УДК 519.41/47

П. П. Барышовец (Нац. авиац. ун-т, Киев)

О КОНЕЧНЫХ A-ГРУППАХ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ НЕМЕТАЦИКЛИЧЕСКИМИ ПОДГРУППАМИ

We study groups G satisfying the following conditions:

(i) G is a finite soluble group with a nontrivial metacyclic second derived subgroup;

(ii) all Sylow subgroups of G are Abelian, but not all are elementary Abelian.

We give a description of structure of these groups with complementable nonmetacyclic subgroups.

Вивчаються групи G, які задовольняють такі умови:

1) G – скінченна розв'язна група з неодиничним метациклічним другим комутантом;

2) всі силовські підгрупи із G абелеві, але не всі елементарні абелеві.

Наведено опис будови таких груп з доповнюваними неметациклічними підгрупами.

1. В 1937 г. Ф. Холл [1] изучал конечные группы, в которых дополняемы все подгруппы. Полное описание произвольных (как конечных, так и бесконечных) групп с таким свойством, получивших название вполне факторизуемых, было получено в 1953 г. Н. В. Баевой [2] (см. также [3, 4]). В работах С. Н. Черникова [5] и Ю. М. Горчакова [6] показано, что произвольные вполне факторизуемые группы совпадают с группами, в которых дополняемы все абелевы подгруппы. Если же группа конечна, то полная факторизуемость следует из условия дополняемости одних только элементарных абелевых подгрупп [5] или даже циклических элементарных абелевых подгрупп [6]. В связи с этими результатами по инициативе С. Н. Черникова были выделены и изучались группы с теми или иными системами дополняемых нециклических подгрупп (см. [7]). Естественно продолжить эти исследования в направлении изучения неметациклических групп с дополняемыми неметациклическими подгруппами. При этом метациклической называется группа, являющаяся расширением циклической (в частности, единичной) группы с помощью циклической. Конечные неразрешимые группы со свойством дополняемости неметациклических подгрупп описаны автором в [8]. Конечные разрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами, имеющими такое свойство, рассматривались в [9, 10]. Оказалось, что их ступень разрешимости не превышает числа 3 [10]. Группы такого рода с абелевым коммутантом описаны в [9], с неметациклическим вторым коммутантом — в [10]. В настоящей работе продолжается изучение таких групп. Рассмотрены те из них, у которых силовские подгруппы абелевы, но не все элементарные абелевы, а второй коммутант — неединичная метациклическая группа. Доказана следующая теорема.

Теорема. *В конечной группе G с неединичным метациклическим вторым коммутантом и абелевыми силовскими подгруппами, не все из которых элементарные абелевы, тогда и только тогда дополняемы все неметациклические подгруппы, когда* $G = \big((G'' \leftthreetimes \langle b \rangle) \times C\big) \leftthreetimes \langle d \rangle$, *где* $G'' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, $|d| = 2$, $|a_1| = |a_2|$, $|b| = q^{\alpha}$, $\alpha > 1$, q *— нечетное простое число,* $(|a_1|, 2q) = 1$, $\langle G'', b \rangle' = G''$, $\langle b, d \rangle' = \langle b \rangle$, $[G'', b^q] = 1$, $d^{-1} C d = C$, $\langle G'', b^q, C, d \rangle$ *— метациклическая, а* $\langle G'', C, d \rangle$ *— вполне факторизуемая группа.*

2. В неметациклической группе, имеющей свойство: любая неметациклическая подгруппа дополняема, все неметациклические подгруппы и неметациклические фактор-группы имеют то же свойство. Кроме того, фактор-группа такой группы по ее неметациклическому нормальному делителю вполне факторизуема.

Конечные разрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами называются A-группами [11]. В A-группах пересечение центра с коммутантом тривиально и коммутанты всех нормальных делителей дополняемы [11].

Ниже рассматриваются только A-группы. Поэтому силовские p-подгруппы коммутантов H' и H'' будем обозначать через H'_p и H''_p.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Минимальные неметациклические вполне факторизуемые группы исчерпываются группами следующих типов*:

1) G *— элементарная абелева группа порядка* p^3, *где* p *— простое число*;

2) $G = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, *где* $|a_1| = |a_2| = p$, $|b| = q$, $G' = \langle a_1, a_2 \rangle$, $q \mid p - 1$, p *и* q *— различные простые числа*;

3) $G = (\langle a_1 \rangle \leftthreetimes \langle b_1 \rangle) \times (\langle a_2 \rangle \leftthreetimes \langle b_2 \rangle)$, *где* $|a_1| = |a_2| = p$, $|b_1| = q$, $|b_2| = r$, $G'' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, $qr \mid p - 1$, p, q, r *— различные простые числа*;

4) $G = (\langle a_1 \rangle \leftthreetimes \langle b_1 \rangle) \times (\langle a_2 \rangle \leftthreetimes \langle b_2 \rangle)$, *где* $|a_1| = p$, $|a_2| = q$, $|b_1| = |b_2| = r$, $G' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, p, q, r *— различные простые числа*.

Доказательство. Если G — абелева группа, то она содержит неметациклическую силовскую подгруппу порядка p^3 и с ней, очевидно, совпадает.

Если G — неабелева группа, то $G'' = 1$ и $G = G' \leftthreetimes M$.

а) G' — нециклическая группа. Если $\langle a_1 \rangle$ и $\langle a_2 \rangle$ — множители одинакового порядка (например, p) из разложения G' в прямое произведение нормальных в G подгрупп простых порядков, то $\langle a_1, M \rangle' = \langle a_1 \rangle$, $\langle a_2, M \rangle' = \langle a_2 \rangle$ ввиду соотношения $G' \cap Z(G) = 1$ [11]. Значит, $\langle a_1, a_2, M \rangle$ — неметациклическая группа и $G = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \leftthreetimes M$. Если M содержит элемент b простого порядка (например, q) такой, что $[a_1, b] \neq 1$, $[a_2, b] \neq 1$, то $G = \langle a_1, a_2, b \rangle$ и G — группа типа 2. В противном случае $M = \langle b_1 \rangle \times M_1$, где $[a_1, b_1] \neq 1$, $[a_2, b_1] = 1$, $|b_1| = q$ и $[M_1, a_1] = 1$, $[M_1, a_2] \neq 1$. При этом силовская q-подгруппа из M_1 содержится в $C_G(a_2)$, иначе если $x \in M_1$, $|x| = q$, $[a_2, x] \neq 1$, то $b_1 x$ имеет порядок q и $[a_1, bx] \neq 1$, $[a_2, b_1 x] \neq 1$, G — группа типа 2. Если $b_2 \in M_1$, $[a_2, b_2] \neq 1$, то можем считать, что $|b_2| = r$, $r \neq q$, $r \neq p$. Тогда $\langle a_1, a_2, b_1, b_2 \rangle$ — неметациклическая группа и, значит, G — группа типа 3.

б) G' — циклическая группа. Тогда ввиду леммы 1 [9] фактор-группа $G / C_G(G')$ нециклическая. Пусть $G = C_G(G') \leftthreetimes T$. Группа T содержит нециклическую силовскую подгруппу R по числу r. Поскольку силовские подгруппы у G метацикличны, то $R = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$, $|b_1| = |b_2| = r$. Пусть $\langle a_1 \rangle$ — такая подгруппа простого порядка из G' (например, p), что $[a_1, b_1] \neq 1$. Тогда $\langle a_1, b_1 \rangle' = \langle a_1 \rangle$ и в R существует ввиду цикличности группы $G / C_G(\langle a_1 \rangle)$ такое дополнение N к $\langle b_1 \rangle$, что $[a_1, N] = 1$. Не теряя общности, можно считать, что $N = \langle b_2 \rangle$. Тогда ввиду соотношения $R \cap C_G(G') = 1$ в G' существует подгруппа $\langle a_2 \rangle$ простого порядка (например, q), $q \neq p$, такая, что $[a_2, b_2] \neq 1$. Тогда $\langle a_2, b_2 \rangle' = \langle a_2 \rangle$ и коммутант группы $H = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \leftthreetimes (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle)$ равен $\langle a_1, a_2 \rangle$. Если $[a_2, b_1] \neq 1$, то ввиду цикличности группы $G / C_G(\langle a_2 \rangle)$ в R существует дополнение N_1 к $\langle b_2 \rangle$ такое, что $[a_2, N_1] = 1$. Не теряя общности, можно считать, что $N_1 = \langle b_1 \rangle$. Итак, $R = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ и $[a_1, b_2] \neq 1$, $[a_2, b_1] = 1$. Следовательно, $H = (\langle a_1 \rangle \leftthreetimes \langle b_1 \rangle) \times (\langle a_2 \rangle \leftthreetimes \langle b_2 \rangle)$ — неметациклическая группа, $H = G$ и является группой типа 4.

Обратно, группы типов 1 – 4 неизоморфны, вполне факторизуемы, неметациклические, а все их собственные подгруппы метацикличны. Лемма доказана.

3. *Доказательство теоремы.* *Необходимость.* Пусть G — A-группа с неабелевым коммутантом и дополняемыми неметациклическими подгруппами и содержит не элементарную абелеву силовскую подгруппу.

В силу леммы 5 [10] группа G дисперсивна. Отсюда нетрудно получить, что силовские подгруппы группы G метацикличны. Поскольку согласно лемме 1 [10] G'' — абелева вполне факторизуемая нециклическая группа, то $G'' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, $|a_1| = |a_2|$, $(|G/G''|, |G''|) = 1$, а так как G'', — нециклическая группа, то G' — неметациклическая группа и, значит, G/G' — вполне факторизуемая группа. Отсюда ввиду результатов [11] следует $G = G'' \leftthreetimes (K \leftthreetimes M)$, где $(KM)' = K$, $G' = G''K$ и M — вполне факторизуемая метациклическая абелева группа, а K — не вполне факторизуемая абелева метациклическая группа.

Пусть K_0 — подгруппа, порожденная всеми элементами простых порядков из K. Тогда подгруппа K_0M недополняема в KM. Значит, она метациклична. Поскольку $(K_0M)' = K_0$, то K_0 — циклическая группа. Тогда и группа K циклическая. Пусть $K = \langle b \rangle \times K_1$, где $|b| = q^{\alpha}$, $\alpha > 1$. Так как $G''K_1 \lhd G$, то $(G''K_1)' \lhd G$ и $(G''K_1)' \subset G''$. Если $G''K_1$ — неметациклическая группа, то $G/G''K_1$ — вполне факторизуемая группа. Противоречие, так как $G''K_1 \cap \langle b \rangle = 1$. Значит, $G''K_1$ — метациклическая группа и $(G''K_1)'$ — циклическая группа. Отсюда ввиду минимальности нормальных делителей группы G, являющихся силовскими подгруппами коммутанта G'', следует $[G'', K_1] = 1$. Но тогда $[G'', b] \neq 1$ и по тем же соображениям $\langle G'', b \rangle' = G''$. Поэтому K_1 — вполне факторизуемая группа. Поскольку $\langle G'', b^q \rangle' \lhd G$, а подгруппа $\langle G'', b^q, K_1 \rangle$ недополняема в G, то $[G'', b] = 1$.

Пусть d — элемент простого порядка из M, $[b, d] \neq 1$. Тогда ввиду леммы 4 [10] из дополняемости неметациклических подгрупп в группе $\langle G'', b, d \rangle / \langle b^q \rangle$ с неабелевым коммутантом следует $|d| = 2$. Так как группа $M / C_M(\langle b \rangle)$ циклическая, то $M = \langle d \rangle \times M_1$, где $[M_1, b] = 1$. Группа $G''M_1$ нормальна в $G'\langle b, M \rangle$, поэтому она метациклична, группа $(G''M_1)'$ циклична, а так как силовские подгруппы из G'' являются минимальными нормальными делителями и в группе $\langle G'', b, M \rangle$, то $\langle G'', M_1 \rangle' = 1$. Обозначим $C = \langle K_1, M \rangle'$. Очевидно, $[C, G''\langle b \rangle] = 1$, $d^{-1}Cd = C$. Группа $\langle G'', C, d \rangle$ — вполне факторизуемая, а $\langle G'', b^q, C, d \rangle$ — метациклическая группа. Необходимость доказана.

Достаточность. Нетрудно убедиться, что у группы G указанного в теореме типа силовские подгруппы абелевы.

Пусть F — ее неметациклическая группа. Тогда $F \not\subset T = T_1 \leftthreetimes \langle d \rangle$, где $T_1 = \langle G'', b^q, C \rangle \lhd G$ и $[G : T] = q$. Холловские $\{2, q\}'$-подгруппы из F содержатся в T_1. Если и $F_q \subset T_1$, то F содержится в группе $\overline{T}$, сопряженной с T с помощью элемента $x \in G$ такого, что $x^{-1}T_2x \supset F_2$. Отсюда следует, что $F_q \not\subset T_1$. Но тогда $(\langle b^q \rangle \times C)F_q$ содержит силовскую q-подгруппу группы G. Поскольку $|C_q| = q$ или $|C_q| = 1$, это означает, что F_q содержит элемент порядка $|b|$. Следовательно, $G = FT = FW$, где $W = \langle G'', C, d \rangle$ — вполне факторизуемая группа. Отсюда следует дополняемость F в G. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и основного результата работы [9] получаем следующее утверждение.

Следствие. *В конечной неметациклической разрешимой группе G, в которой все силовские подгруппы абелевы, но не все элементарные абелевы, тогда и только тогда дополняемы все неметациклические подгруппы, когда она является группой одного из следующих типов:*

1) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes (\langle b \rangle \times R)$, *где* $R = \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle$, $|c_1| = r^{\alpha}$, $|c_2| = r^{\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta \geq 1$, r — *простое число*, $r \nmid |a| \cdot |b|$, $C_R(a) = \langle c_1^r \rangle \times \langle c_2^r \rangle$, $\langle a, b \rangle$ — *вполне факторизуемая группа*;

2) $G = (\langle a \rangle \times D) \leftthreetimes \langle c \rangle$, *где* $\langle a, c \rangle' = \langle a \rangle$, $D \lhd G$, $|c| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $[a, c^p] = 1$, $p \nmid |a| = (|a|^2, |D|)$, $p \nmid |D|$, $|a|^2 \mid |G'|$, $\langle a, D, c^p \rangle$ — *метациклическая, а* $\langle a, D \rangle$ — *вполне факторизуемая группа*;

3) $G = D \leftthreetimes B$, *где* $B = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle c \rangle) \times (\langle b \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle)$, $|a| = |b|$, $|c| = p^{\alpha}$, $|d| = q^{\beta}$, $\alpha, \beta > 1$, $p \neq q$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle = B' \lhd G$, $|B / C_B(B')| = pq$, *подгруппы* $\langle D, B', c, d^q \rangle$ *и* $\langle D, B', d, c^p \rangle$ *метацикличны, а* DB' — *вполне факторизуемая группа*;

4) $G = (K \times D) \leftthreetimes \langle b \rangle$, *где* $|b| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, p — *простое число*, $K = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \lhd G$, $|a| = |b| > 1$, $\langle D, K, b^p \rangle$ — *метациклическая, а* DK — *вполне факторизуемая группа и* b *индуцирует на силовских подгруппах из* K *неприводимый автоморфизм порядка* p;

5) *группа из теоремы.*

1. *Hall Ph.* Complemented groups // J. London Math. Soc. – 1937. – **12**. – P. 201 – 204.
2. *Баева Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. – 1953. – **92**, № 5. – С. 877 – 880.
3. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. – 1956. – **39**. – С. 273 – 292.
4. *Черникова Н. В.* К основной теореме о вполне факторизуемых группах // Группы с системами дополняемых подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 49 – 58.
5. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Мат. сб. – 1954. – **35**. – С. 93 – 128.
6. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Учен. зап. Перм. ун-та. – 1960. – **17**, вып. 2. – С. 15 – 31.
7. *Черников С. Н.* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. – 1969. – **21**, № 2. – С. 193 – 209.
8. *Барыповец П. П.* Конечные неразрешимые группы с дополняемыми неметациклическими подгруппами // Там же. – 1987. – **39**, № 5. – С. 547 – 551.
9. *Барыповец П. П.* О конечных A-группах, в которых все неметациклические подгруппы дополняемы // Там же. – 1988. – **40**, № 3. – С. 297 – 302.
10. *Барыповец П. П.* О конечных A-группах, в которых дополняемы неметациклические подгруппы // Там же. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1162 – 1169.
11. *Taunt D.* On A-groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1949. – **45**, № 1. – P. 24 – 42.

Получено 01.03.2002