УДК 517.946

І. Д. Пукальський (Чернівец. нац. ун-т)

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ НЕРІВНОМІРНО ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

In spaces of classical functions with power weight, we prove the existence and uniqueness of solution of the Cauchy problem for nonuniformly parabolic equations without restriction to a power order of coefficient degeneration. We obtain an estimate of solution of the problem in the corresponding spaces.

У просторах класичних функцій з степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку задачі Коші для нерівномірно параболічних рівнянь без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів. Знайдено оцінку розв'язку задачі у відповідних просторах.

Фундаментальні матриці розв'язків параболічних систем і їх застосування для дослідження коректної розв'язності задачі Коші вивчались у монографії [1]. У праці [2] досліджено фундаментальний розв'язок і задачу Коші для параболічного рівняння з певним степеневим виродженням у коефіцієнтах рівняння.

У даній статті у просторі класичних функцій із степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку задачі Коші для нерівномірно параболічних рівнянь без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів рівняння.

Постановка задачі і основний результат. Розглянемо в області $\Pi = (0, T) \times E_n$ задачу Коші для параболічного рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$(Lu)(t, x) \equiv \left[D_t - \sum_{|k| \le 2b} A_k(t, x) D_x^k \right] u(t, x) = f(t, x), \tag{1}$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$D_x^k = D_{x_1}^{k_1} D_{x_2}^{k_2} \ldots D_{x_n}^{k_n}, \quad |k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n.$$

Порядок особливості коефіцієнтів оператора L буде характеризувати функція $a(m, x)$: $a(m, x) = |x - x^{(0)}|^m$, якщо $|x - x^{(0)}| \le 1$; $a(m, x) \equiv 1$, якщо $|x - x^{(0)}| > 1$,

$$|x - x^{(0)}| = \left[\sum_{l=1}^{n} \left(x_l - x_l^{(0)} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Нехай $\overline{\Omega}$ — довільна замкнена підобласть Π, $P(t, x)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(2)})$ і $P_3(t^{(1)}, x^{(2)})$— довільні точки із $\overline{\Omega}$. Означимо простори, в яких вивчається задача (1), (2).

Позначимо через $C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; q; \Pi)$ множину функцій $u(t, x)$, які визначені в $\overline{\Omega}$, мають неперервні частинні похідні в області $\overline{\Omega}^0 = \overline{\Omega} \setminus (t, x^{(0)})$ вигляду $D_t^j D_x^k u$, $2bj + |k| \le 2b$, для яких норма

$$|u; \gamma, \beta; q; \Pi|_{2b+\alpha} \equiv |u; \gamma, \beta; q; \Pi|_{2b} + [u; \gamma, \beta; q; \Pi]_{2b+\alpha} \equiv$$

$$\equiv \sup_{(t, x) \in \Omega} \sum_{2bj + |k| \le 2b} a(|k|(\gamma - \beta) + (2bj + q)\gamma, x) \left| D_t^j D_x^k u(t, x) \right| +$$

$$+ \sup_{P_1, P_3 \in \Omega} \sum_{2bj + |k| = 2b} a((|k| + \alpha)(\gamma - \beta) + (2bj + q)\gamma, \tilde{x}) \left| x^{(1)} - x^{(2)} \right|^{-\alpha} \times$$

$$\times \left| D_t^j D_x^k u(P_1) - D_t^j D_x^k u(P_3) \right| +$$

$$+ \sup_{P_1, P_3 \in \Omega} \sum_{2bj+|k|=2b} a\Big(|k|(\gamma-\beta) + (2bj+q+\alpha)\gamma, x^{(2)}\Big) \times$$

$$\times \left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\alpha/2b} \left|D_t^j D_x^k u(P_2) - D_t^j D_x^k u(P_3)\right|,$$

$$|u|_{\Pi} \equiv \sup_{\Omega} |u|,$$

$$a(m, \tilde{x}) = \min\Big(a(m, x^{(1)}), a(m, x^{(2)})\Big),$$

$$\gamma \geq 0, \quad q \geq 0, \quad \beta \in (-\infty, +\infty), \quad \alpha \in (0, 1),$$

є скінченною.

Нехай $C^{\alpha}(m; \Pi)$ — множина функцій $u(t, x)$, визначених в $\overline{\Omega}^0$, які мають скінченну норму

$$\|u; m, \Pi\|_{\alpha} = \sup_{(t,x)\in\Omega} a(m, x)|u(t, x)| + \sup_{P_1, P_3 \in \Omega} a(m+\alpha, \tilde{x})\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right|^{-\alpha} \times$$

$$\times |u(P_1) - u(P_3)| + \sup_{P_1, P_3 \in \Omega} a(m, x^{(2)})\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\alpha/2b} |u(P_2) - u(P_3)|.$$

Будемо вважати, що для задачі (1), (2) виконуються такі умови:

а) коефіцієнти рівняння $A_k(t, x) \in C^{\alpha}(\alpha_{|k|}; \Pi)$, при $|k| \leq 2b - 1$ $A_k(t, x) \in \in C^{\alpha}(2b\beta; \Pi)$, при $|k| = 2b$ $\alpha_{|k|} \geq 0$, $\beta \in (-\infty, +\infty)$ і виконується умова рівномірної параболічності [1, с. 9] для рівняння

$$\left[D_t - a(2b\beta, x) \sum_{|k|=2b} A_k(t, x) D_x^k\right] u(t, x) = f_1(t, x); \tag{3}$$

б) функції $f(t, x) \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; 2b; \Pi)$, $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; E_n)$,

$$\gamma = \max\left(1 + \beta, \max_{|k| \leq 2b-1} \frac{\alpha_{|k|} - |k|\beta}{2b - |k|}\right).$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1), (2) *виконано умови* а), б). *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *для якого виконується нерівність*

$$|u; \gamma, \beta; 0; \Pi|_{2b+\alpha} \leq C\big(|f; \gamma, \beta; 2b; \Pi|_{\alpha} + |\varphi; \gamma, \beta; 0; E_n|_{2b+\alpha}\big), \tag{4}$$

де C залежить від n, α, T і норми коефіцієнтів оператора L.

Інтерполяційні нерівності та допоміжна теорема. Для функцій із простору $C^{N+\alpha}(\gamma, 0; 0; \Pi)$ мають місце інтерполяційні нерівності.

Лема 1. *Якщо $u \in C^{N+\alpha}(\gamma, 0; 0; \Pi)$, $N \geq 1$, то для довільного $\varepsilon \in (0, 1)$ існує така стала $C(\varepsilon)$, що виконуються нерівності*

$$|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_{|k|} \leq \varepsilon^{N-|k|+\alpha}[u; \gamma, 0; 0; \Pi]_{N+\alpha} + C(\varepsilon)|u|_{\Pi}, \quad |k| \leq N. \tag{5}$$

Доведення. Виберемо в області Π довільну фіксовану точку $P(\tau, x)$ і розглянемо на гіперплощині $t = \tau$ кулю $K(\varepsilon, P)$ з центром у точці P і радіусом $\varepsilon a(\gamma, x)$. Нехай B_1 і B_2 — точки, які лежать на кінцях одного із діаметрів кулі $K(\varepsilon, P)$, паралельного одній із осей (наприклад, осі Ox_i). За теоремою про „середнє" на вибраному діаметрі існує така точка $R(\tau, y)$, що при $|k| = N$ маємо

$$D_x^{k-1}u(B_1) - D_x^{k-1}u(B_2) = D_x^{k-1}\left(D_{x_i}u(R)\right)\left(x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\right).$$

Звідси

$$a(N\gamma, y)\left|D_y^k u(R)\right| \le \frac{C}{\varepsilon}|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_{N-1}.$$

Враховуючи, що $u \in C^{N+\alpha}(\gamma, 0; 0; \Pi)$, одержуємо

$$a(N\gamma, x)\left|D_x^k u(P)\right| = a(N\gamma, x)\left|D_x^k u(R) + \left[D_x^k u(P) - D_x^k u(R)\right]\right| \le$$

$$\le \varepsilon^{\alpha}[u; \gamma, 0; 0; \Pi]_{N+\alpha} + \frac{C}{\varepsilon}|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_{N-1}.$$

Оскільки точка P довільна, то маємо

$$|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_N \le \varepsilon^{\alpha}[u; \gamma, 0; 0; \Pi]_{N+\alpha} + \frac{C}{\varepsilon}|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_{N-1}. \tag{6}$$

Аналогічно встановлюється нерівність

$$|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_{N-1} \le \varepsilon|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_N + \frac{C}{\varepsilon}|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_{N-2}. \tag{6'}$$

Використавши ці нерівності, доведемо нерівність (5) для всіх $|k| < N$. Доведення проведемо методом індукції по N. Для $N = 1$ нерівність (5) доведено. Вважаємо, що нерівність (5) є правильною для $N = r > 1$. Доведемо її для $N = r + 1$. Розглянемо випадок $|k| = r$. Маємо

$$|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_r \le \varepsilon|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_{r+1} + \frac{C}{\varepsilon}|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_{r-1} \le$$

$$\le \varepsilon\left(\varepsilon_1^{\alpha}[u; \gamma, 0; 0; \Pi]_{N+\alpha} + \frac{C}{\varepsilon_1}|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_r\right) + \frac{C}{\varepsilon}|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_{r-1}.$$

За припущенням

$$|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_{r-1} \le \varepsilon|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_r + C(\varepsilon)|u|_{\Pi}.$$

Тому

$$|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_r \le \varepsilon^{1+\alpha}[u; \gamma, 0; 0; \Pi]_{N+\alpha} + C(\varepsilon)|u|_{\Pi}. \tag{7}$$

При $|k| < r$ маємо

$$|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_{|k|} \le \varepsilon^{N-|k|}|u; \gamma, 0; 0; \Pi|_N + C(\varepsilon)|u|_{\Pi}. \tag{8}$$

Враховуючи нерівності (6) – (8), одержуємо нерівність (5) для $|k| \le N$.

Нехай $V_1 \in \Pi^0$,

$$V_\lambda = \left\{(t, x), 0 \le t - t^{(1)} \le \lambda^{2b}a(2b\gamma, x^{(1)}), \left|x_i - x_i^{(1)}\right| \le \lambda a(\gamma - \beta, x^{(1)}), \ i = \overline{1, n}\right\}.$$

Розглянемо в області V_1 рівняння з „замороженими" коефіцієнтами в точці P_1:

$$(L_0u)(t, x) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|=2b} A_k(P_1)D_x^k\right]u(t, x) = f_2(t, x). \tag{9}$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Якщо* $f_2(t,x) \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; 2b; V_1)$ *і* $u(t,x)$ *— розв'язок рівняння* (9) *в* V_1, *то* $D_t u$, $D_x^k u$, $|k| \le 2b$, *неперервні за Гельдером у* V_1 *й існують сталі* C_k, $C_{k\alpha}$ *такі, що виконуються нерівності*

$$a\left(|k|(\gamma-\beta), x^{(1)}\right)\left|D_x^k u(P_1)\right| \le C_k\left(|u|_{V_1} + |f_2; \gamma, \beta; 2b; V_1|_0\right) \equiv C_k M_0,$$

$$a\left(2b(\gamma-\beta), x^{(1)}\right)\left|D_x^{2b} u(P_1)\right| \le C_{2b}\left(|u|_{V_1} + |f_2; \gamma, \beta; 2b; V_1|_{\alpha}\right) \equiv C_{2b} M_{\alpha}, \quad (10)$$

$$a\left((|k|+\alpha)(\gamma-\beta), \bar{x}\right)\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|D_x^k u(P_1) - D_x^k u(P_3)\right| \le C_{k\alpha} M_0,$$

$$|k| \le 2b-1,$$

$$a\left(|k|(\gamma-\beta) + \alpha\gamma, x^{(2)}\right)\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\alpha/2b}\left|D_x^k u(P_2) - D_x^k u(P_3)\right| \le C_{k\alpha} M_0, \quad (11)$$

$$a\left((2b+\alpha)(\gamma-\beta), \bar{x}\right)\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|D_x^{2b} u(P_1) - D_x^{2b} u(P_3)\right| \le C_{2b\alpha} M_{\alpha},$$

$$a\left(2b(\gamma-\beta) + \alpha\gamma, x^{(2)}\right)\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\alpha/2b}\left|D_x^{2b} u(P_2) - D_x^{2b} u(P_3)\right| \le C_{2b\alpha} M_{\alpha}, \quad (12)$$

$$a\left(2b\gamma, x^{(1)}\right)\left|D_t u(P_1)\right| \le C_{2b} M_{\alpha},$$

$$a\left((2b+\alpha)\gamma, x^{(2)}\right)\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\alpha/2b}\left|D_t u(P_2) - D_t u(P_3)\right| \le C_{2b\alpha} M_{\alpha}, \quad (13)$$

$$a\left(2b\gamma + \alpha(\gamma-\beta), \bar{x}\right)\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|D_t u(P_1) - D_t u(P_3)\right| \le C_{2b\alpha} M_{\alpha}$$

при

$$\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right| \le 4^{-1} a\left(\gamma-\beta, x^{(1)}\right), \quad \left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \le 4^{-2b} a\left(2b\gamma, x^{(1)}\right).$$

Доведення. Оцінки (10) – (13) встановлюються тим же методом, що й оцінки для параболічних рівнянь в [1, с. 181] (теорема 1.2). Покажемо найбільш важливі місця.

У рівнянні (9) виконаємо заміну $u(t,x) = v(t,y)$, $y_i = a(\beta, x^{(1)}) x_i$, $i = \overline{1,n}$. Одержимо

$$(L_1 v)(t,y) \equiv \left[D_t - a\left(2b\beta, x^{(1)}\right)\sum_{|k|=2b} A_k(P_1) D_y^k\right] v(t,y) =$$

$$= f_2\left(t, a\left(-\beta, x^{(1)}\right) y\right) \equiv f_3(t,y). \quad (14)$$

Коефіцієнти рівняння (14), згідно з накладеними умовами, обмежені сталими, не залежними від точки P_1. Тому існують сталі C, C_{jk}, не залежні від $a(\beta, x^{(1)})$, такі, що для фундаментального розв'язку рівняння (14) [1, с. 35] справедливою є оцінка

$$\left|D_t^j D_x^k G(t-\tau, y-\xi)\right| \le C_{jk}(t-\tau)^{-(n+|k|+2bj)/2b} \times$$

$$\times \exp\left\{-C\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - \xi_i}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^{2b/(2b-1)}\right\} \equiv C_{jk}(t-\tau)^{-(|k|+2bj)/2b}\Phi(t,\tau,y,\xi).$$

Позначимо

$$y_i^{(1)} = a\left(\beta, x^{(1)}\right) x_i^{(1)},$$

$$S_r = \left\{(t, y) \in \Pi, 0 \le t - t^{(1)} \le r^{2b} a(2b\gamma, x^{(1)}), \left| y_i - y_i^{(1)} \right| \le r a(\gamma, x^{(1)}),\ i = \overline{1, n}\right\}$$

і виберемо нескінченно диференційовну функцію $g(t, y)$, визначену в S_1, яка задовольняє умови

$$g(t, y) = \begin{cases} 1, & (t, y) \in S_{1/2}, \qquad 0 \le g(t, y) \le 1; \\ 0, & (t, y) \in S_1 \setminus S_{3/4}, \quad \left| D_t^j D_y^k g \right| \le C a\left(-\left(2bj + |k|\right)\gamma, x^{(1)}\right). \end{cases}$$

Нехай $(t, y) \in S_{1/4}$. Застосовуючи формулу Гріна – Остроградського [1, с. 91] до функцій $v(\tau, \xi)$ і $g(\tau, \xi) G(t-\tau, y-\xi)$, одержуємо

$$v(t, y) = \int_{t^{(1)}}^{t} d\tau \int_{K_1} v(\tau, \xi) \left(L_1^*(gG)\right)(\tau, \xi)\, d\xi -$$

$$- \int_{t^{(1)}}^{t} d\tau \int_{K_1} g(\tau, \xi) f_3(\tau, \xi) G(t-\tau, y-\xi)\, d\xi \equiv E - F,$$

де K_r — нижня основа S_r, L_1^* — оператор, спряжений до L_1.

Доведемо, наприклад, нерівності (10). Враховуючи властивості функцій $g(\tau, \xi)$ і $G(t-\tau, y-\xi)$, знаходимо

$$\left| D_y^{\nu} E \right| \le C |v|_{S_1} \int_{S_{3/4} \setminus S_{1/2}} \left| \left[D_\tau + a\left(2b\gamma, x^{(1)}\right) \sum_{|k| = 2b} A_k(P_1) D_\xi^k \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[g(\tau, \xi) D_y^{\nu} G(t-\tau, y-\xi) \right] \right| d\xi\, d\tau.$$

Запишемо інтеграл у вигляді суми

$$I_1 + I_2 \equiv \int_{D_1} \ldots d\xi d\tau + \int_{D_2} \ldots d\xi d\tau,$$

$$D_1 = \left\{(\tau, \xi) \in S_{3/4} \setminus S_{1/2}, 2^{-1} a(\gamma, x^{(1)}) \le \left| \xi_i - y_i^{(1)} \right| \le 3/4 a(\gamma, x^{(1)}),\right.$$

$$\left. i = \overline{1, n},\ t^{(1)} \le \tau \le t \right\}, \qquad D_2 = \left(S_{3/4} \setminus S_{1/2}\right) \setminus D_1.$$

Оскільки для точок $(t, \xi) \in D_1$ виконуються нерівності $\left| y_i - \xi_i \right| \ge$ $\ge 4^{-1} a(\gamma, x^{(1)})$, то виконуючи заміну $z = a(2b\gamma, x^{(1)})(t-\tau)^{-1}$ в інтегралі I_1, отримуємо

$$I_1 \le C a(-|\nu|\gamma, x^{(1)}).$$

Для точок області D_2 маємо $t - \tau \ge 4^{-2b} a(2b\gamma, x^{(1)})$. Тому, виконавши в I_2 заміну

$$z_i = \frac{y_i - \xi_i}{(t-\tau)^{1/2b}},$$

дістанемо

$$I_2 \le C a(-|\nu|\gamma, x^{(1)}).$$

Отже,

$$\left|D_y^\nu E\right| \leq C|v|_{S_1} a\left(-|\nu|\gamma, x^{(1)}\right), \quad |\nu| \leq 2b.$$

Оцінимо $D_y^k F$. Якщо $|k| \leq 2b-1$, то використовуючи оцінки функції $D_y^k G(t-\tau, y-\xi)$, властивості функції $g(\tau, \xi)$ і нерівності $\left|t-t^{(1)}\right| \leq a(2b\gamma, x^{(1)})$,

$$\inf_{(\tau,\xi)\in S_{3/4}} a(\gamma, \xi) \geq 4^{-1} a\left(\gamma, x^{(1)}\right),$$

знаходимо

$$\left|D_y^k F\right| \leq \int_{t^{(1)}}^{t} d\tau \int_{K_{3/4}} |g(\tau,\xi)| \frac{|a(2b\gamma,\xi) f_3(\tau,\xi)|}{a(2b\gamma,\xi)} (t-\tau)^{-|k|/2b} \Phi(t,\tau,y,\xi)\, d\xi \leq$$

$$\leq Ca(-2b\gamma, x^{(1)}) \left| f_3; \gamma, 0; 2b; S_{3/4}\right|_0 \int_{t^{(1)}}^{t} (t-\tau)^{-|k|/2b} d\tau \int_{K_{3/4}} \Phi(t,\tau,y,\xi)\, d\xi \leq$$

$$\leq C_1 a(-2b\gamma, x^{(1)}) \left|t-t^{(1)}\right|^{1-|k|/2b} \left| f_3; \gamma, 0; 2b; S_1\right|_0 \leq$$

$$\leq C_2 a(-|k|\gamma, x^{(1)}) \left| f_2; \gamma, 0; 2b; S_1\right|_0.$$

При $|k| = 2b$ запишемо $D_y^{2b} F$ у вигляді

$$D_y^{2b} F = \int_{t^{(1)}}^{t} d\tau \int_{K_1} D_y^{2b} G(t-\tau, y-\xi)\left[F_1(\tau,\xi) - F_1(t,y)\right] d\xi +$$

$$+ F_1(t,y) \int_{t^{(1)}}^{t} d\tau\, D_y^{2b} \int_{K_1} G(t-\tau, y-\xi)\, d\xi \equiv I_3 + I_4,$$

де

$$F_1(t,y) \equiv g(t,y) f_3(t,y).$$

Враховуючи оцінки фундаментального розв'язку і умови, накладені на функції $g(t,y)$ і $f_3(t,y)$, маємо

$$|I_3| \leq C_{2b\alpha} a(-2b\gamma, x^{(1)}) \left| f_3; \gamma, 0; 2b; S_1\right|_\alpha.$$

Застосовуючи формулу Остроградського до внутрішнього інтеграла в I_4, одержуємо

$$|I_4| \leq Ca(-2b\gamma, x^{(1)}) \left| f_3; \gamma, 0; 2b; S_1\right|_0.$$

Отже,

$$\left|D_y^k v\right| \leq Ca\left(-|k|\gamma, x^{(1)}\right)\left(|v|_{S_1} + \left| f_3; \gamma, 0; 2b; S_1\right|_0\right), \quad |k| \leq 2b-1,$$

$$\left|D_y^{2b} v\right| \leq C_{2b\alpha} a\left(-2b\gamma, x^{(1)}\right)\left(|v|_{S_1} + \left| f_3; \gamma, 0; 2b; S_1\right|_\alpha\right). \tag{15}$$

Оскільки

$$\left| f_3; \gamma, 0; 2b; S_1\right|_\alpha \leq C\left| f_2; \gamma, \beta; 2b; V_1\right|_\alpha,$$

то повертаючись до змінних (t, x) в нерівностях (15), одержуємо оцінки (10). Аналогічно встановлюються нерівності (11), (12).

Для доведення оцінок (13) використовуємо рівняння (9) і нерівності (10)–(12). Наприклад,

$$a(2b\gamma + \alpha(\gamma-\beta), \tilde{x})\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|D_t u(P_1) - D_t u(P_3)\right| \le$$

$$\le \sum_{|k|=2b}\left|A_k(P_1)a\left(2b\beta, x^{(1)}\right)\right|a((2b+\alpha)(\gamma-\beta), \tilde{x}) \times$$

$$\times \left|x^{(1)} - x^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|D_x^k u(P_1) - D_x^k u(P_3)\right| +$$

$$+ a(2b\gamma + \alpha(\gamma-\beta), \tilde{x})\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|f_2(P_1) - f_2(P_3)\right| \le$$

$$\le C_{2b\alpha}\left(|u|_{V_1} + |f_2; \gamma, \beta; 2b; V_1|_\alpha\right).$$

Оцінки розв'язку задачі Коші з гладкими коефіцієнтами. Нехай

$$\Pi_m = (0, T)\times Q_m, \quad Q_m = \{x, x \in E_n, \ a(1, x) \ge m^{-1}, \ m > 1\}$$

— зростаюча послідовність областей, яка при $m \to \infty$ збігається до Π,

$$\partial Q_m = \{x, a(1, x) = m^{-1}\}.$$

Розглянемо задачу Коші для параболічного рівняння

$$\left[D_t - \sum_{|k|\le 2b} a_k(t, x)D_x^k\right]u_m(t, x) = f_m(t, x), \tag{16}$$

$$U_m(0, x) = \varphi(x).$$

Тут $a_k(t, x) = A_k(t, x)$ і $f_m(t, x) = f(t, x)$, якщо $(t, x) \in \Pi_m$. Для $(t, x) \in \Pi \setminus \Pi_m$ $a_k(t, x)$ і $f_m(t, x)$ є розв'язками крайової задачі

$$D_t u - \Delta u = 0, \quad u(0, x) = 0, \quad u|_\Gamma = \psi(t, x), \quad \Gamma = \partial Q_m \times (0, T),$$

де, наприклад, для $a_k(t, x)$ покладено $\psi(t, x) = A_k(t, x)|_\Gamma$.

У задачі (16) виконаємо заміну

$$u_m(t, x) = v(t, x) + \varphi(x).$$

Тоді $u_m(t, x)$ буде розв'язком задачі Коші

$$(L_3 v_m)(t, x) \equiv D_t v_m - \sum_{|k|\le 2b} a_k(t, x)D_x^k v_m =$$

$$= f_m(t, x) - \sum_{|k|\le 2b} a_k(t, x)D_x^k\varphi \equiv F_m(t, x), \tag{17}$$

$$u_m(0, x) = 0.$$

При будь-якому фіксованому m задача (17) має єдиний розв'язок [1, с. 269] (теорема 4'.3). Знайдемо оцінку похідних розв'язку $v_m(t, x)$.

Введемо в просторі $C^{2b+\alpha}(\Pi)$ норму $|v_m; \gamma, \beta; q; \Pi|_{2b+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається так, як $|u; \gamma, \beta; q; \Pi|_{2b+\alpha}$, тільки замість функції $a(r, x)$ використовуємо $d(r, x)$: $d(r, x) = a(r, x)$, якщо $x \in \Pi_m$, і $d(r, x) = m^{-r}$, якщо $x \in \Pi \setminus \Pi_m$.

Справедливою є така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконано умови теореми* 1. *Тоді для розв'язку задачі* (17) *правильною є оцінка*

$$|v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi|_{2b+\alpha} \le C(|F_m; \gamma, \beta; 2b; \Pi|_\alpha + |v_m|_\Pi), \tag{18}$$

де стала C *не залежить від* m.

Доведення. Використовуючи визначення норми і лему 1, маємо

$$|v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi|_{2b+\alpha} \le (1+\varepsilon^\alpha)[v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi]_{2b+\alpha} + C(\varepsilon)|v_m|_\Pi.$$

Тому досить оцінити півнорму $[v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi]_{2b+\alpha}$. Із визначення півнорми $[v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi]_{2b+\alpha}$ випливає існування в Π точок P_1, P_2 і P_3, для яких виконується одна з нерівностей

$$\frac{1}{4}[v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi]_{2b+\alpha} \le E_1 \equiv$$

$$\equiv d\big((|k|+\alpha)(\gamma-\beta) + 2bj\gamma, \bar{x}\big)\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|D_t^j D_x^k v_m(P_1) - D_t^j D_x^k v_m(P_3)\right|,$$

$$\frac{1}{4}[v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi]_{2b+\alpha} \le E_2 \equiv \tag{19}$$

$$\equiv d\big(|k|(\gamma-\beta) + (2bj+\alpha)\gamma, x^{(2)}\big)\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\alpha/2b}\left|D_t^j D_x^k v_m(P_2) - D_t^j D_x^k v_m(P_3)\right|$$

при $2bj + |k| = 2b$.

Якщо

$$\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right| \ge 4^{-1} r d(\gamma-\beta, \bar{x}) \equiv T_1, \quad r \in (0,1),$$

то використовуючи лему 1, маємо

$$E_1 \le \varepsilon^\alpha[v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi]_{2b+\alpha} + C(\varepsilon)|v_m|_\Pi.$$

Вибираючи $\varepsilon = 16^{-1/\alpha}$, з першої нерівності (19) знаходимо

$$[v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi]_{2b+\alpha} \le C|v_m|_\Pi.$$

Аналогічно одержуємо оцінку у випадку

$$\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \ge 4^{-2b} r^{2b} d(\gamma, x^{(2)}) \equiv T_2.$$

Розглянемо випадок, коли $|x^{(1)} - x^{(2)}| \le T_1$, або $|t^{(1)} - t^{(2)}| \le T_2$. Будемо вважати, що $d(\gamma, \bar{x}) \equiv d(\gamma, x^{(1)})$. Запишемо в області V_r рівняння (17) у вигляді

$$D_t v_m - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) D_x^k v_m = \sum_{|k|=2b} [a_k(t,x) - a_k(P_1)] D_x^k v_m +$$

$$+ \sum_{|k|\le 2b-1} a_k(t,x) D_x^k v_m + F_m(t,x) \equiv F_m^{(1)}(t,x). \tag{20}$$

Застосувавши нерівності (12), (13), дістанемо

$$E_i \le C\left(\left|F_m^{(1)}; \gamma, \beta; 2b; V_1\right|_\alpha + |v_m|_{V_1}\right), \quad i = 1, 2. \tag{21}$$

На підставі леми 1 досить оцінити півнорму кожного доданка функції $F_m^{(1)}(t,x)$. Наприклад, для $\left[a_k D_x^k v_m; \gamma, \beta; 2b; V_1\right]_\alpha$ при $|k| \le 2b-1$ маємо

$$\left[a_k D_x^k v_m; \gamma, \beta; 2b; V_1\right]_\alpha \le \sup_{R_1, R_3 \in V_1} \left\{ \left[d\left((|k|+\alpha)(\gamma-\beta), \bar{y}\right) \left| y^{(1)} - y^{(2)} \right|^{-\alpha} \times \right.\right.$$

$$\times \left| D_y^k v_m(R_1) - D_y^k v_m(R_3) \right| \Big] \Big[d\left(2b\gamma - |k|(\gamma-\beta), \bar{y}\right) |a_k(R_1)| \Big] +$$

$$+ \left[|a_k(R_1) - a_k(R_3)| d\left(2b\gamma - (|k|-\alpha)(\gamma-\beta), \bar{y}\right) \left| y^{(1)} - y^{(2)} \right|^{-\alpha} \right] \times$$

$$\times \left. \left[d\left(|k|(\gamma-\beta), \bar{y}\right) \left| D_y^k v_m(R_3) \right| \right] \right\} +$$

$$+ \sup_{R_1, R_3 \in V_1} \left\{ \left[d\left(|k|(\gamma-\beta) + \alpha\gamma, y^{(2)}\right) \left| \tau^{(1)} - \tau^{(2)} \right|^{-\alpha/2b} \times \right.\right.$$

$$\times \left| D_y^k v_m(R_2) - D_y^k v_m(R_3) \right| \Big] \Big[d\left(2b\gamma - |k|(\gamma-\beta), y^{(2)}\right) |a_k(R_3)| \Big] +$$

$$+ \left[d\left(|k|(\gamma-\beta), y^{(2)}\right) \left| D_y^k v_m(R_3) \right| \right] \Big[d\left((2b+\alpha)\gamma - |k|(\gamma-\beta), y^{(2)}\right) \times$$

$$\times \left. \left| \tau^{(1)} - \tau^{(2)} \right|^{-\alpha/2b} |a_k(R_2) - a_k(R_3)| \Big] \right\} \le$$

$$\le C\left(|v_m; \gamma, \beta; 0; V_1|_{|k|+\alpha} + |v_m|_{V_1} \right).$$

Аналогічно одержуємо оцінки інших доданків функції $F_m^{(1)}(t, x)$. На підставі цих оцінок маємо

$$\left| F_m^{(1)}; \gamma, \beta; 2b; V_1 \right|_\alpha \le C_1 r^\alpha |v_m; \gamma, \beta; 0; V_1|_{2b+\alpha} + C\left(|v_m|_{V_1} + |F_m; \gamma, \beta; 2b; V_1|_\alpha \right). \tag{22}$$

Підставляючи (22) в нерівність (21), дістаємо

$$E_i \le C\left(r^\alpha |v_m; \gamma, \beta; 0; V_1|_{2b+\alpha} + |v_m|_{V_1} + |F_m; \gamma, \beta; 2b; V_1|_\alpha \right). \tag{23}$$

Враховуючи нерівності (19) і вибираючи $r = (16C)^{-1/\alpha}$, знаходимо

$$[v_m; \gamma, \beta; 0; \Pi]_{2b+\alpha} \le C(|F_m; \gamma, \beta; 2b; \Pi|_\alpha + |v_m|_\Pi).$$

Знайдемо оцінку $|v_m|_\Pi$.

Справедливою є така теорема.

Теорема 4. *Якщо* $v_m(t, x)$ — *єдиний класичний розв'язок задачі* (17) *і виконано умови* а), б), *то для* $v_m(t, x)$ *виконується нерівність*

$$|v_m|_\Pi \le C |L_3 v_m; \gamma, \beta; 2b; \Pi|_\alpha, \tag{24}$$

де стала C *не залежить від* m.

Доведення. Використовуємо методику доведення зауваження 2 [3, с. 79]. Припустимо, що нерівність (24) не виконується в будь-якій замкненій області $\overline{\Omega} \subset \Pi$. Тоді існує послідовність функцій $\omega_n \in C^{2b+\alpha}(\Pi)$ таких, що $|\omega_n|_\Pi = 1$, $\omega_n(0, x) = 0$ і $L_3 \omega_n$ прямує до нуля для відповідних ω_n, коли $n \to \infty$.

Із (18) випливає, що норми $|\omega_n; \gamma, \beta; 0; \Pi|_{2b+\alpha}$ рівномірно обмежені. Тому існує підпослідовність $\omega_{n(i)}$, яка при $n(i) \to \infty$ збігається до розв'язку $\omega \in C^{2b+\alpha}(\Pi)$ однорідної задачі Коші. Оскільки розв'язок задачі Коші єдиний, то $\omega \equiv 0$, що суперечить рівності $|\omega|_\Pi = 1$.

Доведення теореми **1.** Оскільки

$$\left|L_3 v_m; \gamma, \beta; 2b; \Pi\right|_\alpha = \left|F_m; \gamma, \beta; 2b; \Pi\right|_\alpha \leq$$
$$\leq C\left(|f; \gamma, \beta; 2b; \Pi|_\alpha + |\varphi; \gamma, \beta; 0; E_n|_{2b+\alpha}\right),$$

то з нерівностей (17) і (24) маємо

$$|u_m; \gamma, \beta; 0; \Pi|_{2b+\alpha} \leq C\left(|f; \gamma, \beta; 2b; \Pi|_\alpha + |\varphi; \gamma, \beta; 0; E_n|_{2b+\alpha}\right). \qquad (25)$$

Отже, права частина нерівності (25) не залежить від m, а послідовності

$$\omega_{kj}^{(m)} \equiv \left\{d\left(2bj\gamma + |k|(\gamma-\beta), x\right)\left|D_t^j D_x^k u_m\right|, \ 2bj + |k| \leq 2b\right\}$$

рівномірно обмежені і одностайно неперервні в будь-якій замкненій області $\overline{\Omega} \subset \Pi$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\left\{\omega_{kj}^{m(i)}\right\}$, рівномірно збіжні при $m(i) \to \infty$ до ω_{kj}. Переходячи до границі при $m(i) \to \infty$ в задачі (16), одержуємо, що $u(t, x) \equiv \omega_{00}$ — єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u \in C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; \Pi)$ і справедливою є оцінка (4).

***Зауваження.* 1.** При $\alpha_{|k|} < \min(n, 2b - |k|)$, $\beta = 0$ фундаментальні матриці розв'язків і задачу Коші для параболічних систем вивчено в [2].

2. Для параболічних рівнянь другого порядку з степеневим виродженням за сукупністю змінних нелокальну задачу Коші досліджено в [4].

1. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
2. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применение к краевым задачам. I // Дифференц. уравнения. – 1974. – **10**, № 8. – С. 1463 – 1477.
3. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 208 с.
4. *Пукальський І. Д.* Нелокальна задача Коші для параболічного рівняння з виродженням // Вісн. Нац. у-ту „Львів. політехніка". Прикл. математика. – 2000. – № 411. – С. 275 – 280.

Отримано 18.02.2002