УДК 517.9

О. Ю. Волкова (Акад. жил.-ком. хоз-ва, Киев)

МОНОТОННОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭНТРОПИИ ДЛЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ УНИМОДАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

For some special class of one-parameter families of unimodal maps determined as $f_t(x)\colon [0, 1] \to \to [0, 1]$, $f_t(x) = atx/(x+t)$, $0 \le x \le 1/2$, for $t \in [0, 1/(a-2)]$, $a > 2$, the topological entropy $h(f_t)$ was shown to be monotone. We prove that there exists a class of one-parameter families of unimodal maps f_t including the considered family and establish conditions under which the topological entropy $h(f_t)$ is a function monotonically increasing in parameter.

Для деякого спеціального класу однопараметричних сімей унімодальних відображень $f_t(x)$: $[0, 1] \to [0, 1]$, $f_t(x) = atx/(x+t)$, $0 \le x \le 1/2$, для $t \in [0, 1/(a-2)]$, $a > 2$, було встановлено, що топологічна ентропія $h(f_t)$ — монотонно зростаюча за параметром функція. У цій роботі доведено, що існує деякий клас однопараметричних сімей унімодальних відображень f_t, до якого належить наведена вище сім'я, а також встановлено умови, при яких топологічна ентропія $h(f_t)$ — монотонно зростаюча за параметром функція.

1. Введение. Пусть $I \subset R$ — произвольный компактный интервал и $f\colon I \to I$ — некоторое непрерывное отображение интервала I в себя. Итерации отображения f обозначают символом $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n раз, $f^0 = \mathrm{id}$). Орбитой или траекторией точки $x \in I$ называется множество $\mathrm{Orb}\, f(x) = \{ f^n(x)\colon n = 0, 1, 2, \ldots \}$. Точка x называется периодической периода p, если $f^p(x) = x$ и $f^i(x) \ne x$ для $1 \le i < p$. Каждая из точек $x_i = f^i(x)$, $i = 1, 2, \ldots p-1$, также является периодической периода p, и точки $x, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ образуют периодическую орбиту или цикл периода p.

Динамическая система $\{f^n, I, Z^+\}$ порождается итерациями отображения f. В данной работе рассматриваются такие динамические системы, в которых f — унимодальное отображение.

Унимодальным отображением называется непрерывная функция $f\colon I \to I$, для которой существует единственная точка $c \in \mathrm{int}\, I$ такая, что f строго возрастает (убывает) слева от c и строго убывает (возрастает) справа от c. В этом случае точку c называют критической точкой отображения f. Будем рассматривать только такие унимодальные отображения, для которых критическая точка c отображения f — точка максимума и $f(c) > c$. Также, если $I = [0, 1]$, будем предполагать, что $f(0) = f(1) = 0$.

Через U обозначим семейство всех унимодальных отображений.

Пример 1. *Квадратичное отображение вида $f_t(x) = tx(1-x)$ является унимодальным для всех $t \in (0, 4]$ (с критической точкой $c = 1/2$).*

При изучении динамической системы важно знать, насколько сложна ее динамика: как много различных орбит имеет динамическая система, как быстро она перемешивает различные множества, хаотична она или проста и т. д. Существуют различные способы получения оценки сложности (хаотичности) динамической системы. Одним из способов получения количественной оценки является вычисление топологической энтропии h. Определение топологической энтропии см., например, в [1].

Для кусочно-монотонных (и в частности, для унимодальных) отображений существует удобная формула для вычисления топологической энтропии (теорема 4.2.4 [1]):

$$h(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log c_n}{n},$$

где c_n — число максимальных интервалов монотонности отображения f^n.

Очевидно, что для унимодальных отображений топологическая энтропия находится в замкнутом интервале $[0, \log 2]$.

Если динамическая система описывает некоторый процесс или явление, то, как правило, эта динамическая система зависит от параметров. Их изменение может приводить к различным качественным перестройкам в системе, в частности к появлению новых периодических орбит. В данной работе рассматривается наиболее простой случай — однопараметрические семейства унимодальных отображений.

Будем изучать топологическую энтропию $h(\cdot)$ как действительнозначную функцию на пространстве U всех унимодальных отображений интервала I в себя с топологией равномерной сходимости, т. е. $h(f_t) := h(t) : [t_1, t_2] \to [0, \log 2]$.

При изучении однопараметрических семейств унимодальных отображений важной задачей является исследование зависимости топологической энтропии от параметра, например: *если отображение f_t монотонно зависит от параметра t, то следует ли из этого, что топологическая энтропия отображения f_t будет монотонно зависеть от параметра t?*

Существует контрпример (см. [2]), который показывает, что если f — выпуклое отображение, симметричное и имеющее отрицательный шварциан (определение шварциана см. ниже), то для некоторого семейства отображений f_t топологическая энтропия не является монотонной функцией параметра.

Положительный ответ на приведенную выше проблему монотонности топологической энтропии был дан лишь для нескольких семейств. В частности, монотонность энтропии доказана для некоторых полиномиальных семейств отображений: $f_t(x) = t - x^2$ (см. [3–5]), $f_t(x) = t - x^l$ для $l = 4, 6, 8, \ldots$ [6], $f_t(x) = tx^2(1-x)$ [4]. Заметим, что отображения из перечисленных выше семейств имеют отрицательный шварциан. Шварциан отображения f определяется следующим образом: $Sf(x) := \dfrac{D^3 f(x)}{Df(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{D^2 f(x)}{Df(x)}\right)^2$, где D обозначает производную по x. Также заметим, что все известные доказательства для перечисленных выше семейств используют методы комплексного анализа, и на данный момент не известно ни одного „действительного" доказательства.

Монотонность энтропии доказана для некоторых семейств кусочно-линейных отображений (см. [4, 5, 7]). Заметим, что кусочно-линейные отображения имеют нулевой шварциан.

Существует несколько контрпримеров к проблеме монотонности топологической энтропии (см. [2, 8, 9]).

На данный момент для семейств вида $t \cdot f(x)$ существует следующая гипотеза.

Гипотеза 1 [1, с. 165]. *Если f: $[0, 1] \to [0, 1]$ — унимодальное отображение, $Sf < 0$ и f — выпуклое, то топологическая энтропия отображения $f_t(x) = t \cdot f(x)$ — монотонная функция параметра t.*

Среди отображений с нулевым шварцианом важными и недостаточно изученными являются отображения, которые задаются дробно-линейными функциями.

Для семейств дробно-линейных отображений вида $t \cdot f(x)$ не известно, является ли топологическая энтропия монотонной функцией параметра t. Однако имеется следующий результат. Для семейства унимодальных (с нулевым шварцианом) отображений $f_t\colon [0, 1] \to [0, 1]$ вида

$$f_t(x) = \begin{cases} \dfrac{atx}{x+t}, & \text{если } x \le 1/2; \\ \dfrac{at(1-x)}{1-x+t}, & \text{если } x > 1/2, \end{cases} \tag{1}$$

$$t \in \left[0, \frac{1}{a-2}\right], \quad a > 2,$$

М. Цуджи [10] показал, что топологическая энтропия является монотонно возрастающей функцией параметра t. Вообще говоря, М. Цуджи рассмотрел специальный класс однопараметрических семейств унимодальных отображений f_t, который включает семейство (1), и показал, что топологическая энтропия f_t — монотонно возрастающая функция параметра t.

Использовав предложения теоремы М. Цуджи [10], покажем, что существует более широкий класс однопараметрических семейств унимодальных отображений $f_t\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $t \in [t_1, t_2]$, вида

$$f_t(x) = \begin{cases} \dfrac{G(t)x}{x + G(t)F(x)}, & \text{если } x \le 1/2; \\ \dfrac{G(t)(1-x)}{(1-x) + G(t)F(1-x)}, & \text{если } x > 1/2, \end{cases} \tag{2}$$

который включает семейство (1) и такой, что при определенных условиях на $F(x)$ и $G(t)$ (приведенных в п. 4) топологическая энтропия f_t — монотонно возрастающая функция параметра t. Кроме того, для каждого $t \in [t_1, t_2]$ отображение f_t является выпуклым и удовлетворяет условию $Sf_t \le 0$.

2. Нидинг-теория. Напомним некоторые определения и факты из теории нидингов [3, 11].

Пусть f — унимодальное отображение, определенное выше. Нидинг-инвариантом отображения f называется бесконечная последовательность $K(f) = (e_1, e_2, \ldots)$ символов L, C и R, определенных следующим образом:

$$e_k = \begin{cases} L, & \text{если } f^k(c) < c; \\ C, & \text{если } f^k(c) = c; \\ R, & \text{если } f^k(c) > c. \end{cases}$$

Известно, что топологическая энтропия унимодального отображения зависит только от его нидинг-инварианта, и эта зависимость монотонна в смысле знакового лексикографического порядка, определенного для последовательностей нидинг-символов (см., например, [3, 11]).

3. Условия для монотонности нидинг-инварианта и топологической энтропии. Рассмотрим унимодальное отображение $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$.

Унимодальное отображение f называют S-унимодальным, если:

1) $f \in C^3$ и удовлетворяет условию $Sf(x) \le 0$ для каждого $x \ne c$;

2) критическая точка c — неплоская, т. е. существуют константы $l > 1$ и $L > 1$ такие, что $\frac{|x-c|^{l-1}}{L} \le |f'(x)| \le L|x-c|^{l-1}$ для всех $x \in [0, 1]$ (в случае, когда $l = 2$, это условие эквивалентно невырожденности критической точки c, т. е. $f''(c) \ne 0$);

3) $|f'(0)| > 1$.

Пусть R — замкнутый интервал, внутренность которого содержит интервал $[0, 1]$. Будем называть унимодальное отображение $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ S-унимодальным с виртуальной областью R, если существуют замкнутые подынтервалы $J_- \supset [0, c]$, $J_+ \supset [c, 1] \in \mathbb{R}$ и C^1-отображения $f_-\colon J_- \to \mathbb{R}$, $f_+\colon J_+ \to \mathbb{R}$ такие, что:

A_1) образы $f_-(J_-)$ и $f_+(J_+)$ содержат R;

A_2) f_- и f_+ совпадают с f на $[0, c]$ и $[c, 1]$ соответственно;

A_3) f_- и $f_+ \in C^3$ и удовлетворяют $Sf_-(x) \le 0$ и $Sf_+(x) \le 0$ на J_- и J_+ соответственно.

***Пример* 2.** *Если* $1 < 1 + \beta \le \alpha \le 1 + 2\beta$, *то отображение*

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x}{x+\beta}, & \text{если} \quad x \le 1/2; \\[2mm] \dfrac{\alpha(1-x)}{1-x+\beta}, & \text{если} \quad x > 1/2, \end{cases}$$

S-унимодальное с виртуальной областью $[-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ *для достаточно малого* $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим семейство унимодальных отображений $f_t\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $t \in [t_1, t_2]$. Предположим, что:

C_1) отображения f_t имеют единственную точку экстремума $c \in (0, 1)$;

C_2) отображение $(x, t) \mapsto f_t(x)$ принадлежит классу C^1;

C_3) для любого $t \in (t_1, t_2)$ существует замкнутый интервал R_t, внутренность которого содержит $[0, 1]$, и отображение f_t является S-унимодальным с виртуальной областью R_t.

Из предположения C_2) мы можем определить два векторных поля $v_-(x) = V_-(x)(d/dx)$ и $v_+(x) = V_+(x)(d/dx)$ на $[0, f_t(c)]$ следующим образом:

$$V_-(x) = (\partial/\partial t) f_t(x_-) \quad \text{и} \quad V_+(x) = (\partial/\partial t) f_t(x_+),$$

где $x_- \in [0, c]$ и $x_+ \in [c, 1]$ — единственные точки такие, что $f_t(x_+) = f_t(x_-) = x$. Векторные поля $v_-(x)$, $v_+(x)$ называют деформациями векторных полей семейства f_t для параметра t.

C^2 — векторное поле $v(x) = V(x)(d/dx)$ на интервале $[a, b] \subset [0, 1]$ называют S_*-выпуклым (соответственно S_*-вогнутым), если оно удовлетворяет следующим условиям:

B_1) $V(a) = 0$, $DV(a) = 0$ и $D^2V(a) > 0$ (соответственно $V(b) = 0$, $DV(b) = 0$ и $D^2V(b) < 0$);

B_2) $S_*V(x) := 2V(x)D^2V(x) - (DV(x))^2 \ge 0$ для любого $x \in (a, b)$.

Кроме условий $C_1) - C_3$) предположим, что выполняется следующее условие:

C_4) деформации векторных полей v_- и v_+ являются S_*-выпуклыми на $[0, f_t]$ для каждого параметра $t \in (t_1, t_2)$.

Теорема 1 [10]. *Если выполняются условия $C_1)-C_4)$, то нидинг-инвариант и топологическая энтропия отображения f_t являются монотонно возрастающими функциями параметра t.*

4. Монотонность топологической энтропии для одного класса унимодальных отображений. Докажем, что существует специальный класс однопараметрических семейств унимодальных отображений, для которого топологическая энтропия — монотонно возрастающая функция параметра.

Теорема 2. *Для семейства унимодальных отображений $f_t(x)\colon [0,1] \to \to [0,1]$, $t \in [t_1, t_2]$:*

$$f_t(x) = \begin{cases} x\,h(t,x), & \text{если} \quad x \le 1/2; \\ (1-x)\,h(t,1-x), & \text{если} \quad x > 1/2, \end{cases}$$

где $h(t,x) = \dfrac{G(t)}{x + G(t)F(x)}$, $x \in [0, 1/2]$, $F\colon [0,1/2] \to \mathbb{R}$, $G\colon [t_1,t_2] \to \mathbb{R}$, топологическая энтропия является монотонно возрастающей функцией параметра t, если выполняются следующие условия:

i) $F(x) \ge x F'(x)$;

ii) $F'(x) > -1/G(t)$, $F''(x) \ge 0$, $F'''(x) \ge 0$;

iii) $G'(t) > 0$

(*если $x \in [1/2, 1]$, то условия* i) – iii) *теоремы* 2 *аналогичные, только аргументом функции F является $(1-x)$*).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение условий $C_1)-C_4)$ теоремы 1. Условия $C_1)-C_3)$ очевидны, поэтому проверим только условие $C_4)$.

Определим функцию $V_-(x) = \dfrac{\partial}{\partial t} f_t(f_t^{-1}(x))$, $x \in [0,1]$, т. е.

$$V_-(x) = f_t^{-1}(x)\,h_t'(t, f_t^{-1}(x)) = f_t^{-1}(x)\frac{f_t^{-1}(x)\,G'(t)}{\left(f_t^{-1}(x) + G(t)F(f_t^{-1}(x))\right)^2},$$

где $h_t'(t, f_t^{-1}(x))$ обозначает производную по t.

Для доказательства выполнения условия $C_4)$ теоремы 1 необходимо убедиться в выполнении условий $B_1)$ и $B_2)$.

$B_1)$ $V_-(0) = 0$,

$$D V_-(x) = \frac{1}{\dfrac{d}{dx} f_t(f_t^{-1}(x))} h_t'(t, f_t^{-1}(x)) + f_t^{-1}(x)\frac{d}{dx} h_t'(t, f_t^{-1}(x)),$$

$$D V_-(0) = \frac{h_t'(t, f_t^{-1}(0))}{h(t, f_t^{-1}(0))} = 0,$$

$$D^2 V_-(x) = \frac{2}{\dfrac{d}{dx} f_t(f_t^{-1}(x))} \frac{d}{dx} h_t'(t, f_t^{-1}(x)) - \frac{\dfrac{d^2}{dx^2} f_t(f_t^{-1}(x))\,h_t'(t, f_t^{-1}(x))}{\left(\dfrac{d}{dx} f_t(f_t^{-1}(x))\right)^3} +$$

$$+ f_t^{-1}(x)\frac{d^2}{dx^2} h_t'(t, f_t^{-1}(x)),$$

$$D^2 V_-(0) = \frac{2}{\dfrac{d}{dx} f_t(f_t^{-1}(0))} \frac{d}{dx} h_t'(t, f_t^{-1}(0)) = \frac{2\dfrac{d}{dx} h_t'(t, f_t^{-1}(0))}{h(t, f_t^{-1}(0))} > 0,$$

поскольку

$$\frac{d}{dx}h_t'(t, f_t^{-1}(0)) = \frac{G'(t)}{G^2(t)F(0)} > 0.$$

$B_2')$ $2V_-(x)D^2V_-(x) - (DV_-(x))^2 = 0.$

Последнее равенство следует из того, что $V_-(x) = \dfrac{G'(t)}{G^2(t)}x^2$ для всех $x \in [0, 1]$. Для функции $V_+(x)$ условие $C_4)$ проверяется аналогично.

Кроме выполнения перечисленных выше условий для всех $t \in [t_1, t_2]$ отображение $f_t(x)$ является выпуклым на $[0, 1]$ и удовлетворяет условию $Sf_t(x) \le 0$, где Sf_t — шварциан отображения f_t. Проверим, например, выполнение отрицательности шварциана для $x \in [0, 1/2]$. Поскольку

$$Df_t(x) = \frac{G^2(t)(F(x) - xF'(x))}{(x + G(t)F(x))^2},$$

$$D^2f_t(x) = \frac{G^2(t)(-xF''(x)(x+G(t)F(x)) - 2(1+G(t)F'(x))(F(x)-xF'(x)))}{(x+G(t)F(x))^3},$$

$$D^3f_t(x) = \frac{G^2(t)\left(6(1+G(t)F'(x))^2(F(x)-xF'(x))\right)}{(x+G(t)F(x))^4} +$$

$$+ \frac{G^2(t)x(x+G(t)F(x))(3F''(x)(1+G(t)F'(x)) - F'''(x)(x+G(t)F(x)))}{(x+G(t)F(x))^4} -$$

$$- \frac{G^2(t)(3G(t)F''(x)(x+G(t)F(x))(F(x)-xF'(x)))}{(x+G(t)F(x))^4},$$

то

$$Sf_t(x) = \frac{-3x^2F''(x) - 6F''(x)(F(x)-xF'(x)) - 2xF'''(x)(F(x)-xF'(x))}{2(F(x)-xF'(x))^2} \le 0,$$

если справедливы условия i) – iii) теоремы 2.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $f_t(x)$ — отображение из теоремы 2 и $F(x) = a_1x^m + a_2x^{m-1} + a_3x^{m-2} + \ldots + a_{m+1}$, $G(t) = at$, $a > 2$. Тогда если:*

1) *для каждого $m > 1$*

$$\frac{(m-1)a_1}{2^{m-2}} + \frac{(m-2)a_2}{2^{m-3}} + \frac{(m-3)a_3}{2^{m-4}} + \ldots = 4a_{m+1}$$

и

2) *для каждого $m \ge 0$*

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \ge 0, \quad a_{m+1} > 0,$$

то топологическая энтропия f_t — монотонно возрастающая функция параметра t.

Доказательство. Поскольку $F'(x) = a_1mx^{m-1} + a_2(m-1)x^{m-2} + a_3(m-2)\times x^{m-3} + \ldots$ и выполняются условия 1 и 2 теоремы 3, то $F(x) \ge xF'(x)$ для всех $x \in [0, 1/2]$ (условие i) теоремы 2). Напомним, что для $x \in [1/2, 1]$ условие i) эквивалентно условию $F(1-x) \ge (1-x)F'(1-x)$. Условие 2 теоремы 3 гарантирует выполнение условий ii), iii) теоремы 2. Следовательно, согласно теореме 2 топологическая энтропия отображения f_t — монотонно возрастающая функция параметра t.

Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров семейств отображений, удовлетворяющих условиям теорем 2 и 3, для которых топологическая энтропия — монотонно возрастающая функция параметра.

Если $F(x) = 1/a$, $G(t) = at$, то для $a > 2$ семейство отображений $f_t(x)$ будет иметь вид (1) (см. п. 1). Напомним, что семейство (1) является однопараметрическим семейством дробно-линейных отображений с нулевым шварцианом. Насколько известно автору, на данный момент указанное семейство является *единственным* семейством дробно-линейных отображений, для которого доказана монотонность топологической энтропии.

Приведем еще одно семейство унимодальных отображений $f_t(x)$ с указанными в теореме 2 свойствами.

Пример 3. *Пусть* $F(x) = 1/2a + (2/a)x^2$, $G(t) = at$. *Тогда для* $a > 2$ *семейство отображений* $f_t(x)$ *будет иметь вид*

$$f_t(x) = \begin{cases} \dfrac{atx}{2tx^2 + x + t/2}, & \text{если} \quad x \le 1/2; \\ \dfrac{at(1-x)}{2t(1-x)^2 + (1-x) + t/2}, & \text{если} \quad x > 1/2, \end{cases} \qquad (3)$$

$$t \in \left[0, \frac{1}{a-2}\right].$$

Согласно теореме 2, для всех $t \in [0, 1/(a-2)]$ отображение вида (3) — выпуклое и имеющее отрицательный шварциан.

Поскольку все известные ранее примеры семейств с отрицательным шварцианом, для которых энтропия монотонна, были полиномиальными семействами (см. п. 1), пример 3 показывает монотонность энтропии для *неполиномиального семейства* унимодальных отображений с отрицательным шварцианом.

1. *Alseda L., Llibre J., Misiurewicz M.* Combinatorial dynamics and entropy in one dimension // Adv. Ser. in Nonlinear Dynamics. – Singapore: World Sci., 1993. – Vol. 5.
2. *Bruin H.* Non-monotonicity of entropy of interval maps // Phys. Lett. A. – 1995. – **202**. – P. 359–362.
3. *Milnor J., Thurston W.* On iterated maps of the interval // Lect. Notes Math. – 1988. – **1342**. – P. 465–563.
4. *Tsujii M.* A simple proof of monotonicity of entropy in the quadratic family using Ruelle operator. – Banach Centre Preprint, 1997. – 8p.
5. *Tsujii M.* A simple proof for monotonicity of entropy in the quadratic family // Ergodic Theory and Dynamical Systems. – 2000. – **20**. – P. 925–933.
6. *Douady A., Hubbard J. H.* Etudes dynamique des polynomes complexes. – Publ. Math. d'Orsay, 1984–1985.
7. *Brucks K., Misiurewicz M., Tresser C.* Monotonicity properties of the family of trapezoidal maps // Communs Math. Phys. – 1991. – **137**. – P. 1–12.
8. *Коляда С. Ф.* Однопараметрические семейства отображений интервала с отрицательным шварцианом, для которых нарушается монотонность бифуркаций // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 258–261.
9. *Zdunik A.* Entropy of transformations of the unit interval // Fund. Math. – 1984. – **124**. – P. 235–241.
10. *Tsujii M.* Monotonicity of kneading sequence for some families of unimodal maps. – Hokkaido Univ. Preprint, 2001.
11. *Collet P., Eckmann J.-P.* Iterated maps on the interval as dynamical systems. – Boston: Birkhauser, 1980. – 248 p.

Получено 20.12.2001