УДК 519.41/47

Н. С. Черников, Н. А. Хмельницкий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ СО СЛАБЫМИ УСЛОВИЯМИ π-СЛОЙНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ И π-СЛОЙНОЙ МАКСИМАЛЬНОСТИ

We investigate locally nilpotent groups with weak conditions of the π-layer minimality and the π-layer maximality.

Досліджуються локально нільпотентні групи зі слабкими умовами π-шарової мінімальності і π-шарової максимальності.

Одними из наиболее известных условий конечности в теории групп являются условия минимальности (min) и максимальности (max) для подгрупп. Их естественными обобщениями являются условия π-минимальности (π-min) и π-максимальности (π-max) и их ослабления: условия π-слойной минимальности (l_π-min) и π-слойной максимальности (l_π-max). Здесь и ниже π — фиксированное множество простых чисел. Первое из этих условий введено в рассмотрение С. Н. Черниковым в 1958 г. (см., например, [1]), а три последних — Н. С. Черниковым [1 – 5]. С группами, удовлетворяющими указанным условиям, связаны результаты Н. С. Черникова [1 – 5], Я. Д. Половицкого [6 – 8], И. И. Павлюка, А. А. Шафиро, В. П. Шункова [9] и др.

Определение 1. *Группа G удовлетворяет условию π-min (π-max), если в ней не существует бесконечной убывающей (возрастающей) цепочки подгрупп $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k \supset G_{k+1} \supset \ldots$ ($G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \ldots$) такой, что в каждом множестве $G_k \setminus G_{k+1}$ ($G_{k+1} \setminus G_k$) содержится π-элемент.*

Определение 2. *Группа G удовлетворяет условию l_π-min (l_π-max), если в ней ни для какого π-числа n не существует бесконечной убывающей (возрастающей) цепочки подгрупп $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k \supset G_{k+1} \supset \ldots$ ($G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \ldots$) такой, что в каждом множестве $G_k \setminus G_{k+1}$ ($G_{k+1} \setminus G_k$) содержится элемент порядка n.*

С другой стороны, обобщениями условий min и max являются слабые условия минимальности (min-∞) и максимальности (max-∞), введенные в рассмотрение Д. И. Зайцевым (см., например, [10]) и Р. Бэром [11]. Напомним их.

Определение 3. *Группа G удовлетворяет условию* min-∞ (max-∞), *если в ней не существует бесконечной убывающей (возрастающей) цепочки подгрупп $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k \supset G_{k+1} \supset \ldots$ ($G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \ldots$) такой, что все индексы $|G_k : G_{k+1}|$ ($|G_{k+1} : G_k|$) бесконечны.*

Ряд важных результатов, связанных с группами, удовлетворяющими условию min-∞ или max-∞ для тех или иных подгрупп, получен Р. Бэром, Д. И. Зайцевым, Л. А. Курдаченко, В. Н. Образцовым, А. Н. Остыловским, Д. Ю. Робинсоном, А. В. Тушевым, Н. С. Черниковым и др.

Естественными ослаблениями отмеченных условий являются слабые условия π-минимальности (π-min-∞), π-максимальности (π-max-∞), π-слойной минимальности (l_π-min-∞) и π-слойной максимальности (l_π-max-∞).

Определение 4 (Н. С. Черников). *Группа G удовлетворяет условию π-min-∞ (π-max-∞), если в ней не существует бесконечной убывающей (возрастающей) цепочки подгрупп $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k \supset G_{k+1} \supset \ldots$ ($G_1 \subset G_2 \subset \ldots$*

$\ldots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \ldots$) *такой, что в каждом множестве* $G_k \backslash G_{k+1}$ ($G_{k+1} \backslash G_k$) *содержится* π*-элемент и все индексы* $|G_k : G_{k+1}|$ ($|G_{k+1} : G_k|$) *бесконечны.*

Определение 5 (Н. С. Черников). *Группа* G *удовлетворяет условию* l_π-min-∞ (l_π-max-∞), *если в ней ни для какого* π*-числа* n *не существует бесконечной убывающей (возрастающей) цепочки подгрупп* $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k \supset \supset G_{k+1} \supset \ldots$ ($G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \ldots$) *такой, что в каждом множестве* $G_k \backslash G_{k+1}$ ($G_{k+1} \backslash G_k$) *содержится элемент порядка* n *и все индексы* $|G_k : G_{k+1}|$ ($|G_{k+1} : G_k|$) *бесконечны.*

В случае, когда $\pi = \{p\}$, говорят, что G удовлетворяет соответственно условиям p-min, p-max, p-min-∞, p-max-∞, l_p-min, l_p-max, l_p-min-∞, l_p-max-∞. При $\pi = \varnothing$ произвольная группа удовлетворяет этим условиям, поскольку тогда 1 — единственный ее π-элемент.

В настоящей работе все обозначения стандартны. Основными ее результатами являются теоремы 1 и 2, первая из которых анонсирована в [12].

Напомним, что в локально нильпотентной группе для каждого простого p силовская p-подгруппа единственная [13, с. 400].

Теорема 1. *Пусть* $\pi \neq \varnothing$. *Локально нильпотентная группа* G *удовлетворяет условию* l_π-min-∞ *тогда и только тогда, когда для каждого* $p \in \pi$ *ее силовская* p*-подгруппа черниковская.*

Теорема 2. *Пусть* $\pi \neq \varnothing$. *Локально нильпотентная группа* G *удовлетворяет условию* l_π-max-∞ *тогда и только тогда, когда она или является разрешимой минимаксной группой, или в ней для каждого* $p \in \pi$ *силовская* p*-подгруппа — конечная над своим центром черниковская.*

Отметим, что вследствие теоремы 2 и теоремы 3 [3] класс локально нильпотентных групп с условием l_π-max-∞ шире класса локально нильпотентных групп с условием l_π-max.

Напомним, что группа G называется минимаксной, если она имеет конечный нормальный ряд, любой фактор которого удовлетворяет условию min или max. (Под нормальными и инвариантными рядами группы понимаем то же, что в [13].) Заметим, что ввиду предложения 1.5 [11] и леммы 25.2.4 [14] в локально нильпотентной минимаксной группе p-подгруппы черниковские. С учетом этого из теорем 1 и 2 вытекает следующее предложение.

Предложение 1. *Локально нильпотентная группа* G, *удовлетворяющая условию* l_π-max-∞, *удовлетворяет условию* l_π-min-∞.

Доказательствам теорем 1, 2 предпошлем вспомогательные утверждения. (Некоторые из них представляют самостоятельный интерес.)

Лемма 1. *Пусть* G *— группа, удовлетворяющая условию* l_p-min-∞ *или* l_p-max-∞. *Тогда в любом ее прямом разложении число множителей, содержащих отличные от единицы* p*-элементы, конечно.*

Доказательство. Пусть некоторое прямое разложение группы G имеет множители $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, содержащие элементы порядка p, $H_k = A_{2^{k-1}} \times \times A_{2^{k-1}2} \times \ldots \times A_{2^{k-1}n} \times \ldots$, $B_k = A_{2^{k-1}} \times A_{2^{k-1}3} \times \ldots \times A_{2^{k-1}(2n-1)} \times \ldots$, $L_1 = B_1$, $L_{k+1} = L_k \times B_{k+1}$, $k, n = 1, 2, \ldots$. Тогда у цепочек $H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_k \supset H_{k+1} \supset \ldots$ и $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_k \subset L_{k+1} \subset \ldots$ каждый индекс $|H_k : H_{k+1}|$ и $|L_{k+1} : L_k|$ бесконечен и разности $H_k \backslash H_{k+1}$ и $L_{k+1} \backslash L_k$ содержат элементы порядка p. Следовательно, G не удовлетворяет условиям l_p-min-∞ и l_p-max-∞. Противоречие.

Лемма 2. *Локально конечная p-группа G, удовлетворяющая для абелевых подгрупп условию l_p-min-∞ или l_p-max-∞, является черниковской.*

Доказательство. Вследствие леммы 1 нижний слой произвольной абелевой подгруппы A группы G конечен. Поэтому A — черниковская (см., например, лемму 1.10 [15]). В силу теоремы С. Н. Черникова о черниковости локально конечных p-групп с условием min для абелевых подгрупп (см., например, [15], теорема 4.1) G — черниковская. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для произвольных множества $\pi \neq \varnothing$ простых чисел и группы G следующие утверждения равносильны:*

1) *группа G удовлетворяет условию l_π-min-∞ (l_π-max-∞);*

2) *для каждого конечного $\sigma \subseteq \pi$ группа G удовлетворяет условию l_σ-min-∞ (l_σ-max-∞);*

3) *для каждого $p \in \pi$ G удовлетворяет условию l_p-min-∞ (l_p-max-∞).*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2 [4].

Предложение 2 (Н. С. Черников). *Пусть G — черниковская группа, H — конечное множество ее элементов, A — конечнопорожденная группа операторов группы G. Тогда подгруппа $\langle H^A \rangle$ группы G конечна. Вместе с этим $|A : C_A(\langle H^A \rangle)| < \infty$ и $|A : C_A(H)|$ делит $|A : C_A(\langle H^A \rangle)|$.*

Доказательство. Пусть $A = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, R — полная часть группы G, для произвольного натурального n R_n — подгруппа, образованная всеми $g \in R$ с $|g| \leq n$, T — система взятых по одному представителей всех смежных классов G по R и $K = \langle T, H \rangle$. Очевидно, $R_n \subseteq R_{n+1} \trianglelefteq G$, $|R_n| < \infty$ и $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, $|K| < \infty$ и $G = KR$. Можно считать, что $\{a_1, \ldots, a_m\}^{-1} = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Пусть $K = \{g_1, \ldots, g_k\}$. Тогда $g_i^{a_j} = g_{ij} b_{ij}$, где $g_{ij} \in K$, $b_{ij} \in R$, и при некотором l $\{b_{ij} | i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, m\} \subseteq R_l$. Так как, очевидно, $K^A \subseteq KR_l$, то $\langle H^A \rangle \subseteq \subseteq KR_l$, а значит, $|\langle H^A \rangle| \leq |KR_l| < \infty$ и $|A : C_A(\langle H^A \rangle)| < \infty$. Поскольку $C_A(\langle H^A \rangle) \subseteq C_A(H)$, то $|A : C_A(H)|$ — делитель числа $|A : C_A(\langle H^A \rangle)|$. Предложение доказано.

Напомним, что группа G бесконечна над своим центром, если индекс $|G : Z(G)|$ бесконечен. Напомним также, что группа, в которой множество элементов каждого порядка конечно, называется слойно конечной (С. Н. Черников, см., например, [15]).

Лемма 4. *Пусть G — группа с условием l_p-max-∞, H — ее нормальная черниковская p-подгруппа, бесконечная над своим центром. Тогда произвольная абелева подгруппа без кручения группы G имеет конечный ранг.*

Доказательство. Пусть A — абелева подгруппа без кручения группы G, имеющая бесконечный ранг, $\{a_1, a_2, \ldots\}$ — произвольная счетная линейно независимая система элементов группы A и $A_k = \langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_k \rangle$, $k = 1, 2, \ldots$. Ввиду теоремы С. Н. Черникова 1.10 [15] произвольная слойно конечная p-группа конечна над своим центром. Следовательно, для некоторого натурального n множество M всех элементов порядка p^n подгруппы H бесконечно. Пусть $g_1 \in M$. В силу предложения 2 подгруппа $H_1 = \langle g_1^{A_1} \rangle$ группы H конечна. Пусть $g_2 \in M \setminus H_1$. Снова в силу предложения 2 подгруппа $H_2 = \langle \langle H_1, g_2 \rangle^{A_2} \rangle$ группы H конечна. Возьмем $g_3 \in M \setminus H_2$ и положим $H_3 = \langle \langle H_2, g_3 \rangle^{A_3} \rangle$ и т. д. Тогда в ряде $A_1 H_1 \subset A_2 H_2 \subset \ldots \subset A_k H_k \subset A_{k+1} H_{k+1} \subset \ldots$ каждая разность

$A_{k+1}H_{k+1} \backslash A_kH_k$ содержит элемент g_{k+1} порядка p^n, и каждый индекс $|A_{k+1}H_{k+1} : A_kH_k|$ бесконечен. Противоречие.

Лемма 5 (Н. С. Черников). *Пусть F — локально нильпотентная группа, $G \trianglelefteq F$ — ее черниковская подгруппа, H — конечное множество элементов группы G, $A \le F$ и $\pi = \pi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1\. *Если A конечнопорождена, то $A/C_A(\langle H^A \rangle)$ — конечная нильпотентная π-группа и $|A : C_A(H)|$ — π-число.*

2\. *Если A абелева, то $A/C_A(H)$ — π-группа.*

3\. *Если A абелева без кручения конечного ранга, то $A/C_A(H)$ — черниковская π-группа.*

4\. *Если A абелева без кручения конечного ранга r, B — свободная абелева подгруппа группы A ранга r и силовская π-подгруппа группы A/B конечна, то подгруппа $\langle H^A \rangle$ конечна.*

Доказательство. 1. Ввиду предложения 2 $A/C_A(\langle H^A \rangle)$ — конечная нильпотентная группа. Пусть $A/C_A(\langle H^A \rangle)$ — не π-группа. Тогда для некоторого простого $q \notin \pi$ $A/C_A(\langle H^A \rangle)$ содержит элемент $gC_A(\langle H^A \rangle)$ порядка q.

Пусть $|g| < \infty$. Тогда для некоторого q-элемента $d \in \langle g \rangle$ $gC_A(\langle H^A \rangle) = dC_A(\langle H^A \rangle)$. Поскольку $\langle g \rangle \langle H^A \rangle$ — конечная нильпотентная подгруппа и $q \notin \pi(\langle H^A \rangle)$, то $d \in C_A(\langle H^A \rangle)$. Вместе с этим $dC_A(\langle H^A \rangle) = C_A(\langle H^A \rangle)$. Противоречие. Итак, g — элемент бесконечного порядка.

Поскольку, очевидно, $\langle H^A \rangle C_{\langle g \rangle}(\langle H^A \rangle)/C_{\langle g \rangle}(\langle H^A \rangle) \leftthreetimes (\langle g \rangle / C_{\langle g \rangle}(\langle H^A \rangle))$ — конечная нильпотентная группа, $\langle g \rangle / C_{\langle g \rangle}(\langle H^A \rangle)$ — ее подгруппа порядка q и $\langle H^A \rangle C_{\langle g \rangle}(\langle H^A \rangle)/C_{\langle g \rangle}(\langle H^A \rangle)$ — ее q'-подгруппа, то $[\langle g \rangle, \langle H^A \rangle] \subseteq C_{\langle g \rangle}(\langle H^A \rangle)$. Следовательно, $[\langle g \rangle, \langle H^A \rangle] \subseteq C_{\langle g \rangle}(\langle H^A \rangle) \cap \langle H^A \rangle \subseteq \langle g \rangle \cap \langle H^A \rangle = 1$, т. е. $g \in C_A(\langle H^A \rangle)$. Противоречие.

2\. Действительно, вследствие утверждения 1 для произвольного $a \in A$ порядок элемента $aC_A(H)$ фактор-группы $A/C_A(H)$ — π-число.

3\. Ввиду утверждения 2 $A/C_A(H)$ — абелева π-группа конечного ранга. Вместе с тем $A/C_A(H)$ — прямое произведение своих силовских p-подгрупп по всем $p \in \pi$. Поэтому из черниковости примарных абелевых групп конечного ранга (см., например, [14], теорема 10.1.16) и конечности π вытекает черниковость группы $A/C_A(H)$.

4\. Действительно, A имеет ряд $1 \subseteq B \subseteq S \subseteq A$, у которого B — конечнопорождена, S/B — конечная силовская π-подгруппа группы A/B, A/S — π'-группа. Пусть φ — гомоморфизм A на $A/C_A(H)$. Тогда у ряда $1 \subseteq B^\varphi \subseteq S^\varphi \subseteq A^\varphi$ факторы B^φ, S^φ/B^φ, A^φ/S^φ такие же, как и у предыдущего ряда. Поскольку A^φ — π-группа (утверждение 2 настоящей леммы), то $|B^\varphi| < \infty$ и $A^\varphi/S^\varphi = 1$. Следовательно, $A/C_A(H)$ — конечна. Поэтому $|H^A| < \infty$ и, значит, с учетом локальной конечности группы G $|\langle H^A \rangle| < \infty$.

Лемма 6. *Пусть $G = H \leftthreetimes B$ — локально нильпотентная группа, H — черниковская p-подгруппа, бесконечная над своим центром, и B — абелева группа без кручения конечного ранга, не удовлетворяющая условию $\max\text{-}\infty$. Тогда G не удовлетворяет условию $l_p\text{-}\max\text{-}\infty$.*

Доказательство. Поскольку B имеет конечный ранг, то она содержит конечнопорожденную подгруппу L с периодической B/L, причем силовская p-подгруппа последней черниковская. Вследствие леммы 1.2 [11] B/L — нечерниковская и потому ее силовская p'-подгруппа A/L нечерниковская. В силу леммы 1.1 [11] A/L не удовлетворяет условию $\max\text{-}\infty$, т. е. A/L имеет возрастающий ряд $A_1/L \subset A_2/L \subset \ldots \subset A_k/L \subset A_{k+1}/L \subset \ldots$ с бесконечными индексами. Вместе с этим $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \ldots$ — возрастающий ряд с бесконечными индексами подгрупп группы A. Рассуждая, как при доказательстве леммы 4, с заменой ссылки на предложение 2 ссылкой на утверждение 4 леммы 5, убеждаемся в том, что $H \leftthreetimes A$, а вместе с тем и G, не удовлетворяют условию $l_p\text{-}\max\text{-}\infty$.

***Доказательство теоремы* 1.** *Необходимость.* Пусть $p \in \pi$. Тогда группа G удовлетворяет условию $l_p\text{-}\min\text{-}\infty$ (см. лемму 3). Поэтому ввиду леммы 2 ее силовская p-подгруппа черниковская.

Достаточность. Пусть $p \in \pi$. Поскольку силовская p-подгруппа группы G черниковская, то она удовлетворяет условию $\min$, а, значит, и условию l_p-$\min$. Поэтому вследствие лемм 1 и 2 [4] G удовлетворяет условию $l_\pi\text{-}\min$, а вместе с тем и условию $l_\pi\text{-}\min\text{-}\infty$.

Поскольку в теореме 1 группа G удовлетворяет условию $l_\pi\text{-}\min$, то справедливо следующее предложение.

Предложение 3. *В классе локально нильпотентных групп условия* $l_\pi\text{-}\min$ *и* $l_\pi\text{-}\min\text{-}\infty$ *равносильны.*

***Доказательство теоремы* 2.** *Необходимость.* В силу леммы 2 для всех $q \in \pi$ силовские q-подгруппы группы G черниковские. Пусть G не является разрешимой минимаксной группой, и для некоторого $p \in \pi$ ее силовская p-подгруппа H бесконечна над своим центром. Ввиду теоремы 4.2 [11] найдется абелева подгруппа $A \le G$, не удовлетворяющая условию $\max\text{-}\infty$. Силовская p-подгруппа P группы A содержится в H, а потому — черниковская.

Если силовская p'-подгруппа Q группы A черниковская, то для некоторой подгруппы без кручения $R \subseteq A$ $A = P \times Q \times R$ [13, с. 171]. Ввиду леммы 1.1[11] R не удовлетворяет условию $\max\text{-}\infty$. Но последнее невозможно в силу лемм 4 и 6. Таким образом, Q — нечерниковская.

Тогда вследствие леммы 1.1 [11] Q имеет некоторый ряд $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots$ $\ldots \subset Q_k \subset Q_{k+1} \subset \ldots$ подгрупп с бесконечными индексами. Поскольку H бесконечна над своим центром, то ввиду теоремы 1.10 [15] при некотором натуральном n множество M всех ее элементов порядка p^n бесконечно. Пусть $g_1 \in M$ и $H_1 = \langle g_1 \rangle$, $g_2 \in M \setminus H_1$ и $H_2 = \langle H_1, g_2 \rangle$, $g_3 \in M \setminus H_2$ и $H_3 = \langle H_2, g_3 \rangle$ и т. д. Тогда у ряда $H_1Q_1 \subset H_2Q_2 \subset \ldots \subset H_kQ_k \subset H_{k+1}Q_{k+1} \subset \ldots$ при каждом k индекс $|H_{k+1}Q_{k+1} : H_kQ_k|$ бесконечен и разность $H_{k+1}Q_{k+1} \setminus H_kQ_k$ содержит элемент порядка p^n. Но в таком случае G не удовлетворяет условию $l_\pi\text{-}\max\text{-}\infty$. Противоречие.

Достаточность. Если G — разрешимая минимаксная группа, то в силу теоремы 4.2 [11] она удовлетворяет условию $\max\text{-}\infty$, а, значит, и условию l_π-$\max\text{-}\infty$. Пусть по всем $p \in \pi$ силовские p-подгруппы группы G конечные над центром черниковские. Тогда ввиду теоремы 1.10 [15] при каждом $p \in \pi$ для любого p-числа m множество всех элементов порядка m группы G конечно или пусто. Поскольку для произвольного π-числа n любой элемент порядка n группы G является произведением p-элементов взаимно простых порядков, делящих n, то множество всех π-элементов порядка n группы G конечно. В таком случае у любого возрастающего ряда подгрупп группы G лишь конечное число разностей между соседними членами могут содержать элемент порядка n. Следовательно, G удовлетворяет условию l_π-max, а потому и l_π-max-∞.

1. *Черников Н. С.* Группы с условием π-минимальности // Докл. РАН. – 1998. – **358**, № 2. – С. 169 – 170.
2. *Черников Н. С.* Бесконечные локально конечные группы $PSL_2(F)$, удовлетворяющие условию π-минимальности // Изв. Гомел. ун-та. Вопросы алгебры. – 1999. – № 1 (15). – С. 47 – 59.
3. *Черников Н. С.* Группы с условиями π-максимальности и π-слойной максимальности // Мат. заметки. – 2000. – **68**, № 2. – С. 311 – 320.
4. *Черников Н. С.* Группы с условиями π-минимальности и π-слойной минимальности. I // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**, № 5. – С. 1193 – 1206.
5. *Черников Н. С.* Группы с условиями π-минимальности и π-слойной минимальности. II // Там же. – 2002. – **43**, № 1. – С. 194 – 211.
6. *Половицкий Я. Д.* О группах с условием π-минимальности для подгрупп // Там же. – 1962. – **3**, № 4. – С. 582 – 590.
7. *Половицкий Я. Д.* Слойно экстремальные группы // Мат. сб. – 1962. – **56**, № 1. – С. 95 – 106.
8. *Половицкий Я. Д.* Группы с условием слойной минимальности // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 6. – С. 847 – 850.
9. *Павлюк И. И., Шафиро А. А., Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. – 1974. – **13**, № 3. – С. 325 – 336.
10. *Зайцев Д. И.* О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности и максимальности для подгрупп // IX Всесоюз. алгебр. коллоквиум (резюме). – Гомель, 1968. – С. 76 – 77.
11. *Baer R.* Poliminimaxgruppen // Math. Ann. – 1968. – **175**, № 1. – S. 1 – 43.
12. *Хмельницкий Н. А., Черников Н. С.* О локально нильпотентных группах со слабым условием π-слойной минимальности // Укр. мат. конгрес: Тези доп. Секція 1. Алгебра і теорія чисел. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 53.
13. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
14. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
15. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

Получено 06.03.2002