УДК 512.64

В. М. Прокіп (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

СТРУКТУРА МАТРИЦЬ ТА ЇХ ДІЛЬНИКІВ НАД ОБЛАСТЮ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

We investigate the structure of matrices and their divisors over principal ideal domain.

Досліджується структура матриць та їх дільників над областю головних ідеалів.

Нехай R — область головних ідеалів, тобто R — комутативне кільце з одиницею e без дільників нуля, в якому кожен ідеал є головним. Введемо позначення: R_n — кільце $(n \times n)$-вимірних матриць над R; I_k — одинична $(k \times k)$-вимірна матриця; $UT(n, R)$ та $LT(n, R)$ — мультиплікативні групи верхніх та нижніх трикутних матриць порядку n відповідно над R, O_m^k — нульова $(m \times k)$-вимірна матриця. Діагональну матрицю $H = \operatorname{diag}(h_1, h_2, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0) \in R_n$ з елементами $h_j \neq 0$, $1 \leq j \leq k$, на головній діагоналі будемо називати $\mathbf{d}$-матрицею [1], якщо $h_1 \mid h_2 \mid \ldots \mid h_k$. Для матриці $A \in R_n$ існують матриці U, $V \in GL(n, R)$ такі, що $F_A = UAV = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)$ — $\mathbf{d}$-матриця, яку називатимемо канонічною діагональною формою (к. д. ф.) матриці A. Відомо [2], що неособлива матриця $A \in R_n$ елементарними перетвореннями стовпців зводиться до спеціальної трикутної матриці (форми Ерміта), тобто існує матриця $W \in GL(n, R)$ така, що

$$AW = \begin{Vmatrix} h_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{Vmatrix},$$

де h_{ii} належать множині неасоційованих елементів R, а h_{ij} — повній системі лишків за модулем ідеалу $(h_{ii}) = Rh_{ii}$ для всіх $n \geq i > j \geq 1$, в якій нульовий клас зображено нулем області R. (Надалі будемо вважати, що нульовий клас за модулем ідеалу (h) зображений нулем області R.)

У даній роботі досліджується задача про зображення пари матриць $A, B \in R_n$ у вигляді $A = UF_AV$ та $B = UQTF_BW$, де $U, V, W \in GL(n, R)$, $Q \in UT(n, R)$ і $T \in LT(n, R)$. Наведено застосування даної задачі до опису структури дільників матриці з наперед заданою к. д. ф. та звідності пари матриць $A, B \in R_n$ за допомогою одноіменних лівих та різноіменних правих перетворень до діагонального та трикутного виглядів з інваріантними множниками на головній діагоналі. Остання задача досліджувалась в [3, 4] при умові, що одна з матриць не є дільником нуля. У даній роботі це обмеження знято.

Нехай $F_A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — к. д. ф. неособливої матриці $A \in R_n$. На підставі теореми 1 з [5] для матриці A існують елементи $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in R$ такі, що н. с. д. елементів рядка $\| t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, e \| A$ рівний н. с. д. елементів матриці A, тобто a_1. Тоді для матриці

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & \cdots & 0 & e \\ 0 & & I_{n-2} & 0 \\ e & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix} A$$

існують $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \in R$ такі, що н. с. д. елементів рядка $\| u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, e \| A_0$ рівний a_1. Отже, н. с. д. елементів рядка $\| e, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1 \| A$ рівний

a_1, тобто $\| e, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1 \| A W_0 = \| a_1, 0, \ldots, 0 \|$, де $W_0 \in GL(n, R)$. З останньої рівності випливає, що для матриці A існує зображення

$$A = \left\| \begin{matrix} e & q_{12} & \cdots & q_{1,n-1} & q_{1n} \\ O_{n-1}^{1} & & & I_{n-1} & \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 \\ a_1 h_{1j} & A_1 \end{matrix} \right\| W_1,$$

де $A_1 \in R_{n-1}$ і $F_{A_1} = \operatorname{diag}(a_2, \ldots, a_n)$, а $W_1 \in GL(n, R)$. Застосувавши аналогічні міркування до матриці A_1, отримаємо зображення матриці A:

$$A = \left\| \begin{matrix} e & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & e & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ & O_{n-2}^{2} & & I_{n-2} & \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ t_{21} a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{1j} a_1 & a_2 h_{2j} & & A_2 & \end{matrix} \right\| W_2,$$

де t_{21} належить повній системі лишків за модулем ідеалу (a_2 / a_1), а $A_2 \in R_{n-2}$ з к. д. ф. $F_{A_2} = \operatorname{diag}(a_3, \ldots, a_n)$ і $W_2 \in GL(n, R)$. Продовжуючи ці міркування далі, одержуємо такий результат.

***Зауваження* 1.** Нехай $A \in R_n$ — неособлива матриця з к. д. ф. $F_A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тоді для матриці A крім зображення $A = U F_A V$, де $U, V \in GL(n, R)$, існує зображення $A = Q T F_A W$, де $Q \in UT(n, R)$, $W \in GL(n, R)$ і

$$T = \left\| \begin{matrix} e & 0 & \cdots & & 0 \\ t_{21} & e & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{n,n-1} & & e \end{matrix} \right\| \in LT(n, R)$$

така, що t_{ij} належать повній системі лишків за модулем ідеалу (a_i / a_j) для всіх $1 \le j < i \le n$.

Теорема 1. *Нехай* $A, B \in R_n$ *такі, що* $\operatorname{rang} A \le \operatorname{rang} B$. *Нехай, далі,* $\operatorname{rang} B = r$ і $F_A = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_r, 0, \ldots, 0)$ *Для матриць* A *та* B *існують зображення* $A = U F_A V$ *і* $B = U \operatorname{diag}(QT, I_{n-r}) F_B W$, *де* $U, V, W \in GL(n, R)$,

$$T = \left\| \begin{matrix} e & 0 & \cdots & & 0 \\ t_{21} & e & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ t_{r1} & \cdots & t_{r,r-1} & & e \end{matrix} \right\| \in LT(r, R)$$

така, що t_{ij} *належать повній системі лишків за модулем* (b_i / b_j) *для всіх* $r \ge i > j \ge 1$, *і* $Q \in UT(r, R)$, *тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{rang} \| A, B \| = \operatorname{rang} B$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай для матриць $A, B \in R_n$ таких, що $\operatorname{rang} B = r$ і $\operatorname{rang} A \le \operatorname{rang} B$, мають місце зображення $A = U F_A V$ і $B = U \operatorname{diag}(QT, I_{n-r}) F_B W$, де $U, V, W \in GL(n, R)$, $Q \in UT(r, R)$, а $T = \| t_{ij} \| \in LT(r, R)$ така, що t_{ij} належать повній системі лишків за модулем (b_i / b_j) для всіх $r \ge i > j \ge 1$. Легко бачити, що

$$\operatorname{rang} \| A, B \| = \operatorname{rang} \| F_A V, \operatorname{diag}(QT, I_{n-r}) F_B W \| =$$

$$= \operatorname{rang} \| F_A, \operatorname{diag}(QT, I_{n-r}) F_B \| = \operatorname{rang} B.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Оскільки $\operatorname{rang} \| A, B \| = \operatorname{rang} B$, то для матриці $C = \| A, B \|$

існують матриці $U_0 \in GL(n, R)$ і $S_0 \in GL(2n, R)$ такі, що

$U_0 C S_0 = \| F, O_n^n \|$, де $F = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_r, 0, \ldots, 0) \in R_n$ і $c_1 | c_2 | \ldots | c_r$.
Отже, $U_0 C = \| F, O_n^n \| S_0^{-1}$. Звідси отримуємо $U_0 A = \left\| \begin{matrix} C_1 \\ O_{n-r}^n \end{matrix} \right\|$ і $U_0 B = \left\| \begin{matrix} C_2 \\ O_{n-r}^n \end{matrix} \right\|$, де C_1 та C_2 — $(r \times n)$-вимірні матриці. Для матриць C_1 і C_2 існують матриці $S_1, S_2 \in GL(n, R)$ такі, що $C_1 S_1 = \| A_1, O_r^{n-r} \|$ і $C_2 S_2 = \| B_1, O_r^{n-r} \|$, де A_1, $B_1 \in R_r$. З наведеного вище випливає, що для матриць A та B існують матриці $U_0, V_0, W_0 \in GL(n, R)$ такі, що

$$A = U_0 \left\| \begin{matrix} A_1 & O_r^{n-r} \\ O_{n-r}^r & O_{n-r}^{n-r} \end{matrix} \right\| V_0, \quad B = U_0 \left\| \begin{matrix} B_1 & O_r^{n-r} \\ O_{n-r}^r & O_{n-r}^{n-r} \end{matrix} \right\| W_0, \tag{1}$$

де $A_1, B_1 \in R_r$ і $\det B_1 \neq 0$. Оскільки $A_1 = U_1 F_{A_1} V_1$, де $U_1, V_1 \in GL(r, R)$, то для матриці B_1 існує зображення $B_1 = U_1 B_2$. На підставі того, що $F_{B_1} = F_{B_2}$, та згідно з зауваженням 1 $B_2 = QTF_{B_1} W_1$, де $W_1 \in GL(r, R)$, $Q \in UT(r, R)$ і $T = \| t_{ij} \| \in LT(r, R)$ така, що t_{ij} належать повній системі лишків за модулем ідеалу (b_i / b_j) для всіх $r \geq i > j \geq 1$. Отже, $A_1 = U_1 F_{A_1} V_1$, $B_1 = U_1 QTF_{B_1} W_1$. З огляду на те, що $F_A = \operatorname{diag}(F_{A_1}, 0, \ldots, 0)$ і $F_B = \operatorname{diag}(F_{B_1}, 0, \ldots, 0)$, враховуючи (1), отримуємо такі зображення для матриць A та B:

$$A = U_0 \operatorname{diag}(U_1, I_{n-r}) F_A \operatorname{diag}(V_1, I_{n-r}) V_0 = U F_A V,$$

$$B = U_0 \operatorname{diag}(U_1 QT, I_{n-r}) F_B \operatorname{diag}(W_1, I_{n-r}) W_0 = U \operatorname{diag}(QT, I_{n-r}) F_B W,$$

де $U = U_0 \operatorname{diag}(U_1, I_{n-r})$, $V = \operatorname{diag}(V_1, I_{n-r}) V_0$ і $W = \operatorname{diag}(W_1, I_{n-r}) W_0$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай матриці $A, B \in R_n$ такі, що $\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} B = r$. Нехай, далі, $F_B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_r, 0, \ldots, 0)$. Якщо $\operatorname{rang} \| A, B \| = r$, то для матриць A та B існують матриці $U_1, V_1, W_1 \in GL(n, R)$ такі, що $U_1 A V_1 = F_A$, $U_1 B W_1 = \operatorname{diag}(T, I_{n-r}) F_B$, де $T = \| t_{ij} \| \in LT(r, R)$ така, що t_{ij} належать повній системі лишків за модулем ідеалу (b_i / b_j) для всіх $r \geq i > j \geq 1$.*

Доведення. Згідно з теоремою 1 $A = U F_A V$ і $B = U \operatorname{diag}(QT, I_{n-r}) F_B W$, де $U, V, W \in GL(n, R)$, $Q \in UT(r, R)$ і $T = \| t_{ij} \| \in LT(r, R)$ така, що t_{ij} належать повній системі лишків за модулем ідеалу (b_i / b_j) для всіх $r \geq i > j \geq 1$. Тоді $A = U \operatorname{diag}(Q, I_{n-r}) \operatorname{diag}(Q^{-1}, I_{n-r}) F_A V$. Оскільки $\operatorname{diag}(Q^{-1}, I_{n-r}) \in UT(n, R)$, то для неї існує матриця $S \in UT(n, R)$ така, що $\operatorname{diag}(Q^{-1}, I_{n-r}) F_A S = F_A$. Отже, $A = U \operatorname{diag}(Q, I_{n-r}) \operatorname{diag} F_A S^{-1} V$ і $B = U \operatorname{diag}(Q, I_{n-r}) \operatorname{diag}(T, I_{n-r}) F_B W$. Наслідок доведено.

Зауважимо, що з наслідку 1 легко отримати теорему 1 роботи [4].

Наслідок 2. *Нехай матриця $B \in R_n$ з к. д. ф. $F_B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_r, 0, \ldots, 0)$ — лівий дільник матриці $A \in R_n$, тобто $A = BC$. Тоді існують матриці $U, V, W \in GL(n, R)$, $Q \in UT(r, R)$ та*

$$T = \left\| \begin{matrix} e & 0 & \cdots & & 0 \\ t_{21} & e & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ t_{r1} & \cdots & t_{r,r-1} & & e \end{matrix} \right\| \in LT(r, R),$$

де t_{ij} *належать повній системі лишків за модулем* (b_i/b_j) *для всіх* $r \geq i > j \geq 1$, *такі, що*:

А) $A = UF_AV$, $B = U\operatorname{diag}(QT, I_{n-r})F_BW$;

Б) $\operatorname{diag}(T^{-1}, I_{n-r})F_A = F_BG$.

Доведення. Оскільки $A = BC$, то $\operatorname{rang}\|A, B\| = \operatorname{rang} B$. Тоді умова А випливає з теореми 1. Згідно з наслідком 1 існують матриці $U_1, V_1, W_1 \in GL(n, R)$ такі, що $U_1AV_1 = F_A$ і $U_1BW_1 = \operatorname{diag}(T, I_{n-r})F_B$, де $T = \|t_{ij}\| \in LT(r, R)$ така, що t_{ij} належать повній системі лишків за модулем ідеалу (b_i/b_j) для всіх $r \geq i > j \geq 1$. Отже, з факторизації $A = BC$ випливає $F_A = \operatorname{diag}(T, I_{n-r})F_BG$, де G — нижня трикутна матриця. Оскільки $T \in LT(r, R)$, то $\operatorname{diag}(T^{-1}, I_{n-r})F_A = F_BG$. Наслідок доведено.

З наслідку 2 дістаємо, що кожній факторизації матриці $A = BC$ відповідає факторизація її к. д. ф. $F_A = F_B\Phi$ $(F_A = \Psi F_C)$, тобто к. д. ф. матриці $B(C)$ ділить к. д. ф. матриці A. Тому опис структури дільників матриці A доцільно розділити на частини, вказавши спочатку факторизацію її к. д. ф. $F_A = F_1F_2$, де F_1 — $\mathbf{d}$-матриця, а потім класифікувати шукані для неї дільники B із даною к. д. ф. $F_B = F_1$. Опишемо структуру неособливих дільників матриць над областю R.

Теорема 2. *Нехай неособлива* $\mathbf{d}$*-матриця* $F_1 = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in R_n$ — *дільник к. д. ф. матриці* $A = UF_AV \in R_n$, *де* $U, V \in GL(n, R)$, *тобто* $F_A = F_1F_2$. *Тоді для кожного розкладу матриці* $A = BC$ *такого, що* $B \in R_n$ — *неособлива матриця з к. д. ф.* $F_B = F_1$, *існують матриці*

$$T = \begin{Vmatrix} e & 0 & \cdots & & 0 \\ t_{21} & e & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{n,n-1} & & e \end{Vmatrix} \in LT(n, R),$$

де t_{ij} *належать повній системі лишків за модулем ідеалу* (b_i/b_j) *для всіх* $1 \leq j < i \leq n$, *причому* $T^{-1}F_A = F_BG$, *та* $Q \in UT(n, R)$ *і* $W \in GL(n, R)$ *такі, що* $B = UQTF_BW$.

Доведення. Оскільки $A = UF_AV \in R_n$, де $U, V \in GL(n, R)$ і $A = BC$ ($B \in R_n$ — неособлива матриця з к. д. ф. $F_B = F_1$), то очевидно, що $F_A = F_1F_2$. Тоді $B = UB_1$, де $B_1 \in R_n$ — матриця з к. д. ф. $F_{B_1} = F_1$. На підставі зауваження 1 для матриці B існує зображення $B = UQTF_BW$, де $Q \in UT(n, R)$, $W \in GL(n, R)$ і $T = \|t_{ij}\| \in LT(n, R)$ така, що t_{ij} належать повній системі лишків за модулем ідеалу (b_i/b_j) для всіх $n \geq i > j \geq 1$. Згідно з наслідком 2 для матриці T виконується $T^{-1}F_A = F_BG$.

Нехай неособлива $\mathbf{d}$-матриця $F_1 = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in R_n$ — дільник к. д. ф. F_A матриці $A = UF_AV \in R_n$, $U, V \in GL(n, R)$. Позначимо через $M(A, F_1)$ множину матриць $T = \|t_{ij}\| \in LT(n, R)$ таких, що t_{ij} належать повній системі лишків за модулем ідеалу (b_i/b_j) для всіх $n \geq i > j \geq 1$, і $T^{-1}F_A = F_BG$. Оскільки $I_n \in M(A, F_1)$, то $M(A, F_1) \neq \varnothing$. Якщо $T_0 \in M(A, F_1)$, то для к. д. ф. F_A матриці A існує зображення у вигляді добутку

$$F_A = T_0T_0^{-1}F_1F_2 = T_0F_1G. \tag{2}$$

З огляду на те, що для кожної матриці $Q \in UT(n, R)$ існує деяка матриця $S \in UT(n, R)$ така, що $QF_A S = F_A$, та на підставі рівності (2) для матриці A існує факторизація

$$A = UQT_0 F W_1 W^{-1} GSV = BC,$$

де $W \in GL(n, R)$, а $B = UQT_0 F_1 W$ — лівий дільник матриці A з к. д. ф. $F_B = F_1$.

Зауважимо, якщо $B_1 = UQ_1 T_1 F_1 W_1$ — теж лівий дільник матриці A із к. д. ф. $F_{B_1} = F_1$, то матриці B та B_1 асоційовані справа тоді і тільки тоді, коли матриці QT_0F_1 та $Q_1T_1F_1$ перетвореннями стовпців зводяться до однієї трикутної матриці (форми Ерміта). Теорему доведено.

Отже, матриці $U, V, W \in GL(n, R)$, $Q \in UT(n, R)$ та $T \in LT(n, R)$, які визначені теоремою 2, утворюють систему твірних для лівих неособливих дільників матриці A із заданою к. д. ф. $F_B = F_1$. Проте в деяких випадках [1, 6] системою твірних для дільників матриці $A = UF_A V \in R_n$ над областю головних ідеалів R є матриці $U, V, W \in GL(n, R)$, $Q = I_n$ та $T = I_n$.

Відзначимо, що при умовах теореми 2 в рівності (2) $G \in R_n$ — нижня трикутна матриця, діагональні елементи якої збігаються з відповідними діагональними елементами матриці F_2. Якщо ж матриці F_2 та G еквівалентні, то на підставі теореми 1 із [7] існують матриці $S_1, S_2 \in LT(n, R)$ такі, що $G = S_1 F_2 S_2$. Тоді співвідношення (2) набуде вигляду $F_A = T_0 F_1 S_1 F_2 S_2 = T_0 S_0 F_1 F_2 S_2$, де $S_0 \in LT(n, R)$ така, що $F_1 S_1 = S_0 F_1$.

Зауваження 2. Нехай к. д. ф. матриці $A \in R_n$ зображена у вигляді добутку $F_A = F_1 F_2$, де $F_1 \in R_n$ — неособлива **d**-матриця. Тоді для кожного розкладу матриці $A = BC$ такого, що $B \in R_n$ — неособлива матриця з к. д. ф. $F_B = F_1$, а матриці C та F_2 еквівалентні, існують матриці $U_0, V_0, W_0 \in GL(n, R)$ такі, що $A = U_0 F_A V_0$, $B = U_0 F_1 W_0$ і $C = W_0^{-1} F_2 V_0$.

Із теореми 2 отримуємо необхідні та достатні умови існування унітальних дільників з наперед заданою к. д. ф. для многочленних матриць над полем P. Відзначимо, що цю задачу для неособливих многочленних матриць над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль розв'язано в роботі [8].

Наслідок 3. *Нехай для к. д. ф. матриці* $A(x) = U(x)F_A(x)V(x) \in P_n[x]$, *де* $U(x), V(x) \in GL(n, P[x])$, *існує зображення у вигляді добутку* $F_A(x) = F_1(x)F_2(x)$, *де* $F_1(x) = \operatorname{diag}(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x)) \in P_n[x]$ — *неособлива* **d**-*матриця така, що* $\deg\det F_1(x) = nr$. *Для матриці* $A(x)$ *існує факторизація* $A(x) = B(x)C(x)$, *де* $B(x) = I_n x^r - B_1 x^{r-1} - \ldots - B_r$, $B_j \in P_n$, — *унітальна многочленна матриця степеня* r *із к. д. ф.* $F_B(x) = F_1(x)$, *тоді і тільки тоді, коли існують матриці* $Q(x) \in UT(n, P[x])$ *і*

$$T = \left\|\begin{matrix} e & 0 & \cdots & & 0 \\ t_{21}(x) & e & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ t_{n1}(x) & \cdots & t_{n,n-1}(x) & & e \end{matrix}\right\| \in LT(n, P[x]),$$

де $\deg t_{mk}(x) < \deg\left(\dfrac{b_m(x)}{b_k(x)}\right)$ *при* $m > k$, *причому* $T^{-1}(x)F_A(x) = F_1(x)S(x)$, *такі, що матриця* $M(x) = U(x)Q(x)T(x)F_1(x)$ *елементарними перетвореннями стовпців зводиться до унітальної многочленної матриці* $B(x)$, *тобто* $M(x)W(x) = B(x)$ *для деякої матриці* $W(x) \in GL(n, P[x])$.

Якщо поле P нескінченне, то при умовах наслідку 3 досить вимагати, щоб $Q \in UT(n, P)$ (див., наприклад, [8, с. 131], теорема 1). Умови, за яких многочленна матриця над полем P елементарними перетвореннями рядків (стовпців) зводиться до унітальної многочленної матриці, наведено в [9].

Наведені вище результати справедливі для адекватного кільця (див. [5]). Крім цього, отримані результати легко переносяться на ті області елементарних дільників K, в яких для довільних трьох елементів $a \neq 0$, $b \neq 0$ та c із K існує елемент $r \in K$ такий, що н. с. д. (a, b, c) збігається з н. с. д. $(a + rc, br)$ (див. [10] та цитовану там літературу). Останнє зауваження рівносильне тому, що для кожної неособливої матриці $A = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ c & b \end{Vmatrix} \in K_2$ існує матриця $Q = \begin{Vmatrix} e & r \\ 0 & e \end{Vmatrix} \in UT(2, K)$ така, що $QA = TF_A W$, де $T \in LT(2, K)$ і $W \in GL(2, K)$. Отже, для неособливих матриць над областю K має місце зауваження 1. Відзначимо, що один із підходів до вивчення структури факторизації матриць над областями елементарних дільників наведено в [11].

1. *Прокіп В. М.* Про мультиплікативність к. д. ф. матриць над областю головних ідеалів. II // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 274 – 277.
2. *Newman M.* Integral matrices. – New York.: Acad. Press, 1972. – 224 p.
3. *Забавский Б. В., Казимирский П. С.* Приведение пары матриц над адекватным кольцом к специальному треугольному виду применением идентичных односторонних преобразований // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 256 – 258.
4. *Petrychkovych V.* Generalized equivalence of pairs of matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 2000. – **48**. – P. 179 – 188.
5. *Helmer O.* The elementary divisors theorem for certain rings without chain condition // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 225 – 236.
6. *Прокип В. М.* О мультипликативности канонических диагональных форм матриц // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 7. – С. 60 – 62.
7. *Gustafson W. H.* Roth's theorem over commutative rings // Linear Algebra and Appl. – 1979. – **23**. – P. 245 – 251.
8. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1982. – 224 с.
9. *Прокип В. М.* О делимости и односторонней эквивалентности многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 9. – С. 1213 – 1219.
10. *Larsen M. D., Lewis W. J., Shores T. S.* Elemenary divisors rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **187**, № 1. – P. 231 –248.
11. *Щедрик В. П.* Структура та влативості дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників // Мат. студ. – 1998. – **10**, № 2. – С. 115 – 120.

Одержано 25.12.2001