le c(n, U)\left(1 + c_0(n, U)\sum_{j:\operatorname{ord} U_j = 0}\|U_j\|_{C^*}\right)\inf_{g \in C^1}\left(\|f - g\|_C + \delta\|g\|_{C^1}\right), \quad 0 < \delta \le \delta_0, \tag{37}$$

где δ_0 — та же постоянная, что и в утверждении предложения 2.

Используя теперь определение K-функционала $K(\delta, f;\, C, C^1)$ (т. е. K-функционала, заданного равенством (6) при $X = C$, $r = 1$ и при пустой системе функционалов $\{U_j\}$), из следствия 2 заключаем, что

$$K(\delta, f;\, C, C^1) := \inf_{g \in C^1}\left(\|f - g\|_C + \delta\|g\|_{C^1}\right) \le c(\omega(\delta, f)_C + \delta\|f\|_C),$$

$$0 < \delta \le 1, \quad f \in C,$$

с положительной постоянной c, не зависящей от указанных δ и f. Из этой оценки и соотношений (37) получаем неравенство (36) при $0 < \delta \le \delta_0$. Чтобы отсюда вывести неравенство (36) при всех $\delta \in (0; 1]$, достаточно повторить заключительную часть доказательства теоремы (см. неравенства (32)) и воспользоваться неубываемостью по $\delta > 0$ модуля непрерывности $\omega(\delta, f)_C$.

***Следствие* 4.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, *а система функционалов* $\{U_j\}$ *удовлетворяет условиям теоремы. Тогда найдется положительная постоянная* $c(n, U)$, *для которой*

$$K(\delta^n, f; L_1, W_U^n(L_1)) \le c(n, U)(\omega(\delta, f)_1 + \delta \|f\|_1), \quad 0 < \delta \le 1, \quad f \in L_1. \tag{38}$$

Доказательство. Применяя последовательно теорему и предложение 2, как и при выводе соотношений (37), имеем

$$K(\delta^n, f; L_1, W_U^n(L_1)) \le c_1(n, U) \inf_{g \in W_1^1} \left(\|f - g\|_1 + \delta \|g\|_{W_1^1} + \delta \|g\|_C \right),$$

$$0 < \delta \le \delta_0, \quad f \in L_1,$$

где δ_0 — та же, что и в предложении 2, а положительная постоянная $c_1(n, U)$ не зависит от указанных δ и f. Подставляя теперь в правую часть этого неравенства оценку $\|g\|_C \le \|g\|_{W_1^1}$, $g \in W_1^1$ (совпадающую с (16), если в (16) положить $\delta = 1$ и $p = 1$), а затем используя определение K-функционала $K(\delta, f; L_1, W_1^1)$ (т. е. K-функционала, заданного равенством (6) при $X = L_1$, $r = 1$ и при пустой системе функционалов $\{U_j\}$), из следствия 2 выводим утверждение (38) при $0 < \delta \le \delta_0$. Чтобы отсюда получить утверждение (38) при всех $\delta \in \in (0; 1]$, достаточно повторить заключительную часть доказательства теоремы и воспользоваться неубываемостью по $\delta > 0$ модуля непрерывности $\omega(\delta, f)_1$.

1. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive approximation. – New York: Springer, 1993. – 449 p.
2. *Radzievskii G.* The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions. – Kiev, 1994. – P. 14 – 27. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukraine. Inst. Math.; 94.29).
3. *Радзиевский Г. В.* Неравенства Джексона и Бернштейна для системы корневых функций оператора дифференцирования с нелокальным краевым условием // Докл. РАН. – 1998. – **363**, № 1. – С. 20 – 23.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
5. *Whitney H.* Analytic extensions of differentiable functions defined on closed sets // Trans. Amer. Math. Soc. – 1934. – **36**. – P. 63 – 85.
6. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
7. *Радзиевский Г. В.* Модули непрерывности, определенные по нулевому продолжению функции, и K-функционалы с ограничениями // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1537 – 1554.
8. *Радзиевский Г. В.* Асимптотика по параметру фундаментальной системы решений линейного функционально-дифференциального уравнения // Там же. – 1995. – **47**, № 6. – С. 811 – 836.
9. *Johnen H.* Inequalities connected with the moduli of smoothness // Мат. весник (Београд). – 1972. – **9**, св. 3. – С. 289 – 303.
10. *Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1986. – **24**. – С. 3 – 164.
11. *Радзиевский Г. В.* Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 4. – С. 83 – 124.

Получено 17.03.2003