УДК 519.71

Е. В. Воскресенский (Мордов. ун-т, Россия)

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ

We obtain new results on stabilization of program movements.

Отримано нові результати щодо стабілізації програмних рухів.

1. Пусть уравнение движения имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, v), \quad v \in K, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где K — класс допустимых управлений из множества измеримых вектор-функций: $v: [T, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ и $f(t, y, v(t)) \equiv F(t, y)$ — функция типа Каратеодори такая, что задача Коши (t_0, y_0) при любом v имеет единственное решение $y(t)$ в классе абсолютно непрерывных вектор-функций. Задачи управления, построения и стабилизации программных движений для широкого класса уравнений (1) решались во многих работах (см., например, [1 – 4]). Рассмотрим программное движение $y = \varphi(t)$ при $v = v_0$, $v_0 = v_0(t)$. Тогда

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, v_0(t)) \equiv F_1(t, y) \tag{2}$$

и $y = \varphi(t)$ — решение уравнения (2).

Определение 1. *Будем говорить, что решение уравнения* (2) φ *стабилизируется, если существует уравнение типа Каратеодори*

$$\frac{dy}{dt} = f_0(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

такое, что φ *является устойчивым решением уравнения* (3). *Процесс построения уравнения* (3) *называется стабилизацией программного движения* $y = \varphi(t)$ *уравнения* (2), *а уравнение* (3) — *стабилизирующим. Если стабилизирующее уравнение типа* (1), *то будем говорить, что стабилизация осуществляется управлением* v *в классе допустимых управлений* K.

Стабилизируется именно программное движение $y = \varphi(t)$ для уравнения (1) или, что то же самое, для уравнения (2).

Введем замены переменных

$$x = y - \varphi(t), \quad u = v - v_0. \tag{4}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dt} = f(t, x + \varphi, u + v_0) - f(t, \varphi, v_0) \equiv G(t, x, u). \tag{5}$$

Будем рассматривать u в виде $u = u(t, x)$. Тогда на основании (4) имеем

$$u(t, x) = v(t, y) - v_0 = v\big(t, x + \varphi(t)\big) - v_0.$$

Поэтому

$$u(t, 0) = v\big(t, \varphi(t)\big) - v_0 \equiv 0.$$

Пусть решение $x = 0$ уравнения (5) устойчиво по Ляпунову. Тогда рассмотрим уравнение (1) при управлении $v = u\big(t, y - \varphi(t)\big) + v_0$:

$$\frac{dy}{dt} = f\big(t, y, u(t, y - \varphi(t)) + v_0\big). \tag{6}$$

Ясно, что $y = \varphi(t)$ является устойчивым решением этого уравнения. Следовательно, уравнение (6) является стабилизирующим и программное движение $y = \varphi(t)$ стабилизировано.

Реальной основой стабилизации является следующая ситуация. Предположим, что в ходе регулирования движения можно измерять текущие значения всех координат вектора x. На основе этого измерения управляющее устройство должно выработать воздействие $u(t, x)$. Оно должно обеспечивать либо устойчивость, либо асимптотическую устойчивость заданного невозмущенного движения $x = 0$. Возможно рассмотрение и других устойчивоподобных движений, а не только устойчивых по Ляпунову. Тогда на основе замен (4) строится стабилизирующее уравнение (6). Поэтому если начальные данные программного движения $y = \varphi(t)$ задаются измерением, то при достаточной точности измерений решение уравнения (6) с этими начальными данными достаточно близко к программному движению при всех $t \geq T$.

Стабилизируем программное движение $y = \varphi(t)$, когда уравнение движения (1) типа Липшица [1]:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)v + f(t, y, v) + F(t), \tag{7}$$

где

$$\|f(t, y_1, v_1) - f(t, y_2, v_2)\| \leq \psi_1(t)\|y_1 - y_2\| + \psi_2(t)\|v_1 - v_2\|,$$
$$\psi_1, \psi_2 \in C\Big([T, +\infty), \mathbb{R}^1_+\Big).$$

Выполним замену переменных (4). Тогда

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + f(t, x + \varphi(t), u + v_0) - f(t, \varphi(t), v_0). \tag{8}$$

Отклонение управляющего воздействия будем искать в виде $u = C(t)x$, где $C(t)$ — $(m \times n)$-непрерывная матрица, $T \leq t < +\infty$.

Теорема 1. *Если уравнение*

$$\frac{dz}{dt} = [A(t) + B(t)C(t)]z \tag{9}$$

устойчиво,

$$\int\limits_T^{+\infty} \|Z^{-1}(s)\|[\psi_1(s) + \psi_2(s)\|C(s)\|]\, ds < +\infty,$$

$Z(t)$ *— фундаментальная матрица уравнения* (9), $Z(t_0) = E$, *то при* $u = C(t)x$ *состояние равновесия* $x = 0$ *уравнения* (8) *устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Поскольку $\|Z(t)\| \leq C_0$, $T \leq t < +\infty$, применяя формулу Лагранжа для уравнения (8), получаем

$$\|x(t)\| \leq \|Z(t)\|\|x_0\| + \|Z(t)\| \int\limits_{t_0}^{t} \|Z^{-1}(s)\|[\psi_1(s) + \psi_2(s)\|C(s)\|]\|x(s)\|\, ds, \tag{10}$$
$$t \geq t_0 \geq T.$$

Тогда из (10) на основании неравенства Гронуолла – Беллмана имеем

$$\|x(t)\| \leq C_0\|x_0\| \exp\left(C_0 \int\limits_{t_0}^{+\infty} \|Z^{-1}(s)\|[\psi_1(s) + \psi_2(s)\|C(s)\|]\, ds\right).$$

Отсюда следует устойчивость решения $x = 0$ уравнения (8). Поэтому программное движение $y = \varphi(t)$ уравнения (7) стабилизировано. Стабилизирующее уравнение (6) здесь имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)C(t)[y-\varphi(t)] + B(t)v_0 + f\big(t, y, C(t)[y-\varphi(t)]+v_0\big) + F(t).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что если уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)u \tag{11}$$

стабилизируется управлением $u = C(t)x$, то уравнение (7) также стабилизируется этим управлением. Эта схема напоминает принцип сравнения по отношению понятия стабилизации программного движения [1]. Условие устойчивости уравнения (9) можно заменить условием существования асимптотического равновесия [1]. Тогда $\|Z(t)\| \le C_0$, $\|Z^{-1}(t)\| \le C_0$ при $t \ge t_0 \ge T$, а условие

$$\int\limits_T^{+\infty} \|Z^{-1}(s)\| [\psi_1(s) + \psi_2(s)\|C(s)\|]\, ds < +\infty$$

можно заменить менее стеснительным ограничением для уравнения движения (7)

$$\int\limits_T^{+\infty} [\psi_1(s) + \psi_2(s)\|C(s)\|]\, ds < +\infty.$$

Существование асимптотического равновесия для уравнения (9) вытекает, например, из условия [1]

$$\int\limits_T^{+\infty} [A(s) + B(s)C(s)]\, ds < +\infty.$$

Теорема 2. *Если уравнение* (9) *асимптотически устойчиво и*

$$\int\limits_T^{+\infty} \|Z(s)\| \|Z^{-1}(s)\| [\psi_1(s) + \psi_2(s)\|C(s)\|]\, ds < +\infty,$$

то при $u = C(t)x$ *состояние равновесия* $x = 0$ *уравнения* (8) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Из неравенства (10) получаем

$$\frac{\|x(t)\|}{\|Z(t)\|} \le \|x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} \|Z(s)\| \|Z^{-1}(s)\| [\psi_1(s)+\psi_2(s)\|C(s)\|] \frac{\|x(s)\|}{\|Z(s)\|}\, ds.$$

Поэтому

$$\|x(t)\| \le \|Z(t)\| \|x_0\| \exp\left(\int\limits_{t_0}^{+\infty} \|Z(s)\| \|Z^{-1}(s)\| [\psi_1(s) + \psi_2(s)\|C(s)\|]\, ds\right).$$

Теорема доказана.

В некоторых случаях в определении 1 требуется асимптотическая устойчивость решения φ уравнения (3). Тогда имеет место следующее определение.

Определение 2. *Будем говорить, что решение уравнения* (2) φ *стабилизируется, если существует уравнение типа Каратеодори* (3) *такое, что* φ *является асимптотически устойчивым по Ляпунову решением этого уравнения.*

Из теоремы 2 следует, что решение φ стабилизируемо в смысле определения 2, если выполняются новые требования относительно уравнений (9) и (8). И здесь свойство стабилизируемости от уравнения (9) наследуется уравнением (8).

Пусть требуется построить программное движение φ такое, чтобы $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = x_0$, где x_0 — фиксированный вектор. Эта задача равносильна задаче Коши о существовании решения с начальными данными $(+\infty, x_0)$. Она является некорректной, например, только из условия теоремы Каратеодори не вытекает существование решения $x(t)$, удовлетворяющего условиям $(+\infty, x_0)$. В дальнейшем, если решение существует, будем обозначать его в виде $x(t) = x(t: +\infty, x_0, \nu)$.

Теорема 3. *Пусть при некотором допустимом управлении $\nu \in K$ множество*

$$E = \{x(t: t_0, x_0, \nu) : \nu \in K,\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ T \le t,\ t_0 < +\infty\}$$

абсолютно равномерно ограничено [5]:

$$\|x(t: t_0, x_0, \nu)\| \le M, \quad T \le t, \quad t_0 < +\infty,$$

где x_0 — фиксированный вектор. Тогда задача $(+\infty, x_0)$ имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Поскольку

$$x(t_1 : t_0, x_0, \nu) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s: t_0, x_0, \nu))\, ds,$$

$$x(t_2 : t_0, x_0, \nu) = x_0 + \int_{t_0}^{t_2} f(s, x(s: t_0, x_0, \nu))\, ds,$$

то

$$\|x(t_1 : t_0, x_0, \nu) - x(t_2 : t_0, x_0, \nu)\| \le \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s: t_0, x_0, \nu))\, ds \right| \le$$

$$\le \left| \int_{t_1}^{t_2} \psi(s, M)\, ds \right| < K|t_1 - t_2|,$$

где

$$\psi(s, M) = \sup_{\|x\| \le M} \|f(t, x, \nu(t))\| = \sup E, \qquad k = \sup_s \psi(s, M)$$

на компакте, определенном точками t_1 и t_2. Поэтому множество E равностепенно непрерывно. Отсюда E — компактно. Поэтому существует последовательность $\{t_0^n\}$ такая, что $t_0^n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и $x(t: t_0^n, x_0, \nu) \to x(t)$ равномерно по t на каждом компакте из $[T, +\infty)$. Кроме того, $x(t)$ — решение уравнения (1) и $T \le t < +\infty$. Следовательно, $x(t) = x(t: +\infty, x_0, \nu)$.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Если*

$$\|f(t, x_1, \nu) - f(t, x_2, \nu)\| \le \alpha(t)\|x_1 - x_2\|$$

и

$$\int_T^{+\infty} \alpha(t)\,dt < +\infty,$$

то при условиях теоремы 3 *решение* $x(t:+\infty, x_0, v)$ *единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения

$$x(t:+\infty, x_0, v) = x_0 - \int_t^{+\infty} f\big(s, x(s:+\infty, x_0, v)\big)\,ds,$$

$$\bar{x}(t:+\infty, x_0, v) = x_0 - \int_t^{+\infty} f\big(s, \bar{x}(s:+\infty, x_0, v)\big)\,ds.$$

Тогда

$$u(t) \le \int_t^{+\infty} \alpha(s)u(s)\,ds,$$

где

$$u(t) = \big\| x(t:+\infty, x_0, v) - \bar{x}(t:+\infty, x_0, v) \big\|.$$

Поэтому

$$\frac{\alpha(s)u(s)}{\int_t^{+\infty} \alpha(s)u(s)\,ds} \le \alpha(s).$$

Следовательно,

$$-\int_t^{t_1} \frac{d\left(\int_t^{+\infty} \alpha(s)u(s)\,ds\right)}{\int_t^{+\infty} \alpha(s)u(s)\,ds} \le \int_t^{t_1} \alpha(s)\,ds$$

и

$$u(t) \le \int_t^{+\infty} \alpha(s)u(s)\,ds \le \left(\int_{t_1}^{+\infty} \alpha(s)u(s)\,ds\right) e^{\int_t^{t_1} \alpha(s)\,ds}.$$

Пусть $t_1 \to +\infty$. Тогда $u(t) \equiv 0$ и

$$x(t:+\infty, x_0, v) \equiv \bar{x}(t:+\infty, x_0, v).$$

Теорема доказана.

Пусть K — класс ограниченных допустимых управлений.

Теорема 5. *Пусть функция* f *типа Липшица и*

$$\int_T^{+\infty} \psi_1(s)\,ds < +\infty, \qquad \int_T^{+\infty} \psi_2(s)\,ds < +\infty.$$

Тогда при условиях теоремы 4 *и при* $v, v_1 \in K$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ *такое, что*

$$\big\| x(t:+\infty, x_0, v) - x(t:+\infty, \bar{x}_0, v_1) \big\| < \varepsilon, \quad T \le t < +\infty,$$

при

$$\|x_0 - \bar{x}_0\| < \frac{1-k_0}{2}\varepsilon, \quad \|\nu - \nu_1\| < \frac{1-k_0}{2k_1}\varepsilon,$$

$$k_0 = \int_T^{+\infty} \psi_1(s)\,ds, \quad k_1 = \int_T^{+\infty} \psi_2(s)\,ds.$$

Доказательство. Поскольку

$$u_1(t) \le \|x_0 - \bar{x}_0\| + \int_t^{+\infty} \psi_1(s) u_1(s)\,ds + \int_t^{+\infty} \psi_2(s)\bar{\nu}(s)\,ds,$$

где

$$u_1(t) = \|x(t:+\infty, x_0, \nu) - x(t:+\infty, \bar{x}_0, \nu_1)\|,$$

$$\bar{\nu}(s) = \|\nu(s) - \nu_1(s)\|,$$

то

$$\|u_1\| = \sup_t u_1(t), \quad \|\bar{\nu}\| = \sup_t \bar{\nu}(t).$$

Поэтому

$$\|u_1\| \le \|x_0 - \bar{x}_0\| + \|u_1\| k_0 + \|\bar{\nu}\| k_1.$$

Отсюда

$$\|u_1\| \le \frac{\|x_0 - \bar{x}_0\|}{1-k_0} + \frac{\|\bar{\nu}\| k_1}{1-k_0} < \varepsilon$$

и

$$\|x(t:+\infty, x_0, \nu) - x(t:+\infty, \bar{x}_0, \nu_1)\| < \varepsilon, \quad T \le t < +\infty.$$

Теорема доказана.

Пусть

$$x(t_1 : +\infty, x_0, \nu) = L\nu, \quad S_2 = \{\nu : \nu \in K, \|\nu\| \le r\}.$$

Тогда оператор $L: S_2 \to \mathbb{R}^n$ непрерывен. Поэтому, если $x_1 \in LS_2$, существует управление $\nu \in S_2$, переводящее точку x_1 в точку x_0 при $t \to +\infty$, а если x_1 — внутренняя точка LS_2, то все точки некоторой окрестности x_1 переводятся управлениями из S_2 в x_0 при $t \to +\infty$.

Если точка x_0 задана и требуется найти точку x_1 в момент t_1, т. е. $x(t_1 : +\infty, x_0, \nu)$, то можно применить метод последовательных приближений:

$$x_1 = x_0 - \int_{t_1}^{+\infty} f(s, x_0, \nu)\,ds, \ldots, x_{n+1} = x_0 - \int_{t_1}^{+\infty} f(s, x_n, \nu)\,ds, \ldots.$$

Поскольку

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \int_{t_1}^{+\infty} \psi_1(s)\,ds \|x_n - x_{n-1}\|,$$

при $\int_{t_1}^{+\infty} \psi_1(s)\,ds < 1$ существует

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x(t_1) = x(t_1 : +\infty, x_0, \nu).$$

Следствие 1. *При допущении контролируемости погрешности при вычислении x_1 и определении допустимого управления v контролируется отклонение предельного положения программного движения от точки x_0 при $t \to +\infty$.*

2. Пусть программное движение φ стабилизируется управлением $v_0 \in K$ в смысле определения 1, а функционал качества [6] имеет вид

$$J = \int_T^{+\infty} f_1(t, y(t), v(t))\, dt, \tag{12}$$

где $y(t)$ — решение стабилизирующего уравнения (3).

Определение 3. *Будем говорить, что управление $v_0 \in K$ оптимально стабилизирует программное движение φ, если оно стабилизирует это движение в смысле определения* 1 *и*

$$\int_T^{+\infty} f_1(t, y(t: t_0, y_0, v_0), v_0(t))\, dt \le \int_T^{+\infty} f_1(t, y(t: t_0, y_0))\, dt,$$

где $y(t: t_0, y_0, v_0)$ — решение уравнения (2) *с начальными данными (t_0, y_0) и управлением v_0, $y(t: t_0, y_0)$ — решение произвольного стабилизирующего уравнения* (3), $\|y_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$, $T \le t < +\infty$, δ — *фиксированное положительное число. Если стабилизирующее уравнение типа* (1), *то будем говорить, что оптимальная стабилизация осуществляется в классе допустимых управлений K.*

Применим замену (4), тогда новое уравнение движения имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = G(t, x, u), \tag{13}$$

а функционал качества (12) преобразуется в функционал

$$J = \int_T^{+\infty} f_1(t, x + \varphi(t), u + v_0)\, dt = \int_T^{+\infty} G_0(t, x, u)\, dt,$$

где

$$G_0(t, x, u) = f_1(t, x + \varphi(t), u + v_0).$$

Поэтому задача оптимальной стабилизации программного движения $y = \varphi(t)$ перейдет в задачу оптимальной стабилизации решения $x = 0$ уравнения движения (13) с качеством

$$\int_T^{+\infty} G_0(t, x, u)\, dt, \qquad \|x_0\| \le \delta. \tag{14}$$

Предположим, что $\varphi_1 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ — непрерывные отображения $x = \varphi_1(z)$, $u = \varphi_2(p)$ и

$$\overline{G}_0(t, z, p) = G_0(t, \varphi_1(z), \varphi_2(p)),$$

$$\overline{G}_0(t, z_1, p_1) \le \overline{G}_0(t, z_2, p_2), \quad z_1 \le z_2, \quad p_1 \le p_2.$$

Теорема 6. *Пусть управление $u_0 \in K$ стабилизирует движение $x = 0$ уравнения* (13) *и существует непрерывная функция*

$$V: [T, +\infty) \times [T, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$$

такая, что $V(t, t_0, y) \to +\infty$ *при* $\|y\| \to +\infty$ *равномерно по* t *и* t_0; *для любых решений* $x(t: t_0, x_0, u_0)$ *и* $x(t: t_0, x_0, u)$ *и любых* $u \in K$

$$V(t, t_0, x(t: t_0, x_0, u_0) - x(t: t_0, x_0, u)) \le \rho(r)$$

при $\|x_0\| \le r$, $T \le t, t_0 < +\infty$, $\rho : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $\rho(r) \to 0$ *при* $r \to 0$. *Тогда если функционал качества* J *имеет вид*

$$\int_T^{+\infty} \overline{G}_0\big(t, \|x(t: t_0, x_0, u_0) - x(t: t_0, x_0, u)\|, \|u_0(t) - u(t)\|\big)\, dt, \tag{15}$$

то при $\delta = r$ *управление* u_0 *оптимально стабилизирует решение* $x = 0$ *с качеством* (15) *в классе* K.

Доказательство. Поскольку для решений $x(t: t_0, x_0, u_0)$ и $x(t: t_0, x_0, u)$, $u_0, u \in K$, выполняется неравенство

$$V(t, t_0, x(t: t_0, x_0, u_0) - x(t: t_0, x_0, u)) \le \rho(r),$$

$\rho(r) \to 0$ при $r \to 0$, $T \le t, t_0 < +\infty$, $\|x_0\| \le r$ и $V(t, t_0, y) \to +\infty$ равномерно по t и t_0 при $\|y\| \to +\infty$, то

$$\|x(t: t_0, x_0, u_0) - x(t: t_0, x_0, u)\| \le M(r)$$

при всех $T \le t, t_0 < +\infty$, $\|x_0\| \le r$, $u_0, u \in K$, $M(r) \to 0$ при $z \to +\infty$. Тогда

$$J_0 = \int_T^{+\infty} \overline{G}_0(t, 0, 0)\, dt \le \int_T^{+\infty} \overline{G}_0\big(t, \|x(t: t_0, x_0, u_0) - x(t: t_0, x_0, u)\|, \|u_0(t) - u(t)\|\big)\, dt \tag{16}$$

при всех $u \in K$. Кроме того, все $u \in K$ стабилизируют программное движение $x = 0$.

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Здесь функционал J имеет пределы интегрирования T и $+\infty$, а не t_0 и $+\infty$, как это принято обычно [6]. Начальный момент движения здесь произволен, но фиксирован. В частности, T может быть равно t_0: $T = t_0$, и тогда задача оптимальной стабилизации становится классической [6].

***Замечание* 2.** Для построения функции V можно использовать идею из работы [7]. Пусть $\|G(t, y, u)\| \le \lambda(t, \|y\|)$, $\lambda(t, 0) \equiv 0$ при всех $y \in \mathbb{R}^n$, $u \in K$, $\lambda \in C([T, +\infty) \times [0, +\infty), [0, +\infty))$, $\lambda(t, \alpha_1) \le \lambda(t, \alpha_2)$ при $\alpha_1 \le \alpha_2$, $t \ge T$. Предположим также, что интеграл

$$J(\alpha) = \int_T^{+\infty} \lambda(s, \alpha)\, ds$$

существует при всех $\alpha \ge 0$ и

а) функция $F(r) = \int_\beta^r (J(\alpha))^{-1}\, d\alpha$ строго монотонно стремится к $+\infty$ при $r \to +\infty$, $\beta \ge 0$;

б) функция $q(t, \alpha) = \int_T^t \dfrac{\lambda(s, \alpha)}{J(\alpha)}\, ds$ определена и непрерывна при $t \ge T$, $q(t, \alpha_1) \le q(t, \alpha_2)$ при $\alpha_1 \le \alpha_2$.

Тогда

$$V(t, t_0, y) \stackrel{\text{df}}{=} V_1(t, t_0, \|y\|) = \exp\left(-q(t, \|y\|)\right) F(\|y\|),$$

и для этой функции выполняются все условия теоремы 6 с функционалом качества (15).

Следствие 2. *Из теоремы* 4 *следует, что задача об оптимальной стабилизации для программного движения в условиях теоремы* 6 *корректна лишь в смысле определения* 3.

Действительно, в противном случае решение $x = 0$ уравнения (13) должно быть асимптотически устойчивым при любом $u \in K$, а это исключает единственность решения $x(t: t_0, +\infty, 0)$.

Задача оптимальной стабилизации имеет простое решение, если уравнение движения (13) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \tag{17}$$

где $A(t)$ — $(n \times n)$-непрерывная матрица, $B(t)$ — $(n \times m)$-непрерывная матрица, $u \in K$, $u = u(t, x) = C(t)x$, $C(t)$ — $(m \times n)$-непрерывная матрица. Функционал качества имеет вид (15).

Тогда пусть

$$J(\alpha, k_0) = k_0\alpha, \quad k_0 = \int_T^{+\infty} \left(\|A(t) + B(t)C(t)\|\right) dt < +\infty.$$

В этом случае решение $x = 0$ уравнения (17) стабилизируется всеми допустимыми управлениями u из K [7] и функционал (15) имеет наименьшее значение при $u = u_0$.

1. *Воскресенский Е. В.* Асимптотические методы: Теория и приложения. – Саранск: Средневолж. мат. о-во, 2001. – 300 с.
2. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
4. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1975. – 430 с.
5. *Воскресенский Е. В.* Аттракты обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 10. – С. 1311 – 1323.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
7. *Воскресенский Е. В.* Асимптотическое равновесие, периодические решения и прямой метод Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 6. – С. 729 – 732.

Получено 12.04.2002