УДК 512.542

В. С. Монахов, М. В. Селькин, Е. Е. Грибовская (Гомел. ун-т, Беларусь)

О РАЗРЕШИМЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

We consider solvable invariant subgroups of a finite group with limited primary indices of maximal subgroups. We establish the belonging of an invariant subgroup of this sort to the product of classical formations and investigate the dispersibility of this subgroup.

Розглядаються розв'язні нормальні підгрупи скінченної групи з обмеженими примарними індексами максимальних підгруп. Встановлюється належність такої нормальної підгрупи добутку класичних формацій, досліджується її дисперсивність.

Будем рассматривать только конечные группы. Пусть K — нормальная подгруппа группы G. Если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, является простым числом, то подгруппа K сверхразрешима. Это следует из теоремы Л. А. Шеметкова [1] (теорема 3.1). Если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, является простым числом или квадратом простого числа, то согласно теореме Л. Я. Полякова [2] (теорема 1) подгруппа K разрешима. В общем случае в работах [3–5] установлено, что если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, примарен, т. е. является степенью некоторого простого числа, то либо K разрешима, либо $G/S(K) = K/S(K) \times H/S(K)$, причем $K/S(K) \simeq PSL(2, 7)$, $H = H^{\mathrm{form}\, PSL(2,7)}$ (см. также [6], теорема 3.2.1). Здесь $S(K)$ — разрешимый радикал подгруппы K, $\mathrm{form}\, PSL(2, 7)$ — формация, порожденная группой $PSL(2, 7)$, а $H^{\mathrm{form}\, PSL(2,7)}$ — $\mathrm{form}\, PSL(2, 7)$-корадикал подгруппы H.

В настоящей статье рассматривается случай, когда нормальная подгруппа K разрешима и индекс каждой максимальной подгруппы группы G, не содержащей K, примарен и ограничен. В теореме 1 исследуется случай, когда индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, является простым числом, квадратом или кубом простого числа, и доказывается принадлежность подгруппы K произведению $\mathfrak{N}^2 \mathfrak{N}_2 \mathfrak{U}$. В теореме 2 устанавливается дисперсивность подгруппы K при дополнительных ограничениях на простые делители ее порядка. Из этих двух теорем выводится ряд следствий, которые также являются новыми результатами в теории групп.

Напомним необходимые определения. Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей порядка группы G. Если $\pi(G) = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$, и группа G имеет нормальный ряд

$$E = G_0 < G_1 < G_2 < \ldots < G_n = G$$

такой, что G_i/G_{i-1} изоморфна силовской p_i-подгруппе группы G, $i = 1, 2, \ldots, n$, то группа G называется дисперсивной по Оре.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и G — группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G (см. [7–9]). Произведением формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ называется класс $\mathfrak{X}\mathfrak{F} = \{G \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}\}$, состоящий из всех групп G, у которых $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{X}$. Как обычно, запись $\mathfrak{X}^2$ означает произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{X}$. Формация $\mathfrak{X}$ называется насыщенной, если из условия $G/N \in \mathfrak{X}$, $N \le \Phi(G)$, где $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, следует, что $G \in \mathfrak{X}$.

Через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}$ обозначаются классы всех абелевых, сверхразрешимых и нильпотентных групп соответственно. Если $\mathfrak{F}$ — класс групп и π — некоторое множество простых чисел, то $\mathfrak{F}_\pi$ — класс всех π-групп из $\mathfrak{F}$. В частности, $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_{2'}$ — классы всех 2-групп и нильпотентных групп нечетного порядка соответственно. Все указанные классы, кроме класса $\mathfrak{A}$, являются наследственными насыщенными формациями. Класс $\mathfrak{A}$ является наследственной формацией, но эта формация не насыщена. Если в некоторой формации все группы разрешимы, то ее называют разрешимой формацией.

Лемма 1. *Пусть C — циклическая группа и группа $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, где $A_i \simeq C$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если N — элементарная абелева p-подгруппа группы G, то $|N| \leq p^n$.*

Доказательство проводится индукцией по n.

Лемма 2. 1. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — формации, то $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — формация.*

2. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — наследственные формации, то $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — наследственная формация.*

3. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — разрешимые насыщенные формации, то $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — разрешимая насыщенная формация.*

4. *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — формации и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Утверждение 1 следует из теоремы 1.1 [7].

2. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — наследственные формации, $G \in \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ и $H \leq G$. Тогда $HG^{\mathfrak{Y}}/G^{\mathfrak{Y}} \leq G/G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{Y}$, поэтому $HG^{\mathfrak{Y}}/G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{Y}$. Поскольку $HG^{\mathfrak{Y}}/G^{\mathfrak{Y}} \simeq H/(H \cap G^{\mathfrak{Y}})$, то $H^{\mathfrak{Y}} \leq G^{\mathfrak{Y}}$. Но $G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}$, поэтому $H^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}$ и $H \in \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$.

3. Так как каждая насыщенная формация является классом Шунка [8] (теорема V.8), то согласно теореме VII.3 [8] произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ является классом Шунка, а согласно первому утверждению леммы произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — насыщенная формация. Ясно, что $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — разрешимая формация.

4. Как и в утверждении 3, согласно теоремам V.8 и VII.4 [5] произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ — формации. Тогда*:

1) *если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и H — подгруппа группы G, то $H^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$;*

2) *если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $\mathfrak{F}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}\mathfrak{M}$.*

Доказательство. 1. Поскольку $HG^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \leq G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $H/H \cap G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $H^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$.

2. Пусть $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{M}$. Тогда $G^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{F}$. Теперь $(G^{\mathfrak{M}})^{\mathfrak{H}} \leq G^{\mathfrak{M}}$, а так как $\mathfrak{F}$ наследственна, то $(G^{\mathfrak{M}})^{\mathfrak{H}} = G^{(\mathfrak{H}\mathfrak{M})} \in \mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}\mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Через $r(H)$, $n(H)$ и $d(H)$ обозначаются соответственно главный ранг, нильпотентная и производная длины разрешимой группы H (см. [7–9]).

Лемма 4. *Если H — неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$, то $H \in \mathfrak{A}_2^2\mathfrak{U} \cap (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}^2)(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U})$. В частности, $r(H) \leq 2$, подгруппа $H \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2$, поэтому $n(H) \leq 3$, $d(H) \leq 4$.*

Доказательство. Заключим H в максимальную разрешимую подгруппу M группы $GL(2, p)$ и докажем утверждение леммы для M. Ясно, что с учетом лемм 2 и 3 утверждение будет справедливо и для H. Очевидно, M — неприводимая подгруппа.

Если M импримитивна, то M изоморфна сплетению циклической группы A порядка $p - 1$ и группы B порядка 2 (см. [10], теорема 18.5). Диагональ S базы $D = A \times A$ этого сплетения будет нормальной подгруппой в M, изоморфной A, поэтому M имеет нормальный ряд $1 \lhd S \lhd D \lhd M$, где S и D/S циклические порядка $p-1$ и M/D порядка 2. Поэтому $M \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}_{\pi(p-1)}\mathfrak{A}_2$, подгруппа M сверхразрешима и $d(M) \le 2$.

Если M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^2)$, то согласно теореме 21.1 [10] фактор-группа M/F имеет порядок 2 и опять $M \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}_{\pi(p^2-1)}\mathfrak{A}_2$ и $d(M) \le 2$.

Пусть M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа $F = GF(p)^{\#}E_2$. Подгруппа F состоит из скалярных матриц [10, с. 234] (формула (13)), поэтому F содержится в центре M. В M существует нормальная подгруппа A такая, что A содержит F и A/F изоморфна элементарной абелевой группе порядка 4, а M/A — симметрической группе степени 3 [10, с. 234] (формулы (13) и (14)). Поэтому $A \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}^2$ и $M \in (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}^2)(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U})$. Поскольку $r(M/A) = 1$, $r(A/F) = 2$ и F нормальна в M, то $r(M/F) \le 2$. Из того, что F содержится в центре M, следует $r(M) \le 2$.

Так как A нильпотентна, то $n(M) \le 3$, $d(M) \le 4$ и силовская 2-подгруппа T из A нормальна в M. Теперь фактор-группа M/T имеет нормальный ряд $1 \lhd A/T \lhd M/T$, который уплотняется до главного ряда с факторами простых порядков. Значит, M/T сверхразрешима и сверхразрешимый корадикал подгруппы M содержится в T. Но $A = TF$, поэтому $A/F \simeq T/T \cap F$ и T является расширением циклической группы $T \cap F$ порядка, делящего $p-1$, с помощью элементарной абелевой группы A/F порядка 4. Поэтому $T \in \mathfrak{A}_2^2$ и $M \in \mathfrak{A}_2^2 \cap \mathfrak{U}$. Согласно [10] (гл. V, § 21) других случаев для M нет. Итак, в любом случае $H \in \mathfrak{A}_2^2\mathfrak{U} \cap (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}^2)(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U})$. В частности, $H \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Для неприводимой разрешимой подгруппы H группы $GL(3, p)$ справедливо одно из следующих включений*:

1) $H \in \mathfrak{A}_{\pi(p-1)}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U})$;

2) $H \in \mathfrak{A}_{\pi(p^3-1)}\mathfrak{A}_3 \cap \mathfrak{U}$;

3) $H \in (\mathfrak{A}_{\pi(p-1)}\mathfrak{A}_3 \cap \mathfrak{N})\mathfrak{A}_2(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U}) \cap (\mathfrak{A}_{\pi(p-1)}\mathfrak{A}_3 \cap \mathfrak{N}_3)(\mathfrak{A}_{\pi(p-1)}\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{N}_2)\mathfrak{U}$.

В частности, в любом случае $r(H) \le 3$ и $H \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2$, поэтому $n(H) \le 4$, $d(H) \le 5$.

Доказательство. Заключим H в максимальную разрешимую подгруппу M группы $GL(3, p)$ и докажем утверждение леммы для M. Ясно, что тогда с учетом лемм 2 и 3 утверждение будет справедливо и для H. Очевидно, M — неприводимая подгруппа. Согласно теореме Д. А. Супруненко [10, с. 234] возможны три случая: группа M импримитивна; группа M примитивна и ее максимальная нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^3)$; группа M примитивна и ее максимальная нормальная подгруппа $F = GF(p)^{\#}E_3$.

В первом случае группа M мономиальна и, согласно теореме 18.5 [10], сопряжена в $GL(3, p)$ со сплетением $GF(p)^{\#} i S_3$, где S_3 — симметрическая группа порядка 6 [10, с. 234]. Кроме того, группа M состоит из линейных преобразований пространства $V = V(3, GF(p))$ таких, что $g(v_i) = \lambda_i v_{i_1}$, где $\{v_1, v_2, v_3\}$ — базис V. По теореме II. 7. 2 [9] преобразования d, для которых $d(v_i) = \lambda_i v_i$, образуют абелеву подгруппу D порядка $(p-1)^3$, нормальную в M, и $M/D \simeq S_3$. Поэтому $d(M) \leq 3$, а согласно лемме 1 $r(M) \leq 3$. Теперь $K = D \cap SL(3, p) \lhd M$ и $|K| = (p-1)^2$. Ядро гомоморфизма $f: d \mapsto \det d$ совпадает с K. Поэтому D/K — циклическая группа порядка $p-1$. Отсюда следует, что M/K сверхразрешима и сверхразрешимый корадикал группы M является абелевой подгруппой порядка, делящего $(p-1)^2$. Таким образом, $M \in \mathfrak{A}_{\pi(p-1)}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U}) \subseteq \mathfrak{N}^2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2$.

Пусть теперь M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^3)$. Группа F — циклическая и $|F| = p^3 - 1$. Согласно теореме 21.1 [10] $|M| = 3(p^3 - 1)$. Поэтому M сверхразрешима, $M \in \mathfrak{A}_{\pi(p^3-1)}\mathfrak{A}_3 \cap \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}^2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2$ и $d(M) \leq 2$.

Пусть M примитивна и ее максимальная абелева нормальная подгруппа $F = GF(p)^{\#}E_3$. Подгруппа F состоит из скалярных матриц, поэтому F содержится в центре M. В M существует нормальная подгруппа A такая, что A содержит F и A/F изоморфна элементарной абелевой группе порядка 9, а M/A — симметрической группе S_4 степени 4 [10, с. 234] (формулы (13) и (14)). Поскольку A нильпотентна и $n(S_4) = d(S_4) = 3$, то $n(M) \leq 4$, $d(M) \leq 5$. Поскольку $r(S_4) \leq 2$, то и $r(M) \leq 2$. Из того, что $M/A \simeq S_4$, следует, что M содержит нормальную подгруппу B такую, что $M/B \simeq S_3$ и $A \subseteq B$, $B/A \simeq E_4$ — элементарная абелева группа порядка 4. Таким образом, $M \in (\mathfrak{A}_{\pi(p-1)}\mathfrak{A}_3 \cap \mathfrak{N})\mathfrak{A}_2(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{U}) \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2$.

Так как A нильпотентна и нормальна в M, то $\{2, 3\}$-холловская подгруппа T из A нормальна в M. Силовская 2-подгруппа в T циклическая порядка, делящего $p-1$, а силовская 3-подгруппа P в T является расширением циклической подгруппы порядка, делящего $p-1$, с помощью элементарной абелевой подгруппы порядка 9. Ясно, что P нормальна в M.

Пусть S — $\{2, 3\}$-холловская подгруппа в B. Поскольку $B = SF$ и $F \leq Z(M)$, то $S \lhd B$, поэтому $S \lhd M$. Пусть Q — силовская 2-подгруппа в S. Тогда Q является расширением циклической подгруппы порядка, делящего $p-1$, с помощью элементарной абелевой подгруппы порядка 4. Так как $P \lhd M$, то $S = [P]Q$. Теперь ряд $1 \leq FS/S = AS/S = B/S \lhd M/S$ уплотняется до главного ряда с факторами простых порядков. Поэтому M/S сверхразрешима и сверхразрешимый корадикал $M^{\mathfrak{U}}$ содержится в S. Таким образом, сверхразрешимый корадикал $M^{\mathfrak{U}}$ является 3-замкнутой $\{2, 3\}$-подгруппой, силовская 3-подгруппа которой является расширением циклической группы порядка, делящего $p-1$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 9, а силовская 2-подгруппа является расширением циклической группы порядка, делящего $p-1$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 4, т. е. $M \in (\mathfrak{A}_{\pi(p-1)}\mathfrak{A}_3 \cap \mathfrak{N}_3)(\mathfrak{A}_{\pi(p-1)}\mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{N}_2)\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}^2\mathfrak{U}$. В любом случае $M \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2$, поэтому $n(M) \leq 4$, $d(M) \leq 5$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть K — нормальная разрешимая подгруппа группы G. Если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, есть простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа, то $K \in \mathfrak{N}\left(\mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2\right)$. В частности, $n(K) \le 5$, $d(K/\Phi(K)) \le 6$, а $l_p(K) \le 2$ для любого простого p.*

Доказательство проведем индукцией по числу $|K| + |G|$. Пусть N — произвольная нормальная подгруппа группы G. Тогда фактор-группа G/N содержит разрешимую нормальную подгруппу KN/N. Если M/N — максимальная подгруппа группы G/N, не содержащая KN/N, то M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая K. Поэтому индекс подгруппы M в группе G есть простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа. Поскольку $|G/N : M/N| = |G : M|$, то все условия теоремы наследуются фактор-группой G/N. Если $N \ne 1$, то по индукции $KN/N \in \mathfrak{N}\left(\mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2\right)$. Согласно утверждению 4 леммы 2 пересечение $\mathfrak{N}\left(\mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2\right)$ является насыщенной формацией, поэтому в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа и подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$. Из того, что $K \lhd G$, следует $\Phi(K) \le \Phi(G)$, поэтому $\Phi(K) = 1$.

Так как K — неединичная разрешимая нормальная подгруппа, то ее подгруппа Фиттинга $F(K)$ неединична и нормальна в группе G, поэтому $F(K) \subseteq F(G)$ и $F = F(K) = F(G)$ — минимальная нормальная подгруппа. В группе G существует максимальная подгруппа M, не содержащая F. Ясно, что $G = FM$, $F \cap M = 1$ и индекс $|G : M| = |F|$ есть простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа. Поскольку K разрешима, то $C_K(F) = F$ и $K \cap M$ изоморфна некоторой группе автоморфизмов группы F.

Пусть сначала $|F| = p$. Группа автоморфизмов группы порядка p является циклической группой порядка $p - 1$. Поэтому K/F — циклическая группа и K сверхразрешима.

Пусть $|F| = p^2$. Так как F — элементарная абелева группа, то группа всех ее автоморфизмов изоморфна группе $GL(2, p)$. Поэтому K/F является разрешимой подгруппой группы $GL(2, p)$. Если K/F неприводима, то $K/F \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2$ согласно лемме 4, поэтому $K \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)$. Если K/F действует приводимо на F, то $F = F_1 \times F_2$, где $F_i \lhd K$, $i = 1, 2$. Это следует из того, что F — подгруппа Фиттинга группы K и $\Phi(K) = 1$. Ясно, что $|F_1| = |F_2| = p$, поэтому $K/C_K(F_i)$ — циклическая группа порядка, делящего $p - 1$ для каждого $i = 1, 2$. Так как $C_K(F_1) \cap C_K(F_2) = C_K(F) = F$, то K/F — подгруппа абелевой группы $K/C_K(F_1) \times K/C_K(F_2)$, поэтому $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Пусть теперь $|F| = p^3$. Тогда K/F является разрешимой подгруппой группы $GL(3, p)$. Если K/F — неприводимая подгруппа, то $K/F \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2$ согласно лемме 5 и $K \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}^2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2)$. Пусть K/F действует приводимо на F. Так как F — подгруппа Фиттинга группы K и $\Phi(K) = 1$, то F — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы K. Поскольку $|F| = p^3$, то возможны два случая: $F = F_1 \times F_2 \times F_3$ и $F = H_1 \times H_2$, где $|F_1| = |F_2| = |F_3| = |H_1| = p$, $|H_2| = p^2$. Если $F = F_1 \times F_2 \times F_3$, то $K/C_G(F_i)$ — циклическая группа и K/F абелева как подгруппа группы $K/C_K(F_1) \times$

$\times K/C_K(F_2) \times K/C_K(F_3)$, поэтому $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Если $F = H_1 \times H_2$, то $K/C_G(H_1)$ — циклическая группа, а $K/C_G(H_2) \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2$ согласно лемме 4. Теперь K/F является подгруппой группы $K/C_K(H_1) \times K/C_K(H_2)$, поэтому $K \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)$. Ввиду леммы 3 в любом случае $K \in \mathfrak{N}\left(\mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \right.$ $\left.\cap\, \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2\right)$.

Так как для любой разрешимой группы X фактор-группа $F(X)/\Phi(X)$ абелева, то из включения $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2$ получаем, что производная длина $d(K/\Phi(K)) \le 6$.

Сверхразрешимые группы метанильпотентны, поэтому из включения $K \in$ $\in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ следует, что подгруппа K имеет нормальный ряд $1 \lhd H \lhd T \lhd K$ с метанильпотентными факторами H и K/T, а T/H — 2-группа. Поэтому нильпотентная длина подгруппы K не больше 5, а так как метанильпотентные группы имеют p-длину ≤ 1 для любого простого p, то $l_2(K) \le 3$, а $l_p(K) \le 2$ для каждого $p > 2$.

Для получения оценки $l_2(K) \le 2$ воспользуемся индукцией по порядку группы G. Можно считать, что $\Phi(G) = O_{2'}(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F =$ $= F(G)$ группы G — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду того, что $1 \ne F(K) \le F(G)$ и подгруппа $F(K)$ нормальна в G, получаем $F(K) = F(G) = F$. Теперь группа G примитивна и можно выбрать в группе G максимальную подгруппу M такую, что $F \not\subseteq M$. Тогда $G = [F]M$ и $K = [F](K \cap M)$. Подгруппа M не содержит подгруппу K. Так как $|F| =$ $= |G : M|$, то порядок F равен 2, 4 или 8. Если $|F| = 2$, то $K = F$. Если $|F| = 4$, то фактор-группа K/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,2) \simeq S_3$ и $l_2(K) \le 2$. Если $|F| = 8$, то фактор-группа K/F изоморфна разрешимой подгруппе полной линейной группы $GL(3,2) \simeq PSL(2,7)$ и в K/F нет нормальных неединичных 2-подгрупп. Согласно теореме II.8.27 [9] либо $|K/F|$ нечетен, либо $K/F \simeq S_3$. Поэтому $l_2(K) \le 2$. Теорема доказана.

В случае $G = K$ из теоремы непосредственно вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.1.** *Если индекс каждой максимальной подгруппы разрешимой группы G есть простое число, либо квадрат простого числа, либо куб простого числа, то $G \in \mathfrak{N}\left(\mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2\right)$. В частности, $n(G) \le 5$, $d(G/\Phi(G)) \le 6$, а $l_p(G) \le 2$ для любого простого p.*

Отметим, что у группы из следствия 1.1 пятый коммутант нильпотентен. Аналогичное утверждение для шестого коммутанта содержится в теореме 17 работы Хупперта [11].

***Следствие* 1.2.** *Пусть K — нормальная подгруппа группы G. Если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, есть простое число либо квадрат простого числа, то $K \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)$. В частности, $n(K) \le 4$, $d(K/\Phi(K)) \le 5$, а $l_p(K) \le 1$ для любого простого нечетного p и $l_2(K) \le 2$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 [2] подгруппа K разрешима. Для получения включения $K \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)$ достаточно повторить часть доказательства теоремы 1, исключая случай $|F| = p^3$. Отсюда следует, что $n(K) \le 4$, $d(K/\Phi(K)) \le 5$. Подгруппа K имеет нормальный ряд $1 \lhd T \lhd K$ с метанильпотентными факторами K/T и T. Поскольку метанильпотентные группы имеют p-длину ≤ 1, то $l_p(K) \leq 2$ для любого простого p. Для получения оценки $l_p(K) \leq 1$ при $p > 2$ воспользуемся индукцией по порядку группы G. Можно считать, что $\Phi(G) = O_{p'}(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ группы G — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду того, что $F(K) \subseteq F(G)$, подгруппа $F(K)$ нормальна в G и $F(K) \neq 1$, получаем $F = F(K)$. Теперь группа G примитивна и можно выбрать максимальную подгруппу M группы G такую, что F не содержится в M. Таким образом, $G = [F]M$, $F \cap M = 1$ и $K = [F](K \cap M)$. Подгруппа M не содержит подгруппу K, поэтому индекс $|G : M|$ равен простому числу либо квадрату простого числа. Значит, порядок $|F|$ есть p либо p^2, где p — простое число. Поэтому силовская p-подгруппа $G_p = [F](G_p \cap M) = [F]M_p$, где M_p — силовская p-подгруппа в M. Тогда $K_p = [F](M \cap K_p)$. Если $M \cap$ $\cap K_p = 1$, то $F = K_p$ и $l_p(G) = 1$. Пусть $M \cap K_p \neq 1$. Если $|F| = p$, то фактор-группа K/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}F$ группы F, порядок которой равен $p-1$. Отсюда $K_p = F$ и $l_p(G) = 1$. Пусть теперь $|F| = p^2$. Тогда фактор-группа K/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2, p)$, порядок которой равен $(p^2 - 1)(p^2 - p)$. Порядок силовской p-подгруппы K_p группы K равен p^3. Но группа с силовской p-подгруппой порядка $\leq p^3$ при нечетном p имеет p-длину ≤ 1. Следствие доказано.

При $G = K$ из следствия 1.2 непосредственно вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.3.** *Если индекс каждой максимальной подгруппы группы G есть простое число либо квадрат простого числа, то $G \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)$. В частности, $n(G) \leq 4$, $d(G/\Phi(G)) \leq 5$, а $l_p(G) \leq 1$ для любого простого нечетного p и $l_2(G) \leq 2$.*

Отметим, что следствия 1.1 и 1.3 развивают теоремы 16 и 17 работы Хупперта [11] и теорему 3 и ее следствия работы [12].

Лемма 6. *Если $n = ab$, $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ и $b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, то и $a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.*

Доказательство. Поскольку $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ и $b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, то $n = 1 + kp$ и $b = 1 + lp$. Ввиду того, что $n = ab$, получаем $1 + kp = a(1 + lp)$ и $a = 1 + (k -$ $- al)p$, т. е. $a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.

Пусть K — нормальная подгруппа группы G. Для натурального i через $\mu_i(K)$ обозначим совокупность простых чисел p, для которых в группе G существует максимальная подгруппа индекса p^i, не содержащая K.

Лемма 7. *Пусть K — нормальная подгруппа группы G и p — наибольший простой делитель порядка K. Предположим, что индекс каждой максимальной подгруппы группы G, не содержащей K, примарен. Тогда если $p > 3$, то силовская p-подгруппа K_p нормальна в группе G в каждом из следующих случаев:*

1) *$\mu_i(K) = \varnothing$ для всех $i \geq 3$;*

2) *$\mu_i(K) = \varnothing$ для всех $i \geq 4$ и p не делит $q^2 + q + 1$ для каждого $q \in$ $\in \mu_3(K)$;*

3) *$\mu_i(K) = \varnothing$ для всех $i \geq 5$ и p не делит $q^2 + q + 1$ для каждого $q \in$ $\in \mu_3(K)$ и не делит $t^2 + 1$ для каждого $t \in \mu_4(K)$.*

Доказательство. Предположим, что подгруппа K_p не является нормальной подгруппой группы G. Тогда ее нормализатор $N_G(K_p)$ содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G. По лемме Фраттини $G = KN_G(K_p)$, поэтому $G = MK$ и подгруппа K не содержится в M. Поскольку

$$K_p \subseteq N_G(K_p) \cap K \subseteq M \cap K \subseteq K,$$

то $N_G(K_p) \cap K$ является нормализатором подгруппы K_p в K и в $M \cap K$. Применив теорему Силова о числе силовских подгрупп, заключаем, что $|K : N_G(K_p) \cap K| \equiv 1 (\mod p)$ и $|M \cap K : N_G(K_p) \cap K| \equiv 1 (\mod p)$. Из леммы об индексах следует

$$|K : N_G(K_p) \cap K| = |K : M \cap K||M \cap K : N_G(K_p) \cap K|,$$

а из леммы 6 вытекает $|K : M \cap K| \equiv 1 (\mod p)$. Поскольку $G = MK$, то $|G : M| = |K : M \cap K|$. Согласно условию леммы $|G : M| = r^a$, где $1 \le a \le 4$. Итак, $|K : M \cap K| = r^a$, где $1 \le a \le 4$.

Если $a = 1$, то p делит $r - 1$, что невозможно ввиду того, что p — наибольший простой делитель порядка K и $r \in \pi(K)$.

Если $a = 2$, то p делит $r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$. Это возможно лишь в случае, когда $r = 2$, $p = 3$. Но по условию леммы $p > 3$, противоречие.

Пусть $a = 3$. Тогда p делит $r^3 - 1 = (r-1)(r^2 + r + 1)$. Так как $p > r$, то p делит $r^2 + r + 1$, что исключается условием леммы.

Пусть $a = 4$. Тогда p делит $r^4 - 1 = (r-1)(r+1)(r^2+1)$. Поскольку $p > r$, то p не делит $r - 1$. Если p делит $r + 1$, то $p = 3$, $r = 2$, что противоречит условию $p > 3$. Поэтому p делит $r^2 + 1$. Но это исключается условием леммы. Поэтому начальное предположение неверно и силовская p-подгруппа K_p нормальна в группе G.

Теорема 2. *Пусть K — нормальная подгруппа группы G и индекс каждой максимальной подгруппы группы G, не содержащей K, примарен. Тогда $\{2, 3\}'$-холлова подгруппа $K_{\{2,3\}'}$ нормальна в группе G и дисперсивна по Оре в каждом из следующих случаев:*

1) $\mu_i(K) = \varnothing$ *для всех* $i \ge 3$;

2) $\mu_i(K) = \varnothing$ *для всех* $i \ge 4$ *и каждое простое число* $p \in \pi(K) \setminus \{2, 3\}$ *не делит* $q^2 + q + 1$ *для всех* $q \in \mu_3(K)$;

3) $\mu_i(K) = \varnothing$ *для всех* $i \ge 5$ *и каждое простое число* $p \in \pi(K) \setminus \{2, 3\}$ *не делит* $q^2 + q + 1$ *для всех* $q \in \mu_3(K)$ *и не делит* $t^2 + 1$ *для всех* $t \in \mu_4(K)$.

Доказательство проведем индукцией по порядку подгруппы K. Пусть p — наибольший простой делитель порядка подгруппы K и $\pi = \pi(K) \setminus \{2, 3\}$. Если $p \le 3$, то $K_\pi = 1$ и теорема справедлива. Пусть $p > 3$. Тогда согласно лемме 6 силовская p-подгруппа K_p нормальна в группе G. В фактор-группе G/K_p подгруппа K/K_p нормальна и для нее выполняются все условия теоремы. По индукции π_1-холлова подгруппа $(K/K_p)_{\pi_1}$ нормальна в группе G/K_p и дисперсивна по Оре, где $\pi_1 = \pi(K/K_p) \setminus \{2, 3\}$. В частности, подгруппа K/K_p разрешима, поэтому разрешима и K. Пусть H — $\{\pi_1 \cup \{p\}\}$-холлова подгруппа из K, для которой $H/K_p = (K/K_p)_{\pi_1}$. Тогда H является $\{2, 3\}'$-холловой подгруппой из K. Подгруппа H нормальна в группе G, а так как H/K_p дисперсивна по Оре и p — наибольший простой делитель порядка K, то H дисперсивна по Оре. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Если дополнительно к условиям теоремы предположить, что порядок подгруппы K нечетен или не делится на 3, то подгруппа K дисперсивна по Оре.*

Доказательство. В этих случаях фактор-группа K/K_{π} изоморфна силовской 3-подгруппе либо силовской 2-подгруппе соответственно. Поэтому подгруппа K дисперсивна по Оре.

Следствие 2.2. *Пусть K — нормальная подгруппа группы G и индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, есть простое число или квадрат простого числа. Тогда $\{2,3\}'$-холлова подгруппа $K_{\{2,3\}'}$ нормальна в группе G и дисперсивна по Оре. Кроме того, если порядок подгруппы K нечетен или не делится на 3, то подгруппа K дисперсивна по Оре.*

Доказательство. В данной ситуации $\mu_i(K) = \varnothing$ для всех $i \geq 3$, поэтому имеем случай 1 теоремы 2. Значит $K_{\{2,3\}'}$ нормальна в группе G и дисперсивна по Оре. Если порядок подгруппы K нечетен или не делится на 3, то $K/K_{\{2,3\}'}$ изоморфна силовской 3-подгруппе или силовской 2-подгруппе соответственно, поэтому K дисперсивна по Оре.

В случае, когда $G = K$, получаем такое следствие.

Следствие 2.3. *Пусть индекс каждой максимальной подгруппы группы G есть простое число или квадрат простого числа. Тогда $\{2,3\}'$-холлова подгруппа группы G нормальна и дисперсивна по Оре. Кроме того, если порядок группы G нечетен или не делится на 3, то группа G дисперсивна по Оре.*

Отметим, что известная теорема Ф. Холла [9] (теорема VI.9.4) о разрешимости группы, у которой индексы максимальных подгрупп — простые числа или квадраты простых чисел, является частным случаем этого следствия. Кроме того, это следствие вместе со следствием 1.3 дает достаточно полную информацию о нормальном строении разрешимой группы с индексами максимальных подгрупп, не делящимися на куб простого числа.

Следствие 2.4. *Пусть K — нормальная подгруппа группы G, у которой индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, простое число, либо квадрат простого числа, либо 8. Если порядок подгруппы K не делится на 7, то $\{2,3\}'$-холлова подгруппа $K_{\{2,3\}'}$ нормальна в G и дисперсивна по Оре. Кроме того, если порядок подгруппы K нечетен или не делится на 3, то подгруппа K дисперсивна по Оре.*

Доказательство. Согласно условию следствия $\mu_3(K) = \{2\}$ и если 7 не делит порядок подгруппы K, то выполняется условие 2 теоремы 2. Поэтому $K_{\{2,3\}'}$ нормальна в G и дисперсивна по Оре.

Аналогичное следствие справедливо, если число 8 заменить на 27 и порядок K не делится на 13. Придавая другие значения индексам, которые являются кубами или четвертыми степенями простых чисел, можно формулировать новые следствия. Поскольку в разрешимых группах все максимальные подгруппы имеют примарные индексы, то при $K = G$ (как в следствии 2.3) можно извлекать из теоремы новую информацию о строении разрешимых групп.

Следуя терминологии монографии [6, с. 134], через $\Phi_k(G)$ обозначим пересечение всех максимальных подгрупп группы G, индексы которых не равны p^i для любого простого p и всех $i = 1, 2, \ldots, k$. М. В. Селькин установил [6] (теорема 3.4.2, следствие 3.4.12), что в любой конечной группе G подгруппа $\Phi_1(G)$ сверхразрешима, а подгруппа $\Phi_2(G)$ разрешима, сверхразрешимый корадикал подгруппы $\Phi_2(G)$ дисперсивен по Оре, а ее подгруппа Фиттинга $F(\Phi_2(G))$ содержит $2'$-холлову подгруппу сверхразрешимого корадикала подгруппы $\Phi_2(G)$. Сверхразрешимость подгруппы $\Phi_1(G)$ также вытекает из теоремы Л. А. Шеметкова [1]. Новая информация о строении подгрупп $\Phi_2(G)$ и $\Phi_3(G)$ содержится в следующих двух утверждениях.

***Следствие* 2.5.** *В любой конечной группе G ее подгруппа $\Phi_2(G)$ имеет следующие свойства*:

1) $\Phi_2(G) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)$; *в частности*, $n(\Phi_2(G)) \leq 4$, $d(\Phi_2(G)/\Phi(\Phi_2(G))) \leq 5$, *а* $l_p(\Phi_2(G)) \leq 1$ *для любого простого нечетного* p *и* $l_2(\Phi_2(G)) \leq 2$;

2) $\Phi_2(G)$ *содержит нормальную дисперсивную по Оре* $\{2, 3\}'$*-холлову подгруппу.*

Доказательство. Пусть $M_2(G)$ — совокупность максимальных подгрупп из G, индексы которых являются простыми числами или квадратами простых чисел. Если A — максимальная в G подгруппа, не принадлежащая $M_2(G)$, и α — автоморфизм группы G, то $|G : A| = |G : \alpha(A)|$ и подгруппа $\alpha(A)$ также не принадлежит $M_2(G)$. Очевидно, что $\Phi_2(G)$ есть пересечение подгрупп A, которые являются максимальными в G и $A \notin M_2(G)$. $\Phi_2(G)$ является характеристической в G подгруппой. Если B — максимальная подгруппа группы G и B не содержит $\Phi_2(G)$, то $B \in M_2(G)$ и индекс подгруппы B в группе G есть простое число или квадрат простого числа. Согласно следствию 1.3 $\Phi_2(G) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)$. В частности, $n(\Phi_2(G)) \leq 4$, $d(\Phi_2(G)/\Phi(\Phi_2(G))) \leq 5$, а $l_p(\Phi_2(G)) \leq 1$ для любого простого нечетного p и $l_2(\Phi_2(G)) \leq 2$. Согласно следствию 2.4 подгруппа $\Phi_2(G)$ содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2, 3\}'$-холлову подгруппу. Следствие доказано.

***Следствие* 2.6.** 1. *Если в группе G подгруппа $\Phi_3(G)$ разрешима, то* $\Phi_3(G) \in \mathfrak{N}\left(\mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2\right)$. *В частности*, $n(\Phi_3(G)) \leq 5$, $d(\Phi_3(G)/\Phi(\Phi_3(G))) \leq 6$, *а* $l_p(\Phi_3(G)) \leq 2$ *для любого простого* p.

2. *Если в группе G подгруппа $\Phi_3(G)$ неразрешима, то* $G/S(\Phi_3(G)) = \Phi_3(G)/S(\Phi_3(G)) \times H/S(\Phi_3(G))$, *причем* $\Phi_3(G)/S(\Phi_3(G)) \simeq PSL(2, 7)$, $H = H^{\mathrm{form}\, PSL(2,7)}$.

Доказательство. Пусть $M_3(G)$ — совокупность максимальных подгрупп из G, индексы которых являются простыми числами, квадратами или кубами простых чисел. Если A — максимальная в G подгруппа, не принадлежащая $M_3(G)$, и α — автоморфизм группы G, то $|G : A| = |G : \alpha(A)|$ и подгруппа $\alpha(A)$ также не принадлежит $M_3(G)$. Очевидно, что $\Phi_3(G)$ — пересечение подгрупп A, которые являются максимальными в G, и $A \notin M_3(G)$. $\Phi_3(G)$ является характеристической в G подгруппой. Если B — максимальная подгруппа группы G и B не содержит $\Phi_3(G)$, то $B \in M_3(G)$ и индекс подгруппы B в группе G есть простое число, квадрат или куб простого числа.

1. Пусть подгруппа $\Phi_3(G)$ разрешима. Согласно теореме 1 $\Phi_3(G) \in \mathfrak{N}\left(\mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)^2\right)$. В частности, $n(\Phi_3(G)) \leq 5$, $d(\Phi_3(G)/\Phi(\Phi_3(G))) \leq 6$, а $l_p(\Phi_3(G)) \leq 2$ для любого простого p.

2. Если подгруппа $\Phi_3(G)$ неразрешима, то согласно теореме 3.2.1 [5] получаем $G/S(\Phi_3(G)) = \Phi_3(G)/S(\Phi_3(G)) \times H/S(\Phi_3(G))$, причем $\Phi_3(G)/S(\Phi_3(G)) \simeq PSL(2, 7)$, $H = H^{\mathrm{form}\, PSL(2,7)}$. Следствие доказано.

1. *Шеметков Л. А.* О конечных разрешимых группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 3. – С. 533–559.
2. *Поляков Л. Я.* О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 89–97.
3. *Монахов В. С., Селькин М. В.* О разрешимости нормальных подгрупп конечных групп // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 6. – С. 85–90.
4. *Монахов В. С., Селькин М. В.* О строении нормальных подгрупп конечных групп // Вопросы алгебры. – 1993. – **6**. – С. 96–100.
5. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* О влиянии максимальных подгрупп примарного индекса на строение конечной группы // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 6 (397). – С. 24–28.
6. *Селькин М. В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 146 с.
7. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
8. *Gaschutz W.* Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups // Notes pure math. – Canberra: Austral. Nat. Univ., 1979. – № 11.
9. *Huppert B.* Endiche Gruppen. I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 795 S.
10. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
11. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. – 1954. – **60**. – S. 409–434.
12. *Монахов В. С., Грибовская Е. Е.* О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп // Мат. заметки. – 2001. – **70**, № 4. – С. 603–612.

Получено 18.02.2002