УДК 517.51

А. К. Каланча, В. К. Маслюченко (Чернівец. нац. ун-т)

РОЗМІРНІСТЬ ЛЕБЕҐА – ЧЕХА ТА БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ ВЕКТОРНОЗНАЧНИХ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

For a metrizable space X with the Lebesgue–Cech finite dimension, a topological space Y, and a topological vector space Z, we consider mappings $f: X \times Y \to Z$ which are continuous with respect to the first variable and belong to the a Baire class with respect to the second variable for all values of the first variable from some set everywhere dense in X. We prove that each of the mappings considered belong to the $(\alpha+1)$ Baire class.

Доведено, що для метризовного простору X зі скінченною розмірністю Лебеґа–Чеха, топологічного простору Y і топологічного векторного простору Z кожне відображення $f: X \times Y \to$ $\to Z$, яке неперервне відносно першої змінної і належить до берівського класу α відносно другої змінної, коли значення першої змінної перебігають скрізь щільну в X множину, належить до $(\alpha+1)$-го класу Бера.

1. Дослідження питання про те, до яких берівських класів можуть належати нарізно неперервні відображення $f: X \times Y \to Z$ зі значеннями в топологічному векторному просторі Z, беруть свій початок від В. Рудіна, який, значно розвинувши первісний метод А. Лебеґа [1], показав [2], що для метризовного простору X, топологічного простору Y і локально опуклого простору Z нарізно неперервні відображення $f: X \times Y \to Z$ належать до першого класу Бера. Досі незрозуміло, чи можна в цій теоремі Рудіна позбавитися умови локальної опуклості топологічного векторного простору Z. У роботі [3] з'ясовано, що це можна зробити, коли $X = \mathbf{R}^m$. При цьому дограничні сукупно неперервні відображення f_n на смузі $\Delta_{n,k} \times Y$ (тут $k = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbf{Z}^m$ і

$$\Delta_{n,k} = \left[\frac{k_1}{n}, \frac{k_1+1}{n}\right] \times \ldots \times \left[\frac{k_m}{n}, \frac{k_m+1}{n}\right]$$

— комірка стандартного розбиття простору $\mathbf{R}^m$ на куби) було записано у явному вигляді

$$f_n(x, y) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^m} \varphi_{n,\alpha}^k(x)\, f\left(\frac{k+\alpha}{n}, y\right),$$

де

$$\varphi_{n,\alpha}^k(x) = n^m \prod_{i \in I_{\alpha,0}} \left(\frac{k_i+1}{n} - \xi_i\right) \times \prod_{i \in I_{\alpha,1}} \left(\xi_i - \frac{k_i}{n}\right),$$

$x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ і $I_{\alpha,j} = \{i : \alpha_i = j\}$ при $j = 0, 1$. Інтерполяційні функції $\varphi_{n,\alpha}^k$ виникли в результаті послідовного лінійного інтерполювання відносно кожної змінної ξ_i і при $m = 1$ приводять до таких функцій f_n, які використовував ще А. Лебеґ в [1].

Виявляється, що значно більшого можна досягти, застосовуючи метод Рудіна, що спирається на теорему Стоуна про паракомпактність метризовного простору і використовує замість функцій $\varphi_{n,\alpha}^k$ спеціально підібрані розбиття одиниці. Тут ми з допомогою техніки Рудіна і теореми Даукера [4, с. 578] доводимо, що умову локальної опуклості простору Z можна зняти навіть у тому випадку, коли X — метризовний простір зі скінченною розмірністю Лебеґа–Чеха [4, с. 564]. Більше того, подібно до того, як це зроблено в [5] для дійснозначних функцій, ми одержуємо загальні теореми про включення $C\overline{B}_\alpha(X\times Y, Z)\subseteq$ $\subseteq B_{\alpha+1}(X\times Y, Z)$ як для локального опуклого, так і для довільного топологічного векторного простору Z.

2. Як завжди, через $P(X, Y)$ позначимо сукупність усіх відображень $f\colon X\to$ $\to Y$, які мають властивість P, а через $PQ(X\times Y, Z)$ — сукупність тих відображень $f\colon X\times Y\to Z$, усі вертикальні розрізи $f^x=f(x,\cdot)$ яких мають властивість Q, а всі горизонтальні $f_y=f(\cdot\,, y)$ — властивість P. Для топологічного простору X символом $P\overline{Q}(X\times Y, Z)$ позначається сукупність тих відображень f: $X\times Y\to Z$, всі горизонтальні розрізи яких мають властивість P і разом з тим множина $X_Q(f)$ тих $x\in X$, для яких вертикальні розрізи f^x мають властивість Q, скрізь щільна в X. Літера C вживається для позначення властивості неперервності, а символ B_α означає належність до α-го класу Бера.

3. Як і в [5], наш виклад базується на певних допоміжних твердженнях, які ми наведемо тут, відповідним чином відредагувавши і пристосувавши до загального випадку, що, втім, не приводить до великих змін.

Лема 1. *Нехай Y і Z — топологічні простори, α — граничне зліченне порядкове число, яке є границею деякої зростаючої послідовності менших від нього порядкових чисел α_n, і $f\in B_\alpha(Y, Z)$. Тоді існує поточково збіжна до f послідовність відображень f_n така, що $f_n\in B_{\alpha_n}(Y, Z)$ для кожного n.*

Лема 2. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — топологічний векторний простір, $(\varphi_i)_{i\in I}$ — локально скінченне розбиття одиниці на X і $(g_i)_{i\in I}$ — сім'я відображень з класу $B_\alpha(Y, Z)$. Тоді формулою $f(x, y) = \sum_{i\in I}\varphi_i(x)g_i(y)$ визначається відображення $f\colon X\times Y\to Z$, що входить до класу $B_\alpha(X\times Y, Z)$.*

Доведення. Коректність визначення f і його неперервність при $\alpha=0$ випливають з локальної скінченності розбиття одиниці $(\varphi_i)_{i\in I}$, неперервності відображень φ_i і g_i та операцій додавання і множення на скаляр у топологічному векторному просторі Z. Нехай $\alpha>0$ і твердження є вірним для менших від α порядкових чисел. Ми можемо вибрати таку послідовність порядкових чисел $\alpha_n<\alpha$ і для кожного $i\in I$ таку послідовність відображень $g_{i,n}\in B_{\alpha_n}(Y,Z)$, яка поточково збігається до відображення g_i. Для граничного α це можна зробити згідно з лемою 1, а для ізольованого α це безпосередньо випливає з означення. Для кожної пари $(x, y)\in X\times Y$ покладемо $f_n(x, y)=\sum_{i\in I}\varphi_i(x)g_{i,n}(y)$. За індуктивним припущенням $f_n\in B_{\alpha_n}(X\times Y, Z)$ для кожного n. Легко перевірити, що f є поточковою границею відображень f_n, отже, $f_n\in B_\alpha(X\times Y, Z)$.

4. Теорема 1 з [5] легко переноситься навіть у точнішій редакції на випадок відображень зі значеннями в довільному локально опуклому просторі Z, чим ми й займемося у цьому пункті. Нагадаємо, що умова існування для кожного відкритого покриття T_1-простору X підпорядкованого йому локально скінченного розбиття одиниці рівносильна паракомпактності простору X [4, с. 447] і виконується, зокрема, коли простір X метризовний, адже метризовний простір за теоремою Стоуна [4, с. 414] паракомпактний.

Теорема 1. *Нехай X — метризовний простір, Y — топологічний простір, Z — локально опуклий простір і α — не більш ніж зліченне порядкове число. Тоді $C\overline{B}_\alpha(X\times Y, Z)\subseteq B_{\alpha+1}(X\times Y, Z)$.*

Доведення. Зафіксуємо метрику d на просторі X, яка породжує його топологію, і для кожного номера n розглянемо покриття $\mathcal{B}_n$ простору X відкритими кулями радіуса $1/2n$ відносно цієї метрики. Оскільки X паракомпактний, то для кожного n існує локально скінченне розбиття одиниці $(\varphi_{i,n})_{i\in I_n}$ на X, яке підпорядковане покриттю $\mathcal{B}_n$ і складається з ненульових функцій.

Нехай $f\in C\overline{B}_\alpha(X\times Y, Z)$. Оскільки множина $X_{B_\alpha}(f)$ скрізь щільна в X, а носії функцій $\varphi_{i,n}$ відкриті і непорожні, то для кожної пари $(i, n)\in I_n\times\mathbf{N}$ існує така точка $x_{i,n}\in X_{B_\alpha}(f)$, що $\varphi_{i,n}(x_{i,n})>0$. Для $n\in\mathbf{N}$ і $(x, y)\in X\times Y$ покладемо

$$f_n(x, y) = \sum_{i\in I_n}\varphi_{i,n}(x)f(x_{i,n}, y).$$

Згідно з вибором точок $x_{i,n}$ відображення $f^{x_{i,n}}$ належить до класу α, тому, застосовуючи лему 2, отримуємо, що $f_n\in B_\alpha(X\times Y, Z)$ для кожного n. Покажемо, що $f_n(x, y)\to f(x, y)$ на $X\times Y$. Зафіксуємо яку-небудь точку $(x_0, y_0)\in X\times Y$ і розглянемо довільний опуклий окіл нуля W у просторі Z. Зрозуміло, що

$$f_n(x_0, y_0)-f(x_0, y_0) = \sum_{i\in I_n}\varphi_{i,n}(x_0)\big(f(x_{i,n}, y_0)-f(x_0, y_0)\big).$$

Оскільки відображення f_{y_0} неперервне, то існує такий номер n_0, що $f(x, y_0)-$ $-f(x_0, y_0)\in W$, як тільки $d(x, x_0)<n_0^{-1}$. Розбиття одиниці локально скінченні, тому для кожного n множина $I_{n,0}=\{i\in I_n:\ \varphi_{i,n}(x_0)\neq 0\}$ скінченна. Якщо $i\in I_{n,0}$, то $d(x_{i,n}, x_0)<n^{-1}$, оскільки точки $x_{i,n}$ і x_0 належать носієві функції $\varphi_{i,n}$, який міститься в деякій кулі з покриття $\mathcal{B}_n$. Тому при $n\geq n_0$

$$f_n(x_0, y_0)-f(x_0, y_0) =$$

$$= \sum_{i\in I_{n,0}}\varphi_{i,n}(x_0)\big(f(x_{i,n}, y_0)-f(x_0, y_0)\big)\in \sum_{i\in I_{n,0}}\varphi_{i,n}(x_0)W \subseteq W,$$

адже $\sum_{i\in I_{n,0}}\varphi_{i,n}(x_0)=1$ для кожного n і множина W є опуклою. Це і показує, що $f_n(x_0, y_0)\to f(x_0, y_0)$. Таким чином, $f\in B_{\alpha+1}(X\times Y, Z)$.

5. Нехай m — ціле невід'ємне число. Говорять, що *порядок системи множин $\mathcal{A}$ менший від m*, якщо будь-яка частина системи $\mathcal{A}$, в яку входить більше ніж m множин, має порожній перетин. Це записують у вигляді нерівності $\operatorname{ord}\mathcal{A}<m$. Про тихоновський простір X говорять, що він *має скінченну розмірність Лебега–Чеха* [4, с. 564], якщо існує таке ціле невід'ємне число m, що в кожне скінченне функціонально відкрите покриття простору X можна вписати скінченне функціонально відкрите покриття, порядок якого менший від m. Цю останню умову записують у вигляді нерівності $\dim X<m$. Згідно з теоремою Даукера [4, с. 578], якщо X — нормальний простір і $\dim X<m$, то в кожне локально скінченне покриття простору X можна вписати відкрите покриття порядку $<m$. З цієї теореми Даукера і згаданої вище теореми Стоуна випливає [4, с. 589], що для кожного метризовного простору X, у якого $\dim X<$ $<m$, і будь-якої метрики d, яка породжує топологію X, існує така послідовність локально скінченних відкритих покриттів $\mathcal{U}_n$ простору X, що кожна точка $x\in X$ входить щонайбільше в m елементів будь-якого покриття $\mathcal{U}_n$ і $\operatorname{diam}(U)<n^{-1}$ для кожних $n\in\mathbf{N}$ і $U\in\mathcal{U}_n$.

Теорема 2. *Нехай X — метризовний простір зі скінченною розмірністю Лебега–Чеха, Y — топологічний простір, Z — топологічний векторний* *простір i α — не більш ніж зліченне порядкове число. Тоді* $C\overline{B}_\alpha(X\times Y, Z)\subseteq$ $\subseteq B_{\alpha+1}(X\times Y, Z)$.

Доведення. Нехай $\dim X < m$, d — довільна метрика на X, яка породжує його топологію, і $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність відкритих покриттів простору X, про яку йдеться в зауваженнях перед даною теоремою. Нехай $\mathcal{U}_n = \{U_{i,n}: i\in$ $\in I_n\}$, причому $U_{i',n}\neq U_{i'',n}$, якщо $i'\neq i''$, і $U_{i,n}\neq\varnothing$ для будь-яких i та n. Для кожного $n\in\mathbf{N}$ існує таке розбиття одиниці $(\varphi_{i,n})_{i\in I_n}$ на просторі X, що $\varnothing\neq\operatorname{supp}\varphi_{i,n}\subseteq U_{i,n}$ при $i\in I_n$ (див. доведення теореми 5.19 в [4, с. 447]). Згідно з нашою побудовою для кожної точки $x\in X$ у кожній множині I_n міститься скінченна підмножина $I_n(x)$, кількість елементів якої не перевищує m, і така, що $\varphi_{i,n}(x)=0$, якщо $i\in I\setminus I_n(x)$, і $\varphi_{i,n}(x)>0$, якщо $i\in I_n(x)$.

Нехай $f\in C\overline{B}_\alpha(X\times Y, Z)$. Виберемо, як і раніше, деякі елементи $x_{i,n}\in$ $\in X_{B_\alpha}(f)\bigcap\operatorname{supp}\varphi_{i,n}$ і покладемо

$$f_n(x,y) = \sum_{i\in I_n}\varphi_{i,n}(x)f(x_{i,n},y) = \sum_{i\in I_n(x)}\varphi_{i,n}(x)f(x_{i,n},y).$$

Знову згідно з лемою 2 маємо $f_n\in B_\alpha(X\times Y, Z)$. Покажемо, що $f_n(x,y)\to$ $\to f(x,y)$ на $X\times Y$. Нехай $p_0=(x_0,y_0)\in X\times Y$ і W — окіл нуля в Z. Виберемо такий заокруглений окіл нуля V в Z, що $\underbrace{V+\ldots+V}_{m\text{ разів}}\subseteq W$. На підставі неперервності відображення f_{y_0} вибираємо такий номер n_0, що з нерівності $d(x,x_0)<n_0^{-1}$ випливає $f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\in V$. Покажемо, що $f_n(p_0)-f(p_0)\in W$ при $n\geq n_0$. Нехай $n\geq n_0$ і $i\in I_n(x_0)$. Точки $x_{i,n}$ і x_0 належать носієві функцій $\varphi_{i,n}$, а отже, і множині $U_{i,n}$, діаметр якої за побудовою $<n^{-1}$. В такому разі $d(x_{i,n},x_0)<n_0^{-1}$, отже, $f(x_{i,n},y_0)-f(x_0,y_0)\in V$. Оскільки $\sum_{i\in I_n(x_0)}\varphi_{i,n}(x_0)=$ $=1$, то

$$f_n(p_0)-f(p_0) = \sum_{i\in I_n(x_0)}\varphi_{i,n}(x_0)\big(f(x_{i,n},y_0)-f(x_0,y_0)\big)\in\sum_{i\in I_n(x_0)}\varphi_{i,n}(x_0)V.$$

Але множина V заокруглена, а $0\leq\varphi_{i,n}(x_0)\leq 1$, тому $\varphi_{i,n}(x_0)V\subseteq V$. Крім того, в множині $I_n(x_0)$ міститься не більше ніж m елементів. Тому

$$f_n(p_0)-f(p_0)\in\underbrace{V+\ldots+V}_{m\text{ разів}}\subseteq W.$$

Таким чином, ми перевірили, що $f_n(p_0)\to f(p_0)$, звідки випливає, що $f\in$ $\in B_{\alpha+1}(X\times Y, Z)$.

1. *Lebesgue H.* Sur l'aproximation des fonctions // Bull. Sci. Math. – 1898. – **22**. – P. 278–287.
2. *Rudin W.* Lebesgue first theorem // Math. Analysis and Appl. Pt B. Edited by Nachbin. Adv. Math. Suppl. Stud. 78. – Acad. Press, 1981. – P. 741–747.
3. *Калапча А. К., Маслюченко В. К.* Берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних функцій на добутках зі скінченновимірним співмножником. – Чернівці, 1996. – 7 с. – Деп. в ДНТБ України, № 1406-Ук96.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
5. *Маслюченко В. К., Собчук О. В.* Берівська класифікація і σ-метризовні простори // Мат. студії. – 1994. – **3**. – С. 95–102.

Одержано 12.03.99,
після доопрацювання — 11.11.99