УДК 517.9

И. А. Джалладова (Киев. нац. эконом. ун-т)

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

We study problems concerning the stability of solutions of nonlinear difference equations with random perturbationsof semi-Markov type. We construct Lyapunov stochastic functions for various classes of nonlinear difference equations with semi-Markov right-hand side. We obtain conditions for their existence.

Вивчаються питання, пов'язані зі стійкістю розв'язків нелінійних різницевих рівнянь із випадковими збуреннями напівмарковського типу. Побудовано стохастичні функції Ляпунова для різних класів нелінійних різницевих рівнянь із напівмарковською правою частиною. Отримано умови їх існування.

В настоящей статье рассматриваются вопросы, связанные с устойчивостью решений нелинейных разностных уравнений со случайными возмущениями полумарковского типа [1 – 4].

1. Основные понятия. Пусть ξ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — полумарковский процесс, принимающий n различных состояний $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ с вероятностями

$$p_s(k) = \mathrm{P}\{\xi_k = \theta_s\}, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пусть ξ_k изменяет свои значения в последовательные моменты k_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $k_0 = 0 < k_1 < k_2 < \ldots$. Предположим, что, попав в состояние θ_s, полумарковская цепь перейдет в состояние θ_l через время j, $j = 1, 2, \ldots$, с вероятностями $q_{ls}(j)$. При этом выполнены условия

$$q_{ls}(j) \geq 0, \quad l, s = 1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_s(j) = 1, \quad l, s = 1, \ldots, n, \quad q_s(j) \equiv \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(j).$$

Введем понятие полумарковской функции $w(k, \xi_k)$ от дискретного аргумента $k = 0, 1, 2, \ldots$. Зададим n разных детерминированных функций $w_s = w_s(k)$, $s = 1, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Пусть при $k_j < k < k_{j+1}$ имеем равенство $\xi_k = \theta_s$ и при этом

$$w(k, \xi_k) \equiv w_s(k - k_j), \quad k_j \leq k < k_j + 1.$$

Функцию $w(k, \xi_k)$ называем полумарковской.

2. Вывод уравнений для стохастических функций Ляпунова. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$X_{k+1} = F(k, X_k, \xi_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \dim X_k = m, \tag{1}$$

где предполагаем:

1) ξ_k — полумарковская цепь, принимающая n различных состояний $\theta_1, \ldots, \theta_n$ с вероятностями $p_s(k) = \mathrm{P}\{\xi_k = \theta_s\}$, $s = 1, \ldots, n$;

2) вектор-функция $F(k, X, \xi_k)$ имеет в качестве проекций полумарковские функции.

Предположим, что полумарковская цепь ξ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, определена интенсивностями $q_{ls}(k)$, $l, s = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющими условиям [4]

$$q_{ls}(k) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_{js} = \pi_{js},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} q_s(k) = 1, \quad q_s(k) = \sum_{j=1}^{n} q_{js}(k), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Цепь ξ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, имеет скачки в моменты k_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и при этом $k_0 = 0$, $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$.

Чтобы задать систему уравнений (1), зададим n различных систем разностных уравнений

$$X_{k+1} = F_s(k, X_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Предположим, что при $k_j \leq k < k_{j+1}$, $\xi_k = \theta_s$ система уравнений (1) принимает вид

$$X_{k+1} = F_s(k - k_j, X_k).$$

Предположим также, что все системы уравнений (3) допускают нулевые решения, т. е.

$$F_s(k, 0) \equiv 0, \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и правые части системы (3) удовлетворяют условиям Липшица

$$\| F_s(k, X) - F_s(k, Y) \| \leq \rho_s \| X - Y \|, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Пусть (X_k, ξ_k) — произвольное случайное решение системы уравнений (1) с плотностью вероятностей

$$f(k, X, \xi) = \sum_{s=1}^{n} f_s(k, X)\delta(\xi - \theta_s).$$

Введем в рассмотрение полумарковскую функцию $w(k, X, \xi_k)$, удовлетворяющую условиям

$$w(X) \leq w(k, X, \xi_k) \leq \beta \| X \|^2 \quad (\beta > 0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

где $w(X)$ — положительно определенная функция.

Везде для вектора $X = (x_1, \ldots, x_m)^*$ используем евклидову норму

$$\| X \|^2 = X^* X = \sum_{s=1}^{n} |x_s|^2.$$

Чтобы определить полумарковскую функцию $w(k, X, \xi_k)$, зададим n различных функций $w_s(k, X)$, $s = 1, \ldots, n$, удовлетворяющих условиям $w(X) \leq w_s(k, X) \leq \beta \| X \|^2$, $s = 1, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

При $k_j \le k < k_{j+1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $\xi_k = \theta_s$ предполагаем выполнение равенств

$$w(k, X, \xi_k) \equiv w_s(k - k_j, X).$$

Функцию Ляпунова определяем по формуле

$$\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \langle w(k, X_k, \xi_k) \rangle = \int_{E_m} \sum_{s=1}^{n} \nu_s(X) f_s(0, X) dX, \tag{6}$$

где $\nu_s(X)$ — так называемые основные стохастические функции Ляпунова [5, 6], определяемые по формуле

$$\nu_s(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle w(k, X_k, \xi_k) | \xi_0 = \theta_s, \ X_0 = X \rangle, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Составим систему уравнений для функции $\nu_s(X)$. Предполагаем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \langle w(k, X_k, \xi_k) \rangle$ сходится.

Нулевое решение системы уравнений (1) называем *L_2-устойчивым*, если для любого решения X_k с ограниченным начальным значением математического ожидания

$$D_0 = \langle X_0 X_0^* \rangle$$

сходится ряд

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \| X_k \|^2 \rangle. \tag{8}$$

Очевидно, что для сходимости ряда (8) необходима и достаточна сходимость матричного ряда

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} \langle X_k X_k^* \rangle.$$

Из неравенства (5) следует неравенство

$$0 \le \langle w(k, X_k, \xi_k) \rangle \le \beta \langle \| X_k \|^2 \rangle, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поэтому из сходимости ряда (8) вытекает сходимость ряда (6) и существование функции ν.

Пусть случайное решение X_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, L_2-устойчиво. Обозначим через $f(k, X, \xi)$ плотность распределения случайного процесса (X_k, ξ_k):

$$f(k, X, \xi) = \sum_{s=1}^{n} f_s(k, X) \delta(\xi - \theta_s).$$

Функция ν зависит от выбора случайных начальных значений X_0, ξ_0 и от значений случайного процесса ξ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Эти зависимости разделены для функции $\nu_s(X)$.

Чтобы вычислить значение функции $\nu_s(X)$, $s = 1, \ldots, n$, введем вспомогательные функции

$$u_s(k, X) = \langle w(k, X_k, \xi_k) | \xi_0 = \theta_s, \ X_0 = X \rangle, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Обозначим через $X_k = N_s(k, X_0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, общие решения систем разностных уравнений (3).

Используя обозначения для функций

$$\Psi_s(k) = 1 - \sum_{j=1}^{k} q_s(j), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \Psi_s(0) = 1, \quad s = 1, \dots, n,$$

вычисляем математические ожидания в формулах (9):

$$u_s(k, X) = \Psi_s(k) w_s(k, N_s(k, X)) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(j) u_l(k-j, N_s(j, X)),$$

$$s = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Учитывая, что

$$\nu_s(X) = \sum_{k=0}^{\infty} u_s(k, X),$$

получаем систему линейных функциональных уравнений для основных стохастических функций Ляпунова

$$\nu_s(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_s(k) w_s(k, N_s(k, X)) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} q_{ks}(k) \nu_l(N_s(k, X)),$$

$$s = 1, \dots, n. \tag{10}$$

Эта система уравнений может быть решена методом последовательных приближений.

3. Достаточные условия существования стохастических функций Ляпунова. Из условий Липшица (4) и того, что система уравнений (3) допускает нулевое решение, для решения X_k системы разностных уравнений (3) находим оценку

$$\| X_{k+1} \| = \| F_s(k, X_k) \| \le \rho_s \| X_k \|,$$

откуда получаем неравенство $\| X_k \| \le \rho_s^k \| X_0 \|$, т. е.

$$\| N_s(k, X) \| \le \rho_s^k \| X \|, \quad s = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Используем метод последовательных приближений

$$\nu_s^{(\alpha+1)}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_s(k) w_s(k, N_s(k, X)) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) \nu_l^{(\alpha)}(N_s(k, X)),$$

$$s = 1, \dots, n, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, \tag{12}$$

$$\nu_s^{(0)}(X) \equiv 0, \quad s = 1, \dots, n.$$

Предполагая справедливость оценок

$$\nu_s^{(\alpha)}(X) \le c_s^{(\alpha)} \| X \|^2, \quad s = 1, \dots, n, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots,$$

для системы уравнений (12) и оценок (11) находим

$$c_s^{(\alpha+1)} \le \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_s(k) \beta \rho_s^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) c_l^{(\alpha)} \rho_s^{2k},$$

$$s = 1, \dots, n, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots . \tag{13}$$

Достаточные условия существования ограниченного решения системы неравенств (13) могут быть сведены к отысканию положительного решения системы линейных алгебраических уравнений

$$c_s = \beta \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_s(k)\rho_s^{2k} + \sum_{l=1}^{n} \gamma_{sl} c_l, \quad \gamma_{sl} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} q_{ls}(k)\rho_s^{2k}, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

и принимают вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Psi_s(k)\rho_s^{2k} < \infty, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Кроме того, необходимо, чтобы спектральный радиус $\rho(\Gamma)$ матрицы

$$\Gamma = \|\gamma_{sl}\|_1^n, \quad \gamma_{sl} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} q_{ls}(k)\rho_s^{2k},$$

был меньше единицы. Последнее условие выполняется, если выполнены неравенства

$$\sum_{l=1}^{n} \gamma_{sl} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} q_s(k)\rho_s^{2k} < 1, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Для исследования сходимости последовательностей $v_s^{(\alpha)}(X)$, $s = 1, \ldots, n$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, исследуем систему уравнений

$$v_s^{(\alpha+1)}(X) - v_s^{(\alpha)}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k)\Big(v_l^{(\alpha)}(N_s(k, X)) - v_l^{(\alpha-1)}(N_s(k, X))\Big), \tag{17}$$
$$s = 1, \ldots, n, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots .$$

Пусть при всех значениях X выполнены неравенства

$$\left| v_s^{(\alpha)}(X) - v_s^{(\alpha-1)}(X) \right| \le d_s^{(\alpha)} \|X\|^2, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Из уравнений (17) следует справедливость оценок

$$\left| v_s^{(\alpha+1)}(X) - v_s^{(\alpha)}(X) \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k)\rho_s^{2k} d_l^{(\alpha)} \|X\|^2, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Полагая

$$d_s^{(\alpha+1)} = \sum_{l=1}^{n} \gamma_{sl} d_l^{(\alpha)}, \quad s = 1, \ldots, n,$$

получаем, что оценки (18) справедливы при всех значениях $\alpha = 2, 3, \ldots$, если $d_s^{(1)} = c_s$, $s = 1, \ldots, n$.

Если выполнены условия (16), то справедливы соотношения

$$\lim_{\alpha \to +\infty} d_s^{(\alpha)} = 0, \quad s = 1, \ldots, n,$$

из которых вытекает равномерная сходимость по X последовательностей функций $v_s^{(\alpha)}(X)$, $s = 1, \ldots, n$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, в любой ограниченной области изменения X.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть для системы разностных уравнений* (3) *выполнены условия* (4) *и полумарковская цепь* ξ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *определена интенсивностями* $q_{ls}(k)$, $l, s = 1, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$, *которые удовлетворяют условиям* (2). *Пусть функция* $w(k, X, \xi_k)$ *удовлетворяет условию* (5). *Если выполнены условия* (15), (16), *то для системы разностных уравнений* (1) *существуют стохастические функции Ляпунова* (7), *удовлетворяющие условиям*

$$0 \le v_s(X) \le c_s \|X\|^2, \quad s = 1, \dots, n,$$

где c_s, $s = 1, \dots, n$, *— решение системы уравнений* (14).

Функции $v_s(X)$, $s = 1, \dots, n$, могут быть найдены методом последовательных приближений (12), который равномерно по X сходится в любой ограниченной области. Если функции $w_s(k, X)$, $s = 1, \dots, n$, $k = 0, 1, 2, \dots$, непрерывны по X, то и функции $v_s(X)$, $s = 1, \dots, n$, будут непрерывны по X.

Из теоремы 1 видна важность метода последовательных приближений (12) при решении системы уравнений (10). Поскольку все коэффициенты $\Psi_s(k)$, $q_{ls}(k)$, $k, s = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$, неотрицательны, то получаем следующие результаты.

Теорема 2. *Если система уравнений* (10) *имеет положительно определенное решение* $v_s(X)$, $s = 1, \dots, n$, *при выполнении условия* (5), *то сходится метод последовательных приближений* (12) *и при этом выполнены неравенства*

$$v_l^{(\alpha+1)}(X) \ge v_s^{(\alpha)}(X), \qquad v_s^{(\alpha)}(X) \le v_s(X), \qquad s = 1, \dots, n,$$

т. е. последовательности функций $v_s^{(\alpha)}(X)$, $s = 1, \dots, n$, $\alpha = 0, 1, 2, \dots$, *монотонно возрастают и ограничены сверху функциями* $v_s(X)$, $s = 1, \dots, n$.

Теорема 3. *Если при всех* X *выполнены неравенства*

$$0 \le w_s^*(k, X) \le w_s(k, X), \qquad s = 1, \dots, n,$$

то из существования решения $v_s(X)$, $s = 1, \dots, n$, *системы* (10) *вытекает существование решения* $v_s^*(X)$, $s = 1, \dots, n$, *системы функциональных уравнений*

$$v_s^*(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_s(k) w_s^*(k, N_s(k, X)) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) v_l^*(N_s(k, X)), \qquad s = 1, \dots, n,$$

и при этом выполнены неравенства

$$0 \le v_s^*(X) \le v_s(X), \qquad s = 1, \dots, n.$$

4. L_2-устойчивость решений системы разностных уравнений. Из оценок (5) вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Если нулевое решение системы* (1) L_2*-устойчиво и для функции* $w(k, X, \xi)$ *выполнено условие* (5), *то для системы* (1) *существуют стохастические функции Ляпунова* $v_s(X)$, $s = 1, \dots, n$ (7).

Докажем более общую теорему.

Теорема 5. *Пусть функция* $w(k, X, \xi)$ *удовлетворяет условию*

$$\beta_1 \|X\|^2 \le w(k, X, \xi_k) \le \beta \|X\|^2, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, 0 < \beta_1. \tag{19}$$

Если для системы уравнений (1) *существуют положительно определенные стохастические функции Ляпунова* $v_s(X)$ (7), *то нулевое решение системы* (1) L_2*-устойчиво.*

Доказательство. Из сходимости рядов (7) вытекает сходимость ряда (6) и в силу неравенства (19) сходимость ряда (8), что и доказывает теорему.

5. Системы разностных уравнений со скачками решений. Выведем систему функциональных уравнений для построения стохастических функций Ляпунова в случае, когда в моменты t_j, $j = 1, 2, \dots$, скачков случайной цепи ξ_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, решение системы уравнений (1) имеет скачки вида

$$X_j = S_{l\gamma}(\overline{X}_j), \qquad \overline{X}_j = F_\gamma(k_j - k_{j-1}, X_{j-1}), \qquad l, \gamma = 1, \dots, n, \qquad j = 1, 2, \dots,$$

при $\xi_{j-1} = \theta_\gamma$, $\xi_j = \theta_l$. Предполагаем, что вектор-функции $S_{l\gamma}(X)$, $l, \gamma = 1, \dots,$

n, удовлетворяют условиям Липшица и $S_{l\gamma}(\nu) = 0$, $l, \gamma = 1, \ldots, n$. В этом случае система уравнений (10) принимает более сложный вид

$$\nu_s(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_s(k) w_s(k, N_s(k, X)) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) \nu_l(S_{ls}(N_s(k, X))), \tag{20}$$
$$s = 1, \ldots, n.$$

Решение системы (20), если оно существует, можно найти методом последовательных приближений

$$\nu_s^{(\alpha+1)}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_s(k) w_s(k, N_s(k, X)) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} q_{ls}(k) \nu_s^{(\alpha)}(S_{ls}(N_s(k, X))),$$
$$\nu_s^{(0)}(X) \equiv 0, \quad s = 1, \ldots, n, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots .$$

Аналогичные уравнения можно вывести и в случае, когда решение системы разностных уравнений (1) испытывает случайные преобразования в моменты k_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

6. Частный случай: система разностных уравнений с правой частью, зависящей от марковской цепи. Рассмотрим важный частный случай, когда полумарковская цепь в системе разностных уравнений (1) вырождается в марковскую цепь, определяемую системой разностных уравнений

$$P(k+1) = \Pi P(k), \quad P(k) = (p_1(k), \ldots, p_n(k)).$$

Здесь $\Pi = \| \pi_{ls} \|_1^n$ — стохастическая матрица. Для того чтобы описать марковскую цепь как полумарковскую, можно положить

$$q_{ls}(1) = \pi_{ls}, \quad \Psi_s(0) = 1, \quad \Psi_s(1) = 0, \quad l, s = 1, \ldots, n.$$

Пусть системы уравнений (3) имеют вид

$$X_{k+1} = F_s(X_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

т. е. являются автономными. Положим также

$$w(k, X, \theta_s) \equiv w_s(X), \quad s = 1, \ldots, n.$$

При этом система функциональных уравнений (10) для стохастических функций Ляпунова принимает вид

$$\nu_s(X) = w_s(X) + \sum_{l=1}^{n} \pi_{ls} \nu_l(F_s(X)), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Другой способ описания марковской цепи с помощью полумарковской заключается в задании интенсивностей $q_{ls}(k)$ скачка из состояния θ_s в состояние θ_l:

$$q_{ss}(k) \equiv 0, \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \Psi_s(k) = \pi_{ss}^k,$$
$$s = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$q_{ls}(k) \equiv \pi_{ls} \Psi_s(k-1) = \pi_{ls} \pi_{ss}^{k-1},$$
$$l \neq s, \quad l, s = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Система функциональных уравнений (10) для стохастических функций Ляпунова принимает вид

$$\nu_s(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{ss}^k(k) w_s(k, N_s(k, X)) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1, l \neq s}^{n} \pi_{ls} \pi_{ss}^{k-1} \nu_l(N_s(k, X)), \tag{23}$$
$$s = 1, \ldots, n.$$

Нетрудно показать, что решение системы уравнений (22) является также решением системы уравнений (23). Из системы уравнений (22) находим равенства

$$\pi_{ss}^k \nu_s(N_s(k, X)) = \pi_{ss}^k \nu_s(N_s(k, X)) + \pi_{ss}^k \sum_{l=1}^{n} \pi_{ls} \nu_l(N_s(k+1, X)), \tag{24}$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

где $X_k = N_s(k, X_0)$, $s = 1, \ldots, n$, — решение системы уравнений (21). Складывая уравнения (24) с уравнением (22), получаем систему уравнений (23). Очевидно, что система уравнений (22) проще для решения и исследования, чем система уравнений (23).

Построение стохастических функций Ляпунова для системы линейных разностных уравнений со случайными полумарковскими коэффициентами рассмотрено в [7, с. 238 – 248].

7. Уравнение для стохастического оператора. Рассмотрим систему нелинейных разностных уравнений (1). Пусть X_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, — произвольное решение системы (1). Обозначим через $f(k, X, \xi)$ плотность распределения случайного процесса (X_k, ξ_k).

Пусть k_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, — скачки случайного процесса ξ_k. Для системы (1) существует стохастический оператор $L(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, такой, что

$$F(k_j + k, X) = L(k) F(k_j, X), \quad k, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$F(k, X) = (f_1(k, X) \ldots f_n(k, X))^*.$$

Выведем уравнение для оператора $L(k)$.

Найдем стохастические операторы $R_s(k)$, $s = 1, \ldots, n$, определяющие изменение плотности распределения, задаваемые системой разностных уравнений (3):

$$R_s(k) f(x) \equiv f(N_s(0, k, X)) \det\left(\frac{DN_s(0, k, X)}{DX}\right),$$

$$s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Здесь через $X_k = N_s(k, j, X_j)$, $k, j = 0, 1, 2, \ldots$, обозначено решение в форме Коши системы разностных уравнений (3). При этом справедливы тождества

$$N_s(k, X) \equiv N_s(0, k, X), \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Если разрешим систему уравнений $Y = N_s(k, X)$ относительно X, то получим уравнения $X = N_s^{-1}(k, Y)$, где

$$N_s^{-1}(k, X) \equiv N_s(0, k, X), \quad s = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и выведем операторное уравнение

$$L(k) F(0, X) = \Psi(k) R(k) F(0, X) + \sum_{j=1}^{k} L(k-j) Q(j) R(j) F(0, X),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где введены обозначения

$$\Psi(k) = \| \Psi_k(k) \delta_{sl} \|_1^n, \quad R(k) = \| R_s(k) \delta_{sl} \|_1^n, \quad Q(k) = \| q_{sl}(k) \|_1^n.$$

Решения операторного уравнения

$$L(k) = \Psi(k)R(k) + \sum_{r=1}^{k} L(k-j)Q(j), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

ищем в виде

$$L(k) = \Psi(k)R(k) + \sum_{r=1}^{k} \Psi(k-j)R(k-j)U(j), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{26}$$

Подставляя выражение (26) в уравнение (25) после изменения порядка суммирования, получаем уравнение для неизвестного оператора $U(k)$:

$$U(k) = Q(k)R(k) + \sum_{r=1}^{k-1} U(r)Q(k-r)R(k-r), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

Аналогично ищем решение уравнения (27) в виде

$$U(k) = Q(k)R(k) + \sum_{r=1}^{k-1} Q(r)R(r)V(k-r), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{28}$$

Для оператора $V(k)$ находим уравнение

$$V(k) = Q(k)R(k) + \sum_{r=1}^{k-1} V(r)Q(k-r)V(k-r), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

Поскольку уравнения (27), (29) имеют одинаковые решения $U(k) = V(k)$, то из уравнения (28) находим уравнение для оператора $U(k)$:

$$U(k) = Q(k)R(k) + \sum_{r=1}^{k-1} Q(r)R(r)U(k-r), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{30}$$

Полученный результат приводит к теореме, аналогичной теореме 4.

Теорема 6. *Решение* $L(k)$ *операторного уравнения* (25) *можно представить в виде* (26), *где оператор* $U(k)$ *удовлетворяет уравнению* (30).

Эта система линейных функциональных уравнений определяет изменение частных плотностей $F(k, X)$ случайного решения (X_k, ξ_k) системы уравнений (1).

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
2. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев: Наук. думка, 1992. – 256 с.
3. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 360 с.
4. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990. – 692 с.
5. *Валеев К. Г., Джалладова И. А.* Оптимизация стохастических разностных нелинейных систем уравнений // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 3 – 15.
6. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. – 1960. – № 5. – С. 809 – 823.
7. *Валеев К. Г., Карелова Н. Н., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во Рос. ун-та дружбы народов, 1996. – 258 с.

Получено 01.03.2000